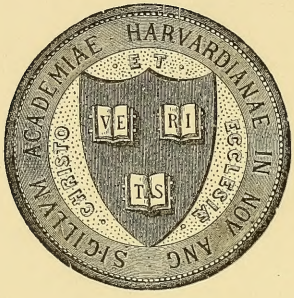
SOC
7130

HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167

Exchange

October 9, 1908.

OCT 9 1908
167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

TOME DIX-HUITIÈME.

LIÉGE,
CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR,

BRUXELLES,
CHEZ C. MUQUARDT.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS,
CHEZ RORET, LIBre.
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*.

1863.

A

OCT 9 1908

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere nec timide.

TOME DIX-HUITIÈME.

LIÉGE,
CHEZ H. DESSAIN, IMPRIMEUR,

BRUXELLES,
CHEZ C. MUQUARDT.
LEIPZIG, MÊME MAISON.

PARIS,
CHEZ RORET, LIBre.
RUE HAUTEFEUILLE, 10 *bis*.

1863.

A

XVIII. — *Postscriptum ad Clivinidarum Monographiam atque de quibusdam aliis.*

PAR

J. PUTZEYS.

—

Lorsque j'ai entamé ma monographie des Clivines et genres voisins, un fort petit nombre de ces insectes était épars dans les collections : je ne me suis pas dissimulé que la rédaction d'une monographie était prématurée en présence d'éléments aussi incomplets, et si je n'ai pas renoncé dès lors à la tâche que je m'étais imposée, c'est que j'espérais appeler l'attention des entomologistes sur un groupe des plus intéressants, mais généralement négligé jusque-là. Mon espoir n'a point été déçu : les naturalistes-voyageurs ont moins négligé les clivines et le nombre des espèces s'est accru rapidement. Cependant on peut, dès à présent être certain que nous ne possédons pas encore la moitié, peut-être pas même le quart de ces petits insectes qui sont répandus sur toute la surface du globe (1).

Des travaux importants ont été faits sur des faunes locales plus ou moins étendues : par M. Le Conte, sur des clivinides des Etats-Unis, et par M. Schaum, sur les Dyschirius européens.

Ma Monographie est donc débordée, et, avant peu d'années, le nombre des espèces qu'elle comprend sera insignifiant en comparaison des espèces décrites depuis ou restant à décrire. Je laisserai à d'autres le soin d'accomplir un travail définitif lorsque le moment

(1) Ce que l'on connaît de la Nouvelle-Hollande se borne à trois ou quatre espèces provenant exclusivement du littoral méridional de ce vaste territoire; on n'a encore rapporté de l'Inde que peu d'individus d'un fort petit nombre d'espèces : de la Chine, une ou deux espèces : du Japon, rien : du Chili et du Pérou, rien.

en sera venu. Chercher à refondre aujourd'hui mon ouvrage primitif me serait à peu près impossible : les loisirs me font défaut, et les collections dans lesquelles j'ai puisé jadis se sont tellement disséminées qu'il serait fort difficile de parvenir à réunir et les types qui m'avaient été confiés et toutes les espèces nouvelles qui sont arrivées en Europe. D'ailleurs, je comprends mieux que jamais combien il est dangereux de se prononcer sur des espèces dont on n'a sous les yeux que peu d'individus, parfois même un seul, dans un groupe où une même espèce a un habitat souvent très-étendu et se modifie assez sensiblement sous l'influence du climat ou de l'altitude.

Je crois donc devoir me borner à une sorte de postscriptum où je rectifie quelques-unes des inexactitudes que j'ai nécessairement commises, tout en ajoutant la description d'un certain nombre d'espèces nouvelles.

Tout en décrivant, cette fois encore, quelques insectes qui ne m'appartiennent pas, je ne me dissimule pas les inconvénients très-graves qu'il y a à ne point pouvoir, par la suite, confronter les types sur lesquels les espèces ont été établies : il est rare, d'ailleurs, qu'il me soit possible d'examiner suffisamment, c'est-à-dire, sans en disséquer certaines parties, les insectes qui me sont confiés : la languette, les mâchoires, les palpes, la base des mandibules ne sont guère distincts qu'au moyen de l'extraction ou du ramollissement, opérations que l'on ne peut se permettre sur des objets appartenant à autrui ; il n'y a pas jusqu'à la dent du menton sur la forme de laquelle il ne soit très-aisé de se méprendre si on ne l'a point isolée des autres parties de la bouche. Ce n'est donc que par exception et seulement pour des espèces facilement reconnaissables que je suis sorti de ma propre collection.

L'introduction de quelques genres nouveaux m'a forcé à dresser un nouveau tableau synoptique des divers groupes composant les clivinides.

TABLEAU DES GENRES.

A. Languette concave, hispide . . . . . *Scaritides* (1).
B. — plane, glabre.

(1) Voy. le Mémoire de M. de Chaudoir. Bull. Mosc. (1855) tom. XXVIII.

b. plus large que haute.
c. Menton sans dent . . . . . *Gnathoxys* (2).
cc. — denté.
d. Mâchoires aiguës.
e. 3e article des palpes maxillaires de moitié plus court que le dernier . . . . . *Oxygnathus* (3).
ee. 3e art. des palpes maxill. le plus long de tous. *Oxystomus* (4).
dd. Mâchoires arrondies à l'extrémité.
1. Dernier art. des palpes fortement sécuriforme . . . . . *Carenum* (5).
2. Dernier art. des palpes en cône allongé.
† Trochanters des cuisses postérieures arrondis à l'extrémité . . . . . *Pasimachus* (6).
†† — épineux. . . . . *Emydopterus* (7).
bb. Plus haute que large.
f. Tarses semblables dans les deux sexes.
g. Mandibules épaisses, triangulaires à la base (allongées).
h. Palpes grêles. . . . . *Camptodontus* (8).
hh. — de grosseur moyenne. . . . . *Stratiotes* (9).
gg. Mandibules épaisses, triangulaires à la base (courtes). . . . . *Climax* (10).
ggg. Mandibules larges et aplaties à la base (courtes ou allongées).
h. Mâchoires arrondies à l'extrémité.
i. Menton en demi-cercle, non denté au milieu. *Listropus* (11).
ii. Lobes latéraux du menton tronqués; une dent au milieu.
† Languette très large . . . . . *Scaptcrus* (12).
†† — très-étroite. . . . . *Bohemannia* (13).
hh. Mâchoires aiguës.
j. Le 5e article des tarses antérieurs plus large à la base qu'à l'extrémité . . . . . *Schizogenius* (14).
jj. — — plus large à l'extrémité qu'à la base.

---

(2) *Westwood*, Arcan. ent. I, p. 89. — *Lacord.* Gen. des Col. I, p. 196.
(3) *Dejean* Spec. II, p. 473. — *Lacord.* Gen. I, p. 198 (voy, ci après.)
(4) *Latreille.* Fam. nat. p. 239. — *Lacord.* Gen. I, p. 198. (voy. ci-après fig. 5 et 6.)
(5) *Bonelli.* 2e Mém. p. 479. — *Lacord.* Gen. I, p. 192.
(6) *Bonelli.* 2e Mém. p. 476. — *Lacord.* Gen. I, p. 190. — *Putz.* Prém. ent. p. 1.
(7) *Lacord.* Gen. des col. I, p. 191. — *Molobrus* Putz. Prém. ent. p. 5 et 10.
(8) *Dejean* spec. II, p. 476. — *Lacord.* Gen. I, p. 199. — *Putz.* Mon. cliv. p. 139. (Voy. ci-après).
(9) *Putz.* Mon. Cliv. p. 140. — *Lacord.* Gen. I, p, 200. (Voy. ci-après).
(10) *Putz*, nov. gen. (Voy. ci-après.)
(11) *Aud.* in Dez. Cat. (Voy. ci-après).
(12) *Dejean* sp. II, p. 471. — *Lacord.* Gen. I, p. 197. — *Putz.* Mon. cliv. p. 137, (Voy. ci-après fig. 16, 17 et 18).
(13) *Putz.* nov. gen. (Voy. ci-après .
(14) *Putz.* Mon. cliv, p. 131. — *Lacord.* Gen. I, p. 207.

k. Pénultième art. des palpes maxill. plus long que le dernier.
* Mandib. courtes, épaisses. . . . . *Systenognathus* (15).
** — longues, planes, falciformes. . *Scolyptus* (16).
kk. Pénult. art. des palpes maxill. plus court que le dernier.
l. Yeux enfoncés ou ne dépassant pas le rebord supra-antennaire.
† Languette tronquée, courte, large, surmontée de deux poils . . . . *Cryptomma* (17).
†† Languette tronquée, longue, étroite, surmontée d'un seul poil. , . . *Mesus* (18).
††† Languette pyramidale. . . . . *Pyramis* (19).
ll. Yeux proéminens.
m. Pénultième art. des palpes lab. plus court que le dernier. . . . . *Lachenus* (20).
mm. — plus long. —
n. Languette (ou au moins sa partie cornée) se rétrécissant à l'extrémité. . . . . *Clivina* (21).
mm. Languette élargie et tronquée à l'extrémité.
† Mandibules longues, arquées. . *Dacca* (22).
†† Mand. courtes.
o. Elytres arrondies ou légèrement sinuées à l'extrémité. . *Dyschirius* (23).
oo. Elytres subtronquées à l'extrémité. . . . . *Acephorus* (24).
ff. Tarses antérieurs dilatés chez les mâles.
p. 2e article des palpes maxillaires sécuriforme. . *Ardistomis* (25).
pp. — — non sécuriforme. . *Aspidoglossa* (26).

---

(15) *Putz.* nov. gen. (Voy. ci-après).
(16) *Putz.* nov. gen. (Voy. ci-après).
(17) *Putz.* Mon. cliv. p. 55. — *Lacord.* Gen. I, p. 201. (Voy. ci-après fig. 7, 8 et 9).
(18) *Chevrolat.* Aun. S. ent. 1858, p. 317. (Voy. ci-après).
(19) *Putz.* Mon. cliv. p. 58. — *Lacord.* Gen. I, p. 205. (Voy. ci-après fig. 13, 14 et 15).
(20) *Putz.* Mon. cliv. p. 57 — *Lacord.* Gen. I, p. 200. (Voy. ci-après fig. 19).
(21) *Latr.* — cf. Putz. Mon. cliv. p. 59. — *Lacord.* Gen. I, p. 204. (Voy. ci-après).
(22) *Putz.* — nov. gen. (Voy. ci-après).
(23) *Bonelli.* — *Putz.* Mon. cliv. p. 4. — *Lacord.* Gen. I, p. 202. — *Schaum* Deutschl. Ins. I, p. 193. — *Le Conte* Proc. Philad. 1857, p. 75.
(24) *Le Conte* Aun. Lyc. N. York. V. 194. — *Lacord.* Gen. I, p. 201.
(25) *Putz.* Mon. cliv. p. 118. *Lacord.* Gen. I, p. 206.
(26) *Putz.* Mon. cliv. p. 108. — *Lacord.* Gen. I, p. 205.

G. OXYGNATHUS.

(Fig. 1.)

Dejean n'a indiqué qu'assez vaguement les parties de la bouche de l'*O. elongatus*, insecte rare et dont je n'ai vu qu'un seul exemplaire qui m'a été communiqué par M. le M^is^ de La Ferté.

Le menton est transversal, ses lobes latéraux sont obtus à leur sommet : la dent du milieu est peu marquée, très-obtuse ; toute la surface, presque plane, est ridée transversalement d'une manière assez régulière ; la dent centrale seule reste lisse.

Les palpes sont allongés et assez grêles. Les palpes labiaux retombent sur le devant du menton comme dans les cicindélides. Il en est de même du 2^e^ article des palpes maxillaires.

Derrière la dent du menton, on aperçoit le corps de la languette sur laquelle sont couchés les deux lobes accessoires des mâchoires et, sans doute, derrière eux, les mâchoires elles-mêmes que l'on ne distingue nullement : ces deux lobes sont très-petits ; leur dernier article est ovoïde, presqu'aigu à l'extrémité.

Dans la fig. 1, j'ai représenté les parties de la bouche, telles qu'il m'a été possible de les distinguer.

G. CAMPTODONTUS.

(Fig. 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 et 27.)

L'examen que j'ai pu faire des parties de la bouche, me permet de compléter aujourd'hui les caractères assignés à ce genre par Dejean.

La languette, de consistance presque cornée, est partagée par une carène centrale assez avancée à laquelle viennent aboutir les deux parties latérales : vue de face, elle paraît échancrée au centre ; de derrière, au contraire, elle paraît être élevée dans son milieu : ses angles sont arrondis ; les paraglosses sont moins élevés que le corps de la languette.

1. C. Cayennensis Dej.

(Voy. fig. 20, 21 et 22).

J'en ai examiné plusieurs individus venant des bords de l'Amazone.

2. C. Lacordairei. Dej. (Cat.)

M. de La Ferté m'a communiqué le type de l'espèce nommée, mais non décrite, par Dejean. C'est le même insecte que celui de la collection Dupont auquel j'ai cru devoir rapporter l'*Oxygnathus anglicanus* Steph. Chacun sera, je l'espère, d'accord avec moi pour considérer comme non avenu le baptême imposé par Stephens et qui exprime une erreur d'habitat évidente.

J'ai reçu de M. Stevens un exemplaire provenant de l'Amazone.

3. C. Reichei. Laf. (Coll.)

Long. 12. — El. 6 1/2. — Lat. 3 1/2 m.

Plus court que le *C. Lacordairei*. Les élytres sont plus ovales, moins allongées. Le menton est plus fortement sillonné longitudinalement; ses lobes latéraux sont tronqués un peu obliquement. Les mandibules sont un peu plus épaisses, moins aiguës et moins courbes à l'extrémité. La tête est un peu plus large. Le corselet est plus carré, moins rétréci antérieurement ; la ligne transversale antérieure n'est nullement marquée; la base est à peine prolongée; les angles postérieurs sont plus arrondis et marqués seulement par un petit tubercule.

J'ai examiné deux individus de Colombie. Un troisième, de la Nouvelle-Grenade, brun (immatur.) m'a paru un peu moins ovale.

4. C. Puncticeps.

(Voy. fig. 23 et 24.)

Nigro-brunneus, palpis, antennis tarsisque testaceis, corpore subtus brunneo. Caput antice rugatum postice punctatissimum. Labrum in medio prominulum. Clypei alæ subprominulæ, rotundatæ. Pronotum quadratum, angulis anticis deflexis, æque ac posticis rotundatis, basi angustatum, utrinque versus latera profunde bisubcatum. Elytra cylindrica, profunde punctato-striata, interstitiis convexis, 3° tri-punctato. Tibiæ anticæ sulcatæ, extus longe bidentatæ, intermediæ fortiter calcaratæ, subtus capite, pronoto abdominis lateribus ultimoque segmento punctatissimis. — Long. 8 1/4 — El. 4 — Lat. 1 2/3 M.

D'un noir-brunâtre (brillant, mais semblant terne à cause des points nombreux dont une partie de l'insecte est couverte), plus clair sur les bords et en dessous; les palpes, les antennes et les pattes testacés. Le menton, longitudinalement rugueux, se rétrécit de la base à l'extrémité; les lobes latéraux sont arrondis; la dent du milieu, plus élevée, large, porte au centre une carène saillante; elle est échancrée à l'extrémité. — Les mandibules sont un peu plus courtes et moins courbes que dans les espèces précédentes; leur base est rugueuse. Les antennes atteignent la base du corselet; elles grossissent légèrement depuis le 2e article jusqu'à l'extrémité. — Le labre est en demi-cercle, un peu avancé au milieu; l'épistôme est coupé droit au centre; ses côtés sont un peu avancés et arrondis; le rebord supra-antennaire n'atteint pas le niveau des yeux. La tête, bombée, est couverte de rugosités serrées qui sont remplacées par des points vers le milieu; sur les côtés, on remarque deux fossettes longues et profondes; le rebord post-oculaire atteint le niveau des yeux.

Le corselet est d'un cinquième plus large que la tête, carré; le bord antérieur est proéminent avant les angles antérieurs qui sont arrondis; les côtés, rebordés, sont parallèles jusqu'aux angles postérieurs (qui sont marqués par un petit tubercule saillant), puis rétrécis jusqu'à la base. — Le sillon transversal antérieur est très-marqué, anguleux aux points de jonction avec les sillons longitudinaux qui sont au nombre de cinq, tous très-profonds et rugueux; le premier occupe le centre; les deux autres de chaque côté sont plus rapprochés du bord; le plus externe de ces deux derniers n'atteint pas la base.

Les élytres, à peine plus larges que le corselet, sont allongées, cylindriques, avec les épaules et l'extrémité arrondies; profondément sillonnées-ponctuées, avec le premier intervalle déprimé jusqu'à l'extrémité de la petite strie préscutellaire.

Les tibias antérieurs, unisillonnés en dessus, sont larges : au dessus de la digitation terminale, on en remarque une seconde à peine plus courte, suivie d'une forte dent aiguë. Les tibias intermédiaires portent extérieurement un fort éperon.

En dessous, la tête est ponctuée sur les côtés; le corselet et le dernier segment de l'abdomen sont fortement rugueux et ponctués dans toute leur étendue.

Bords de l'Amazone, deux exemplaires.

5. C. Falcatus.

(Voy. fig. 25, 26 et 27.)

Niger, nitidus; capite quadrato; mandibulis supra planis, basi latioribus, falcatis, apice obtusissimis; labro emarginato, piceo; antennis piceis, brevibus, articulis duobus primis glabris, cæteris pubescentibus, 1° crasso, 2° longiore, 3-6 sensim decrescentibus, apice crassioribus, cæteris ovatis; vertice longitudinaliter sulcato rugosoque; oculis intra capitis margines anteriorem posterioremque vix prominulis; pronoto capitis latitudine elongato-quadrato, post angulos posticos basi angustato, angulis anticis deflexis obtusis, posticis vero tuberculo minuto indicatis; sulco longitudinali medio notato, marginem anticum non attingente: elytris cylindricis paulo latioribus, sulculis obsolete punctatis impressis; interstitio 3ª punctis 3 notato, 1° in 4ª anteriore, alteris in 3ª posteriore elytri parte; femoribus anticis latis compressis; tibiis anticis sulcatis extus bidigitatis dentibusque duobus armatis; intermediis unicalcaratis. — Long. 16 — corp. 7 3/4 — pron. 2 3/4 — cap. cum mandib. 4. — Lat 3 1/4 mill.

Les palpes sont moins grêles que dans le *C. cayennensis*. Le 4e art. des palpes labiaux est distinctement plus court que le précédent; le 3e art. des p. maxillaires est moins long que le 2e.

Cet insecte m'a jadis été communiqué par M. Baquet qui ignorait sa patrie. Il provient sans doute, comme toutes les autres espèces du genre, de l'Amérique centrale. La singulière forme des mandibules m'avait d'abord fait croire que ces organes avaient eu la pointe rompue ou usée, mais l'examen le plus attentif m'a fait renoncer à cette supposition; il est d'ailleurs à remarquer que l'extrémité est non seulement arrondie, mais dilatée intérieurement.

G. STRATIOTES.

(Fig. 28, 29 et 30.)

Possédant maintenant plusieurs exemplaires de diverses espèces de *Stratiotes*, je puis compléter et rectifier quelques-uns des caractères indiqués dans ma Monographie. Voici les différences qui existent entre ce genre et le précédent.

Les trois lobes du menton (la dent centrale est bifide) sont égaux

en hauteur. Chez les *Camptodontus* le lobe central est le plus élevé. Les paraglosses plus courts que la languette dans les *Camptodontus*, sont ici au moins aussi longs. Les palpes sont moins grêles et moins allongés; le 3e article des palpes maxillaires, qui est très-long dans les *Camptodontus* est, au contraire, le plus long chez les *Stratiotes*. Les mandibules sont plus arquées, plus élargies à leur base; le tubercule post-oculaire est plus grand, plus prolongé en arrière des yeux. Le corselet, qui est carré ou cordiforme chez les *Camptodontus*, est ici rétréci en avant, et au lieu de deux profonds sillons latéraux se prolongeant de la base à l'extrémité, on ne remarque qu'une impression courte de chaque côté de la base. Les élytres sont moins parallèles et plus ovales, plutôt striées que sillonnées comme dans les *Camptodontus*. Les cuisses sont plus élargies.

Je connais aujourd'hui quatre espèces de *Stratiotes*.

1. S. Clivinoides. Lap. Mon. p. 141.

(Voy. fig. 28 et 29.)

2. S. Iracundus.

Niger, antennis, palpis pedibusque brunneo-ferrugineis; labrum truncatum angulis rotundatis prominulis. Clypei alæ rotundatæ. Pronotum elongato-quadratum, angulis anticis prominulis, basi utrinque impressione obliqua longiore signatum; sulco medio longitudinali marginem anticum attingente. Elytra oblonga, dorso planiuscula, punctato-striata, interstitio 3° tripunctato. Tibiæ anticæ bisulcatæ, extus bidigitatæ, denteque superiore armatæ. — Long. 11. — El. 6. — Lat. 3 Mill.

D'un noir assez terne. La dent du menton est large, arrondie, non creusée au centre; les lobes latéraux sont plus élevés et aigus. Les ailes de l'épistôme, qui forment deux angles bien marqués chez le *S. clivinoides*, sont ici arrondis. Les yeux sont encore moins proéminents.

Le corselet est beaucoup plus carré, plus allongé, moins dilaté postérieurement; ses côtés sont parallèles; le bord antérieur est plus échancré. La ligne transversale antérieure n'est distincte que sur les côtés; les deux impressions latérales sont plus prolongées: la ligne longitudinale atteint le bord antérieur, ce qui n'a pas lieu chez le *S. Clivinoides*.

Les élytres sont proportionnellement plus allongées, moins profondément striées; les points sont moins distincts; les tibias antérieurs ont extérieurement deux digitations et au-dessus de celles-ci, une dent; ils portent intérieurement deux longues épines.

Martinique. 1 ind. Communiqué sous ce nom par M. de La Ferté.

3. S. Latidens.

(Voy. fig. 30).

Niger, nitidus, pedibus brunneis, antennis, palpis tarsisque testaceis. Labrum late excavatum, tripunctatum. Caput lævigatum sulcis duobus impressum. Clypeus truncatus, alis subprominulis, rotundatis. Pronotum suboblongum, antice angustatum, angulis anticis subprominulis, obtusis; lateribus marginatis, usque ad angulos posticos vix arcuatis; angulis posticis subdentatis; basi utrinque impressione obsoletissima foveolatum, sulco antico transversali profundo, longitudinali vero minus impresso. Elytra oblongo-ovata, profunde punctato-striata, striis apice obsoletius punctatis; interstitiis convexiusculis, 3° obsolete tripunctato. Tibiæ anticæ bisulcatæ, extus fortius bidentatæ; intermediæ calcaratæ. Abdomen seriebus tribus punctorum fasciatim dispositorum impressum. — Long. 10. — El. 5. — Lat. 2 3/4 mill.

Le menton est large; les lobes latéraux sont arrondis; la dent du milieu est large et peu proéminente.

Bords de l'Amazone. 1 ind.

4. S. Longicollis.

Long. 7. — El. 3 1/2. — Lat. 1 3/4 mill.

Il ne diffère essentiellement du précédent que par sa tête et son corselet beaucoup plus allongé; ce dernier est plus étroit antérieurement et un peu plus convexe.

La couleur du seul individu que je possède et qui vient de la même localité que le *S. latidens*, est brune avec les élytres foncées.

G. CLIMAX.

(Fig. 49, 50 et 51.)

Partie cornée de la languette presque linéaire, s'élargissant un peu vers la base, arrondie à l'extrémité, surmontée de deux soies droites; partie membraneuse un peu moins élevée, large et tronquée au sommet, deux fois profondément échancrée sur les côtés et offrant par conséquent dans cette partie deux fortes dents aiguës et relevées. Les paraglosses, un peu arquées, ne sont pas plus élevées que le corps de la languette. — La dent du menton est large, bifide à l'extrémité, creusée au centre, de la même hauteur que les lobes latéraux qui se prolongent vers les angles externes lesquels sont presqu'aigus. Les mandibules sont lisses, peu arquées, très-épaisses jusqu'au milieu où cesse la carène qui, dans les Clivines, s'étend jusqu'à l'extrémité; la partie antérieure est plane avec la pointe un peu relevée. — Les antennes ont leurs articles allongés et tous sont à peu près de la même longueur, sauf le premier et le dernier. Le premier est gros, cylindrique, aplati en dessus. — Le labre est bisinué, son milieu est relevé, avancé et fendu assez profondément : les angles sont très-arrondis. — Les yeux sont profondément enchâssés, surtout en arrière.

Le corselet et les élytres sont analogues aux mêmes parties des *Stratiotes*.

C. Fissilabris.

Nigra, nitida, palpis, antennis, labro pedibusque brunneis; labrum in medio fissum; clypeus truncatus alis vix prominulis; pronotum transversim subquadratum, antice angustatum, basi prolongato, lateribus late excavatis, fovea profunda utrinque impressa. Elytra subovato-oblonga, punctato-striata, interstitio 3° 5-punctato, striis ante apicem subito obliteratis; tibiæ anticæ sulcatæ, extus unidigitatæ denteque magno armatæ; tibiæ intermediæ calcaratæ; unguiculi longi subincurvati, paronychio longiore. — Long. 14. — El. 7 1/2 — Lat. 4 mill.

L'épistôme est tronqué, intimement uni à ses ailes qui sont très-légèrement proéminentes et arrondies sur les côtés. L'impression

antérieure est bordée en arrière par un sillon peu profond; elle a sur chaque côté un gros point d'où partent deux sillons arqués d'abord intérieurement, puis extérieurement et qui se terminent en arrière des yeux; en avant, ceux-ci dépassent de moitié le rebord supra-antennaire; en arrière, ils sont enchâssés dans le rebord postérieur de la tête beaucoup plus profondément que dans la plupart des clivines. Le vertex est traversé en avant par trois sillons bien marqués et un peu rugueux de chaque côté; au milieu se trouve un point large, mais peu enfoncé, en arrière duquel on voit un sillon transversal peu distinct; le sillon placé à la naissance du col est étroit et non ponctué.

Le corselet est d'un tiers plus large que la tête, plus court que large, rétréci antérieurement, dilaté à la hauteur des angles postérieurs; sa base est prolongée. Le bord antérieur est coupé droit; les angles antérieurs, déprimés, sont un peu avancés; les côtés vont en s'élargissant à partir du premier point marginal; les angles postérieurs font saillie en forme de dent; le point placé à leur intérieur est moins distinct que d'habitude; les côtés de la base sont légèrement échancrés; la base elle-même est échancrée, ses angles font une petite saillie en arrière. L'impression transversale antérieure est bordée en dessus par plusieurs petites rides longitudinales; l'impression longitudinale s'étend jusqu'à la base. De chaque côté de la base, on remarque une profonde impression ovale assez large et qui, en arrière, interrompt le rebord.

Les élytres sont en ovale allongé, peu rétrécies en arrière, avec les épaules arrondies vers le bas, mais formant une saillie anguleuse au point où aboutit le 6^{e} intervalle; le bord externe est fortement relevé, surtout aux épaules; les intervalles 1-5 ont à leur base un tubercule arrondi; les stries, profondes, ponctuées, ont leurs intervalles relevés; le 3^{e} de ceux-ci porte 5 points; à partir du dernier point, situé près de l'extrémité, les stries et les intervalles sont à peine distincts.

Les cuisses antérieures sont larges et fortement convexes antérieurement. Les tibias, larges, portent en dessus deux sillons dont l'un, l'intérieur, ne dépasse pas la première épine interne, et l'autre, central, va d'une extrémité à l'autre. Les digitations et les épines sont longues et divergentes. La dent placée au-dessus de la digitation externe est très-forte. Les tibias intermédiaires sont fortement éperonnés.

1 ind. reçu de M. Stevens comme venant des bords de l'Amazone.

G. LISTROPUS.

(Fig. 10, 11 et 12.)

Ligula cornea, lata, apice truncata; paraglossæ membranaceæ, lineares, ligula plus duplo longiores, apice acutæ.

Palpi labiales articulo ultimo præcedente dimidio longiore, subfusiformi, apice imo truncato.

Palpi maxillares articulo 1° brevi; 2° elongato, gracili, tortuoso; 3° brevissimo triangulari; 4° secundo dimidio breviore, eodem palparum labialium simili, sed crassiore.

Maxillæ arcuatæ, apice muticæ.

Mentum edentatum, lobis lateralibus angustis elevatissimis, canaliculatis, apice rotundatis.

Mandibulæ crassæ, latæ, parum arcuatæ, intus medio grosse uni-aut bidentatæ.

Antennæ breves, articulis ultimis submoniliformibus; 1° cylindrico, longo crassoque; 2° triangulari, sequentibus dimidio longiore.

Labrum corneum, emarginatum.

Epistomus profunde emarginatus lateribus acutis; alæ prominulæ, oculos non superantes.

Caput rotundatum, carinulis pluribus arcuatis ornatum.

Pronotum transversum, postice rotundatum.

Elytra breviter subcylindrica, apice conjunctim rotundata, punctato-striata; striola præscutellari nulla.

Alæ membranaceæ.

Pedes breves, femoribus anticis crassis; tibiis anterioribus latioribus digitatis, intermediis inermibus.

Listropus brevipennis.

Long. 13. — Elytr. 7. — Lat. 4 1/2 mill.

D'un noir brillant; palpes et antennes bruns; tarses couleur de poix.

La tête est large. Le menton est court, échancré en demi-cercle sans aucune trace de dent au milieu; les lobes latéraux, creusés en gouttière, sont fort élevés et assez étroits; leur extrémité est arrondie; ils portent des sillons longitudinaux assez marqués.

La languette est très-distincte et assez large avec l'extrémité rétrécie et les angles obtus. Le sommet est tronqué et surmonté de deux soies parallèles. Les paraglosses sont très-étroites, presque linéaires, se terminant en pointe et du double plus élevées que la languette.

Le 1er article des palpes labiaux est épais, cylindrique; le 2e, large, en triangle; le 3e beaucoup plus étroit que le précédent, trois fois aussi long; le 4e un peu plus court que le 3e et de la même largeur au milieu, est fusiforme avec son extrémité tronquée.

Les *mâchoires* sont assez étroites, un peu courbées, ciliées intérieurement, se rétrécissant légèrement à l'extrémité qui est obtuse.

Les *palpes maxillaires* ont leur 1er article court; le 2e aussi long que le 3e des palpes labiaux, arqué et un peu tortueux, grossissant vers l'extrémité; le 3e est en triangle très-court; le 4e est semblable au dernier des palpes labiaux, mais plus élargi au milieu.

Les antennes ne dépassent pas l'extrémité des mandibules; leurs trois premiers articles sont glabres, les autres finement pubescents. Le 1er article, beaucoup plus gros que les autres et aussi long que les trois suivants réunis, est subcylindrique, légèrement déprimé en dessus, un peu élargi extérieurement vers son extrémité qui est tronquée obliquement; le 2e est triangulaire allongé et de moitié plus long que les suivants; les 3e et 4e sont un peu rétrécis vers leur base; les 5e à 10e sont presque moniliformes; le dernier est un peu plus allongé, plus étroit et un peu aplati vers l'extrémité.

Les *mandibules* sont de la longueur de la tête, larges à la base, minces sur les côtés, plus épaisses au milieu où elles ont une carène longitudinale; l'extrémité est un peu relevée, légèrement courbée intérieurement, peu aiguë et lisse en dessus; les deux tiers de la surface supérieure sont pluri-carénés; on remarque une fossette oblongue assez profonde entre la carène centrale et le bord extérieur; le côté intérieur porte une grosse dent partagée en deux dont la supérieure est la plus aiguë; l'une et l'autre plus marquées dans la mandibule gauche.

Le labre est avancé, échancré en arc de cercle dans son milieu, avec les côtés arrondis.

L'épistôme, coupé droit au centre, a ses côtés prolongés en angles aigus. Les ailes sont arrondies, saillantes, elles atteignent presque l'extrémité des yeux.

Au delà du sillon transversal qui sépare l'épistôme du front, on

remarque plusieurs lignes élevées en forme de carènes très-distinctes dont deux, situées au centre, se rejoignent à leur extrémité antérieure et divergent, au contraire, à l'autre extrémité; des deux côtés de ces carènes centrales, on en distingue deux autres en arc de cercle, et entre ces dernières et les yeux, deux petites carènes anguleuses réunies en avant.

Le milieu de l'occiput est lisse, mais ponctué en arrière; il porte sur les côtés plusieurs rides ondulées bien marquées.

Le thorax est de moitié plus large que la tête, transversal, du double plus large que long, tronqué en avant, arrondi en arrière.

Le bord antérieur est coupé presque droit, très-légèrement sinué; les angles antérieurs sont avancés, arrondis à leur extrémité; les côtés sont arrondis, rebordés; les angles postérieurs sont à peine indiqués par une petite dent et par une interruption de la bordure latérale. Le bord postérieur, à peine prolongé, est arrondi, échancré devant l'écusson.

L'impression transversale est profonde, mais elle n'atteint pas le bord antérieur. La ligne longitudinale est bien marquée; elle dépasse à peine l'impression transversale antérieure et elle s'approfondit vers la base. Entre les angles postérieurs et la base, on remarque, de chaque côté du corselet, une impression profonde, triangulaire à la base, ayant au fond une ligne imprimée qui remonte obliquement jusque vers le milieu du corselet, mais plus près du centre que du bord extérieur. La base, elle-même, entre les impressions latérales, porte une série de petites fossettes allongées, dont les intervalles sont étroits et caréniformes.

L'écusson est large, cordiforme.

Les élytres sont en ovale subcylindrique, de la largeur du corselet au milieu, ayant leur plus grande largeur au premier tiers; convexes en dessus, arrondies à la base et à l'extrémité, sinuées sur les côtés. Elles portent neuf stries, bien marquées dans toute leur étendue et bordées au sommet de chaque élytre par une carène anguleuse qui est interrompue entre le milieu de la base du 1er intervalle et celle du 2^{e} et à la base de la 4^{e} strie et qui vient ensuite former l'angle huméral au-dessus du 6^{e} intervalle, lequel, en cet endroit, se relève en carène étroite. Toutes ces stries sont fortement ponctuées; les points deviennent moins distincts au dernier tiers et disparaissent au dernier quart. Le dernier intervalle, qui se prolonge depuis la base jusqu'à la suture, est couvert de granulations très-distinctes.

Les cuisses sont larges, comprimées, inermes en dessous; les tibias antérieurs sont larges, sillonnés en dessus : les deux digitations internes sont grêles et extrêmement longues, surtout la supérieure qui est de la même longueur que le tarse; l'inférieure est élargie et un peu recourbée vers son extrémité; extérieurement, le tibia porte à l'extrémité une digitation épaisse, fort longue et recourbée; au-dessus de celle-ci, on en remarque une autre de moitié plus courte et droite; enfin, un peu plus bas que le milieu du tibia, une forte dent triangulaire et aiguë. — Les tibias intermédiaires ne portent pas d'éperon extérieurement; ils ont, à leur extrémité, deux épines longues et assez épaisses; les tibias postérieurs ont deux épines terminales plus longues, plus grêles et plus aiguës à l'extrémité. — Les tarses ont leur premier article plus long que les deux suivants réunis : le 2e, le 3e et le 4e sont presque triangulaires; le 5e est plus étroit et plus long que le 4e; les tarses postérieurs sont proportionnellement beaucoup plus grêles et plus allongés.

M. de La Ferté m'a communiqué, sous le nom que j'ai conservé, deux exemplaires comme venant de la Plata. J'en ai vu un troisième, mais mutilé, dans la collection de M. Chevrolat.

G. SCAPTERUS. Dej.

(Fig. 16, 17 et 18.)

La languette est extrêmement large, arrondie sur les côtés et très-légèrement échancrée. Je ne suis point parvenu à distinguer les paraglosses dans les *Sc. Guerini* et *sulcatus*.

Les mâchoires sont larges, presque droites, arrondies à l'extrémité sans aucune trace de pointe ou de dent(1), pourvues intérieurement de soies très-nombreuses d'un jaune doré.

1. Sc. Guerini Dej. Spec. II, 472.

2. Sc. Longicollis. Putz. Mon. p. 138.

---

(1) Ce que j'avais d'abord pris pour l'extrémité des mâchoires était une réunion de poils collés ensemble.

3. Sc. Sulcatus.

Il diffère du *Sc. Guerini* en ce qu'il est un peu plus petit, plus étroit; brun, avec les mandibules plus foncées; mandibules plus arquées, portant chacune au milieu une double dent aiguë; tubercule de la tête plus prolongé en arrière, plus étroit; tête beaucoup plus rugueuse; corselet plus arrondi aux angles postérieurs; ses rebords latéraux et postérieurs plus fortement crénelés; sa surface parsemée de chaque côté de points plus nombreux; sur chaque côté, près du bord latéral, au milieu, on remarque une dépression lisse au fond; les élytres sont plutôt sillonnées que striées et les points sont plus gros.

1 ind. Communiqué par M. de La Ferté comme recueilli dans l'Inde boréale par M. Bacon.

G. BOHEMANNIA.

(Voy. fig. 66, 67 et 68).

Languette cachée derrière le 1er article des palpes labiaux, très-étroite, à peine plus large à la base qu'à l'extrémité où elle est tronquée et surmontée d'un long poil membraneux; les paraglosses sont beaucoup plus élevées que le corps de la languette, étroites, divergentes.

Mâchoires presque droites, arrondies à l'extrémité; le dernier article des lobes accessoires ne les dépasse point.

Palpes maxillaires à 1er article très-petit, triangulaire; le 2e gros, de moitié plus long que le suivant; celui-ci en triangle très-allongé; le dernier de même longueur, aminci aux deux extrémités, avec la pointe arrondie. — Le 3e article des palpes labiaux est long, droit, grossissant de la base à l'extrémité; le 4e, de moitié plus court, de même forme que le dernier des palpes maxillaires.

Le menton porte au milieu une dent large et arrondie; les lobes latéraux sont tronqués obliquement au-dessus et leurs côtés sont droits.

Mandibules de longueur moyenne, épaisses, portant deux carènes longitudinales, l'une extérieure, l'autre centrale.

Antennes courtes, épaisses, grossissant vers l'extrémité; le 1er article ayant presque la longueur des trois suivants réunis; les articles 5 à 10 sont transversaux.

Labre largement échancré avec ses côtés arrondis.

Epistôme tronqué, situé en arrière des ailes (rebords supra-mandibulaires) qui sont larges et arrondies.

Yeux paraissant peu saillants parce qu'en avant, ils sont recouverts, jusqu'à leur dernier tiers, par les rebords supra-antennaires et qu'en arrière, ils sont enchâssés dans un rebord de la tête.

Corselet transversal; angles postérieurs non saillants.

Elytres oblongues, tronquées à la base, moins cependant que dans la *Cliv. grandis,* sinuées à l'extrémité; les épaules saillantes mais non épineuses; toutes les stries bien marquées dans toute leur étendue.

Les cuisses antérieures sont comprimées; les tibias, sillonnés en dessus, sont digités; la digitation terminale est très-recourbée à l'extrémité. Les tibias intermédiaires sont larges, presqu'échancrés au-dessus de l'éperon qui est placé presqu'à l'extrémité.

B. Gigantea. Boh. (Cliv.) Ins. Caffr. n° 127.

Caffrerie. Je n'en ai vu qu'un seul ex. que M. Boheman a bien voulu me communiquer.

SYSTENOGNATHUS.

(Fig. 2, 3 et 4.)

Ligula parallelipipeda, basi subangustata, apice oblique truncata, utrinque bisetosa, paraglossis brevior; hisce contortis, apice planiore latioreque intus incurvato. Maxillæ longissimæ, tenues, arcuatæ, acutæ. Palpi maxillares art. 1° breviter triangulari; 2° longo, crasso, sinuato-arcuato; 3° præcedenti longitudine æquali, gracili, versus apicem incrassato; 4° dimidio breviore fusiformi apice subtruncato. Menti dens lobis lateralibus minor, acutus.

Mandibulæ breves, latæ, basi crassæ, apice parum arcuatæ, in medio foveolatæ, vix carinatæ.

Labrum magnum, porrectum, in medio late emarginatum.

Antennæ mediocres, versus apicem incrassatæ: art. 1° magno, arcuato; 2° brevi, angusto; 3° præcedente sesqui longiore; sequentibus subquadratis compressis.

Pronotum convexum, subquadratum.

Elytra elongato-oblonga, basi truncata, humeris prominulis den-

latis; striato-punctata; stria præscutellari brevissima in basi interstitii 2i.

Tibiæ anticæ latæ, apice intus spina latiore, externe digitatione brevi armatæ, et ad latera exteriora serrulatæ. Tibiæ intermediæ ecalcaratæ.

S. Porosus.

Niger, nitidus, ore, palpis antennisque brunneis; femoribus elytrorumque margine postico testaceis; verticis macula rotundata, alteraque infra humerum transversa obscure ferrugineis; capite pronotique margine antico posticoque grosse punctatis; pronotum subquadratum convexum, basi nec prolongata utrinque late foveata; elytris elongato-oblongis, striatis, striis subpunctatis, 2a ultra medium puncto majore impressa; tibiis anticis extus oblique carinulatis, margine externo 4-serrulato. — Long. 11. — El. 6. — Lat. 3 1/4 Mill.

Noir, avec les parties de la bouche, les antennes, les pattes, le bord extérieur des élytres, deux taches subhumérales et le sommet de la tête d'un brun plus ou moins clair.

Le labre, finement chagriné, est arrondi sur les côtés, non déprimé longitudinalement, largement échancré, bordé en avant par six gros points d'où sortent autant de poils droits; son centre et ses côtés sont d'un brun testacé.

L'épistôme est large, fortement rebordé, déprimé au centre, ce qui le fait paraître échancré; il dépasse les ailes qui sont très-peu marquées et se confondent avec les rebords supra-antennaires: ceux-ci atteignent à peine le milieu des yeux. L'élévation antérieure est peu saillante, bornée en arrière par un sillon transversal; elle porte cinq sillons longitudinaux profonds et peu réguliers. Au sommet de la tête, parsemé de gros points entremêlés de quelques rugosités, on voit une fossette centrale arrondie plus profonde postérieurement, et en avant de celle-ci, de chaque côté, deux autres fossettes larges et triangulaires; en arrière des yeux se trouve une impression transversale peu distincte et dont le centre est d'un brun rougeâtre.

Les yeux sont saillants et libres en arrière.

Le corselet est de moitié plus large que la tête, très-convexe, presque carré, légèrement rétréci en arrière; sa base n'est nullement prolongée; elle est coupée presque droit jusqu'aux angles posté-

rieurs. Les angles antérieurs sont presque droits avec leur extrémité arrondie; les côtés légèrement arqués jusqu'aux angles postérieurs qui sont obtus. — Le sillon transversal antérieur est à peine distinct : il est indiqué par quelques points irréguliers groupés surtout au milieu et vers le bord antérieur. Le sillon longitudinal est finement marqué. De chaque côté de la base, on remarque une fossette arrondie assez large et profonde; le bord postérieur est longé par quelques gros points qui ne dépassent guère les deux fossettes.

Les élytres sont d'un quart plus larges que le corselet, en ovale un peu allongé, légèrement sinuées avant l'extrémité; leurs épaules sont saillantes et terminées par une petite dent. — Les stries, finement ponctuées, sont bien marquées dans toute leur étendue; les six premières partent de la base; la 1re et la 2e se réunissent à l'extrémité; le 2e intervalle est élargi vers la base et porte la strie préscutellaire qui est très-courte; la 3e strie forme un crochet à son extrémité et vient toucher à la 2e un peu avant le point de réunion de cette dernière avec la 1re. La 8e strie, partant de l'épaule, est d'abord très-fortement élargie et très-profonde; au-delà du premier quart de l'élytre, elle redevient très-fine et porte au premier tiers un point arrondi assez large; elle va alors en s'élargissant jusqu'au dernier tiers où elle est alors fort rapprochée de la marge dont bientôt elle s'écarte brusquement se dirigeant obliquement vers l'extrémité de l'élytre qu'elle n'atteint cependant pas; dans son dernier tiers, cette 8e strie porte huit gros points du centre de chacun desquels s'élève un petit tubercule. La 2e strie porte, à son dernier tiers, un point enfoncé. — Un peu en dessous des épaules, les 6e, 7e et 8e intervalles sont occupés par une tache transversale, d'un brun ferrugineux, assez peu distincte. — Vers son extrémité, le bord marginal des élytres est d'un testacé brunâtre.

Les cuisses antérieures sont larges, sub-dentées à leur extrémité externe; les tibias portent, vers le bord extérieur, une petite carène oblique; intérieurement, au-dessus de l'échancrure, une longue épine un peu courbée et, à l'extrémité, une autre épine plus courte, mais plus large à sa base; à l'extrémité externe, se trouve une digitation épaisse, tronquée au bout; et portant elle-même deux épines obtuses; plus haut, le long du bord, on remarque quatre dents égales surmontées d'une épine obtuse.

Les tibias intermédiaires sont épineux extérieurement, mais non éperonnés.

Le 1er article des tarses antérieurs est large, en triangle allongé;

le 2e cordiforme, de moitié plus court que le 1er, mais presqu'aussi large; les 3e et 4e sont de moitié plus étroits; ce dernier est échancré au milieu; tous sont prolongés intérieurement et les deux premiers portent extérieurement une épine épaisse, courte et obtuse. — Les crochets sont grêles et longs; le paronychium est très-court et obtus.

Il y a des ailes sous les élytres.

M. Melly m'a donné jadis cet insecte comme venant de l'Inde intérieure, sans indication plus précise.

G. SCOLYPTUS.

(Voy. fig. 61-65,)

Mentum transversum, dente lato lobis lateralibus breviore, hisce rugosis, supra oblique subtruncatis denteque obtuso intus instructis.

Ligula lata, subcordata, antice carinata, supra subemarginata, pilum unum emittens; paraglossæ paulo breviores, angustæ, acutæ.

Maxillæ angustæ, arcuatæ, acutæ.

Palpi elongati. Labiales art. 2° brevissimo cordato; 3° sequente longiore, arcuato; 4° angustiore subcylindrico, basi apiceque attenuato. *Maxillares* art. 1° brevi; 2° lato sequentibus longitudine æquali; 4° eidem palparum labialium simili.

Antennæ compressæ, art. 1° sequentibus duobus paulo longiore, 2° 3°que longitudine subæqualibus, 5-10 subglobosis.

Caput latum, convexum.

Mandibulæ longæ, angustæ, arcuatæ, acutæ, supra planæ, carina interiore denteque basali obtuso instructa.

Labrum latum, antice bisinuatum, utrinque basi puncto unico impressum.

Clypeus bisinuatus, alis anterioribus prominulis, divergentibus, alis posticis cohærentibus, hisce oculos fere superantibus.

Pronotum convexum, quadratum, angulis anticis prominulis, posticis vero nullis, basi parum prolongata.

Elytra cylindrica, punctato-striata, basi tuberculata, interstitio 8° ultra humerum prolongato, striola præscutellari longa, depressa.

Pedes breves. Femora antica ovata, compressa. Tibiæ latæ,

supra sulcatæ, extus longe digitate; intermediæ infra medium calcare longo, et apice spinis tribus recurvis armatæ.

1. S. Angustatus Dej. (Clivina) Spec. V, p. 499 n° 27. Putz. Mon. Cliv. n° 29.

Sénégal.

2. S. Curvidens. Laf. (Clivina) Rev. et Mag. de Zool. 1849.

Guinée portugaise.

J'en ai reçu de M. Stevens plusieurs exemplaires recueillis sur les bords du Nil-Blanc. J'en ai vu d'autres, venant du Kordofan, atteignant jusque 17 mill. de longueur.

3. S. Microphthalmus.

(Voy. fig. 61, 62, 63, 64 et 65.)

Il suffira de signaler les caractères qui distinguent cette espèce de la précédente.

Elle est moins grande (14 mill.); le corselet est encore un peu plus long, profondément échancré en avant; les côtés de la base sont moins prolongés; les angles antérieurs sont plus proéminents. La tête est plus large, beaucoup plus convexe, plus fortement rugueuse antérieurement. Les yeux sont plus petits, beaucoup plus enfoncés, et, par conséquent, nullement saillants. Les angles de l'épistôme sont beaucoup moins distincts; les ailes antérieures (rebords supra-mandibulaires) sont légèrement échancrées sur les côtés, tandis que chez le *S. curvidens* elles semblent être la continuation des rebords supra-antennaires; le 2e article des antennes est distinctement plus long que le 3e; la dent du menton est moins large et moins arrondie à son extrémité.

Afrique centrale.

G. MESUS. Chevrol.

Ann. Soc. ent. de Fr. 3e sér. t. VI (1858) pag. 317. et tom. VII (1859) Bull. p. 130.

Mentum transversum lobis lateralibus supra truncatis, dente medio emarginato brevioribus.

Ligula angustissima, basi subdilatata, apice truncata, pilo membranaceo perlongo instructa, paraglossis brevior.

Maxillæ angustæ, arcuatæ, apice acutæ.

Palpi maxillares articulo 2° longo, 3° præcedente breviore pyriformi, ultimo 2° longitudine æquali, angustiore, subfusiformi, apice imo truncato.

Antennæ breves, crassiusculæ, articulo 1° duobus sequentibus longitudine æquali, 2° tertio dimidio longiore, articulis 5-10 moniliformibus.

Mandibulæ quam in Clivinis longiores, tenues, arcuatæ, supra planæ, intus dente medio grosso instructæ.

Labrum latum, corneum, in medio depressum, postice tripunctatum, margine antico in medio prolongato, angulis lateralibus rotundatis.

Clypeus latissimus, truncatus, alis vix retractis prominulis.

Oculi non prominuli, antice margine supra-antennali obtecti.

Vertex nequaquam depressus, rugulosus.

Pronotum oblongo-quadratum angulis posticis non distinctis.

Elytra subcylindrica, fortiter striato-punctata, interstitiis basi tuberculatis.

Femora antica compressa; tibiæ latæ, læves, longe digitatæ; tibiæ intermediæ extus calcaratæ.

M. Rugatifrons. Chevr. loc. cit.

(Voy. fig. 42.)

Montevideo. — 2 ind.

G. SCHIZOGENIUS.

Ce genre renferme aujourd'hui les espèces suivantes :

A. Corselet uni-sillonné de chaque côté du sillon médian.

1. *S. pluripunctatus*. Lec. Proc. Philad. 1857, p. 82. (*simplex* Lec.) États-Unis.
2. *S. strigicollis*. Putz. Mon. p. 132. (Voy. fig. 38). Mexique et Colombie.
3. *S. canaliculatus*. Putz. Mon. p. 133 (*Leprieuri* Lap.) Cayenne.
4. *S. tristriatus*. Putz. Mon. p. 133. Mexique. (Voy. ci-après).
5. *S. capitalis*. Putz. nov. sp. Colombie.
6. *S. sulculatus*. Putz. Mon. p. 134. Colombie.
7. *S. lineolatus*. Say. (Cliv.) (*Sulcifrons*. Putz. Mon. p. 134) Etats-Unis.
8. *S. amphibius*. Hald. (*frontalis*. Lec. Cat. of Geod. col. p. 43.) États-Unis.
9. *S. gracilis*. Putz. Mon. p. 135, Colombie.
10. *S. apicalis*. Putz. nov. sp. (Voy. ci-après.) Amazone.
11. *S. impressicollis*. Putz. Mon. p. 135. Colombie.
12. *S. ferrugineus*. Putz. Mon. p. 135. (*Sulcatus* Lec.) Texas.
13. *S. crenulatus*. Lec. Proc. Philad. 1857, p. 82. États-Unis.
14. *S. depressus*. Lec. ib. Californie.
15. *S. xanthopus*. Brullé. (Cf. Putz. Mon. p. 136) Bolivie.

B. Corselet bi-sillonné de chaque côté du sillon médian.

16. *S. quinque-sulcatus*. Putz. nov. sp. (Voy. ci-après) Amazone.
17. *S. exaratus*. Putz. nov. sp. (Voy. ci-après) Brésil.

C. Corselet non sillonné latéralement.

18. *S. dyschirioides*. Putz. nov. sp. (Voy. ci-après) Amazone.

4. S. Tristriatus.

J'ai reçu de M. Sallé, qui les avait rapportés du Mexique, deux individus de cette espèce. Ils diffèrent quelque peu du type appar-

tenant à M. Chevrolat. Ce dernier est plus étroit; ses élytres sont plus arrondies en arrière; le corselet est un peu plus large en avant et plus plan.

5. S. Capitalis.

(Voy. fig. 40.)

Nigro-æneus, antennis, pedibus 4 posticis tibiisque anticis ferrugineo-brunneis, palpis antennarumque articulo primo testaceis. Clypeus tricornis, carina duplici elevatiore. Vertex pluri-sulcatus. Occiput crebre punctatum. Pronotum subquadratum, angulis anticis deflexis, trisulcatum, carinula marginali instructum. Elytra ovato-cylindrica, profunde punctato-striata, interstitiis 3° 5° atque 7° quinque-punctatis. Tibiæ anticæ extus longe bidigitatæ denteque superiore armatæ. — Long. 5 1/4. — El. 2 1/2. — Lat. 1 3/4 Mill.

Voisin du *S. tristriatus,* mais plus étroit; les élytres sont entièrement bronzées; les épaules sont plus arrondies, les stries plus distinctement ponctuées; les 3e, 5e et 7e intervalles ne portent que cinq points; le corselet est tout aussi convexe : ses angles antérieurs sont plus déprimés; les deux sillons de chaque côté du sillon central sont moins courbes, moins profonds à leur base; les dentelures de l'épistôme sont plus longues et les deux carènes divergentes situées en arrière de la dent du milieu sont beaucoup plus élevées que dans toutes les autres espèces; les deux carènes centrales du vertex sont moins parallèles; les rebords supra-mandibulaires (petites ailes) sont plus étroits et plus avancés; les rebords supra-antennaires sont plus fortement carénés au milieu; la dent supérieure des tibias antérieurs est plus longue et plus étroite.

1 ind. Carracas.

10. S. Apicalis.

Niger, elytris nigro-sub-æneis, palpis, antennis, pedibus 4 posticis, pronoti margine inflexo, elytrorum margine apiceque, ultimi segmenti abdominalis apice testaceis. Clypeus tricornis. Vertex pluri-sulcatus. Occiput punctulatum. Pronotum subquadratum basi angustatum, trisulcatum, carina marginali instructum. Elytra subcylindrica, apice angustata, profunde striata punctataque, inter-

stitiis convexis, 3°, 5° et 7° sexpunctatis. Tibiæ anticæ extus longe bidigitatæ denteque superiore armatæ. — Long. 3 1/4-4. — El. 2. — Lat. 1 Mill.

D'un noir brillant, légèrement bronzé sur les élytres qui ont le bord externe et l'extrémité testacés.

Les palpes, les antennes et l'extrémité des quatre derniers segments abdominaux sont également testacés.

Les antennes grossissent vers l'extrémité; elles sont presque moniliformes à partir du 6e article; les derniers articles portent une tache noire à leur sommet.

La dent centrale de l'épistôme est aussi avancée que les deux autres; les deux carènes divergentes dont elle est le prolongement sont moins écartées que dans les autres espèces; toutes les carènes du vertex sont plus nettes et plus régulières; l'occiput est finement ponctué.

Le corselet est plus allongé que dans les espèces voisines; les sillons placés de chaque côté du sillon central sont très-profonds, surtout à leur base; ils sont à peine arqués. Entre les angles antérieurs et postérieurs du corselet, règne une double carène obtuse, l'une marginale, l'autre intérieure.

Les élytres sont presque cylindriques, distinctement rétrécies à l'extrémité; leur surface est assez plane. Les stries diminuent de profondeur au dernier quart; leurs points sont moins distincts que chez les *S. quinque sulcatus* et *exaratus*; les 3e, 5e et 7e intervalles portent chacun six points pilifères. — Les cuisses antérieures sont brunes.

Des bords de l'Amazone. 12 ind.

16. S. Quinque sulcatus.

(Fig. 39.)

Niger, elytris nigro-æneis, palpis, antennis, pedibus, elytrorum margine apiceque atque ano testaceis. Clypeus tricornis. Vertex pluri-sulcatus. Occiput punctatum. Pronotum transversim quadratum basi angustatum, 5-sulcatum. Elytra oblonga apice angustata, profunde sulcata, grosse punctata, interstitiis convexis, 3°, 5° et 7° 5-punctatis. Tibiæ antice extus bidigitatæ denteque superiore armatæ. — Long. 3 1/4. — El. 2. — Lat. 1 Mill.

De la taille du *S. apicalis*. Les mandibules sont plus larges et plus courtes; les antennes sont moins longues et leurs derniers articles plus épais; la dent centrale de l'épistôme est moins avancée que les deux autres; elle n'est point unie aux deux carènes placées derrière elle; celles-ci sont très-écartées à leur base et sont interrompues avant d'atteindre l'épistôme, à peu près comme chez le *S. exaratus;* les carènes latérales du vertex sont moins régulières que dans l'*apicalis;* le derrière de la tête est plus fortement ponctué; le corselet est beaucoup plus large et plus court; des deux côtés des sillons latéraux, on en remarque deux autres tout aussi profonds, mais beaucoup plus courts; les élytres sont plus larges en avant, plus fortement ponctuées; les stries sont plus profondes à l'extrémité; il n'y a que trois points sur les 5e, 5e et 7e intervalles; les digitations et la dent des tibias antérieurs sont moins longues.

Amazone. 1 ind.

17. S. Exaratus.

Niger, elytris æneis; sutura pedibusque brunneis; palpis, antennisque ferrugineis. Clypeus tricornis. Vertex plurisulcatus, sulcis mediis subparallelis. Occiput punctatum. Pronotum convexum subquadratum, sulcis duobus utrinque instructum. Elytra oblongo-cylindrica; profunde striata, striis grosse punctatis. — Long. 4. — El. 2 1/2. — Lat. 1 Mill.

Les lobes latéraux du menton sont très-aigus; les mandibules sont courtes et très-larges à la base; les trois dents de l'épistôme sont placées sur la même ligne; celle du centre, au lieu d'être le prolongement de deux carènes obliques se réunissant à l'extrémité en angle aigu, en est ici isolée; les deux carènes sont beaucoup plus courtes que d'habitude, plus écartées et ont entre elles une petite carène transversale; les deux carènes du milieu de la tête sont les plus marquées et à peine divergentes en arrière. Le corselet est très-convexe, presque carré, peu arrondi sur les côtés; les deux sillons placés des deux côtés du sillon central sont profonds, peu arqués extérieurement, bordés en arrière par de nombreuses rides transversales; entre chacun de ces sillons et le bord, on en voit un autre beaucoup moins profond, situé à égale distance de la base et du bord antérieur et n'atteignant ni l'une ni l'autre. Les élytres sont presque cylindriques, rétrécies vers l'extrémité, avec les

épaules faisant saillie en forme de petite dent ; les stries sont profondes et très-fortement ponctuées : le 1er intervalle est déprimé à la base ; les 3e, 5e et 7e portent chacun de trois à cinq points ; les tibias antérieurs ont extérieurement deux digitations et deux dents ; la seconde de ces dernières est peu saillante.

Brésil. (Nouv. Fribourg) 1 ind.

18. S. Dyschirioides.

Subtus brunneus, pronoto elytrisque viridi-æneis, hisce extus atque apice testaceis. Clypeus tricornis, dente medio retracto. Vertex pluri-sulcatus in medio oblonge foveolatus. Pronotum convexum, transversim subquadratum, basi bi-impressum ; elytra ovato-elongata, postice angustata, striata, striis obsolete punctatis, interstitio 3° *bipunctato ; tibiæ anticæ extus bi-digitatæ denteque superiore armatæ.* — Long. 5. — El. 3 3/4. — Lat. 1 1/2 Mill.

La dent du menton est beaucoup plus courte que les lobes latéraux qui sont échancrés comme dans les *S. strigicollis ;* les mandibules sont plus larges, plus courtes, plus recourbées que dans cette espèce. L'épistôme est également tridenté ; mais la dent du milieu est située plus en arrière ; la carène bifurquée au bout de laquelle cette dent se trouve dans le *strigicollis* est ici beaucoup moins élevée ; les deux carènes centrales sont plus étroites, plus courtes et plus divergentes ; entre elles, on remarque une fossette allongée ; les autres carènes, situées entre les premières et les yeux sont également plus étroites ; les intervalles sont moins rugueux et le vertex n'est pas ponctué ; les yeux sont moins saillants. Le corselet est beaucoup plus large, plus convexe, plus dilaté en arrière ; ses angles postérieurs, indiqués par un point et un tubercule intérieur, ne sont nullement saillants ; on ne remarque aucune trace des sillons qui, dans les autres espèces, sont placés des deux côtés de la ligne longitudinale du centre ; seulement, des deux côtés de la base, on aperçoit une faible et courte impression.

Les élytres sont en ovale allongé, rétrécies à l'extrémité, striées comme dans le *S. strigicollis,* mais les points sont moins gros et disparaissent dès le milieu ; les intervalles sont moins relevés et le 3e seul porte deux points, l'un avant, l'autre après le milieu. Les tibias ultérieurs sont plus élargis que dans le *S. strigicollis.*

Amazone. 2 ind. (Coll. Chevrolat et Bates.)

C. Clivina.

Après que l'on a formé une douzaine de genres aux dépens des Clivines de Latreille, on reste en présence d'une sorte de résidu qui n'est rien moins qu'homogène, mais qu'il me paraît cependant impossible de diviser par des coupes génériques. Les caractères auxquels on attache, avec plus ou moins de fondement, une grande importance, semblent ici se jouer de l'observateur : la forme de la languette et de ses paraglosses, celle du menton, des palpes, des articles des antennes, la disposition des stries, la présence ou l'absence de dents aux cuisses antérieures ou d'éperons aux tibias intermédiaires, tout cela varie et se croise dans des insectes que personne ne songera à séparer les uns des autres. Tantôt, le devant de la tête présente plusieurs dents avancées comme dans le genre *Schizogenius;* tantôt l'occiput porte des proéminences presque cornues ; tantôt les yeux sont enchâssés en arrière dans un prolongement qui correspond à une profonde échancrure du corselet; mais ces singularités n'altèrent pas l'ensemble des signes qui caractérisent les Clivines.

J'ai donc été réduit à établir de simples groupes qui, à tout prendre, respectent assez bien les affinités naturelles et la répartition géographique des espèces.

Pour former ces groupes, je me suis servi de quelques caractères dont j'ai à dire quelques mots.

1° Les antennes sont, ou moniliformes et grossissant notablement vers l'extrémité, ou composées d'articles allongés. Dans le premier cas, il arrive assez souvent que les derniers articles sont comprimés et que, dès lors, ils paraissent allongés si l'on se borne à les regarder en dessus.

2° Les tibias intermédiaires portent extérieurement, un peu au dessus de leur extrémité, une dent ou épine en forme d'éperon, échancrée en dessous, — ou bien ils sont dépourvus de cet appendice.

3° Le 8e intervalle des stries des élytres se rétrécit à sa partie supérieure et y forme une carène élevée qui se réunit à la carène marginale, tantôt à l'épaule même ou même en dessous, tantôt en dessus de celle-ci et plus haut que le 6e intervalle.

4° Ordinairement, les stries se terminent brusquement à la base

des élytres; mais dans un certain nombre d'espèces, la 4e et la 5e sont réunies à leur base.

5° Sur le devant de la tête, on remarque de chaque côté deux rebords latéraux qui sont, le plus souvent, bien séparés l'un de l'autre et bien distincts de l'épistôme : le premier, qui protége la base des mandibules, je l'appelle *ailes* de l'épistôme. Il est le plus étroit. Tantôt, il est sur la même ligne que l'épistôme; tantôt, il y est intimement uni, mais le déborde; tantôt, il en est nettement séparé; tantôt enfin, il est situé en arrière de l'épistôme. Ce caractère est constant dans chaque espèce, mais j'avoue que, dans quelques espèces, il est parfois difficile à bien préciser; cependant ces cas sont assez rares pour que je n'aie pas dû renoncer à l'emploi d'un signe distinctif qui offre en général d'excellentes indications.

———

Le tableau qui suit est loin d'être complet; ce n'est qu'un essai tenté au moyen des éléments que j'ai en ce moment sous les yeux. Lorsque des espèces plus nombreuses auront pris place dans les diverses subdivisions, on verra mieux si les bases que j'ai adoptées doivent être conservées, modifiées ou abandonnées.

J'ai marqué d'un signe (?) quelques Clivines dont je n'ai pas pu vérifier tous les caractères et dont je n'ai assigné la place qu'en me guidant d'après l'analogie.

ANTENNES MONILIFORMES.

A. Tibias intermed. éperonnés.

1. 8e intervalle non prolongé au-dessus de l'épaule :

a. 4e et 5e stries non réunies à leur base.

1° Ailes sur la même ligne que l'épistôme.

Fosfor. L. (Mon. 45.)	
Collaris Hbst. (Mon. 16.)	
Ovipennis. Chd.	Caucase.
Ypsilon. Dej. (Mon. 29, v. inf. 1.)	Caspienne. / Eur. or.
Scripta Putz. (Mon. 78.)	Algér.
Grandis. Dej. (Mon. 1 et infra 2.)	Afriq.
Bohemanni. P. (Angustata Boh.) v. infra 3.	Caffr.

2° Ailes non séparées de l'épistôme, mais s'avançant un peu.	Mandibularis. Dej. (Mon. 2 et inf. 4.)	Sénég.
	Indica. Putz. (Mon. 4 et infra 5.)	Ind. mér.
	Senegalensis. Dej. (v. Mon. 8 et infra 6.)	Sénég.
	? Foveiceps. Putz. (Mon. 17.)	Sénég.
	? Sobrina. Dej. (v. Mon. 9.)	Sénég.
	? Dumolinii. Putz. (v. Mon. 6 et infra 6 *bis*.)	Sénég.
3° Ailes distinctement séparées, sur la même ligne que l'épistôme.	Memnonia. Dej. (Mon. 7.)	Java.
	Castanea. Putz. (infra 7.)	Ceylan.
4° Ailes reculées.	Urophthalma. Putz. (infra 8.)	Siam?
b. 4e et 5e stries réunies à la base.		
1° Ailes non écartées de l'épistôme.	Basalis Chd. (v. infra 9.)	Austral.
	Australasiæ Boh.	Austral.
	? Assamensis. Putz. (Mon. 3.)	Assam.
	? Testacea. Putz. (Mon. 30.)	Sénég.
	Extensicollis. Putz. (Mon. 28.)	Java.
	Ephippiata. Putz. Mon. 31 et inf. 10.)	Ind. or.
	Suturalis. Putz. (infra 11.)	Austral.
	Oblongicollis. Putz. (infra 12.)	Austral.
	Planiceps. Putz. (infra 13.)	Austral.
	Elegans. Putz. (infra 14.)	Austral.
2° Ailes écartées.	Bicornuta. Putz. (v. infra 15.)	Siam.
	Cribricollis. Putz. (v. infra 16.)	Siam?
II. 8e intervalle prolongé au dessus de l'épaule.	Lobata. Ron. (Mon. 26.)	Bengale.
	Humeralis. Putz. (infra 17.)	Ind. or.
	Stricta. Putz. (infra 18.)	Java.
	Anceps. Putz. (infra 19.)	Bengale.
B. Tibias intermédiaires non éperonnés.		
I. 8e intervalle non prolongé au dessus de l'épaule.		
1° Corselet ayant les côtés de la base coupés obliquement.	Vulgivaga. Boh.	Chine.
2° Corselet ayant la base arrondie.		
a. 4e et 5e stries réunies à la base.	Ferrea Lec.	Am. b.

	Fasciata. Putz. (Mon. 62 et inf. 20.)	Am. centr.
	Klugii. Putz. (Mon. 63.)	Am. centr.
	Sculptifrons. Putz. (Mon. 64.)	Am. centr.
b. 4e et 5e stries non réunies à la base.	Bipustulata F. (Mon. 51.)	Am. b.
	Cruciata. Chand. (1)	Mexique.
	Distigma. Chand. (2)	Mexique.
	Bisignata. Putz. (Mon. 57.)	Amér. bor. Cuba.
	Picca. Putz. (Mon. 58.)	Amér. bor.
	Stigmula. Putz. (Mon. 59.)	Texas.
	Striato-punctata. Dej. (Mon. 52.)	Amér. bor.
	Tuberculata. Putz. (Mon. 50.)	Bogota.
II. 8e intervalle prolongé au dessus de l'épaule.		
1° Ailes non séparées, avancées.	Melanaria, Putz. (Mon. 5 et inf. 21.)	Ind. or.
	Picipes Bon.?(Mon. 61. v. inf. 22.)	»
2° Ailes ayant leurs angles avancés en forme de dents.	Maculata. Nietn. (v. infra 23.)	Ceylan.
3° Ailes séparées de l'épistôme, non avancées.	Lernæa Schm. (v. infra 24.)	Grèce. Syrie.
	Americana. Dej. (Mon. 23.)	Amér. bor.
	Convexicollis. Putz. (v. infra 25.)	Ind. or.

ANTENNES SIMPLES.

A. Tibias intermédiaires éperonnés.

I. 8e intervalle non prolongé au dessus de l'épaule.		
a. 4e et 5e stries non réunies à leur base.		
1° Ailes sur la même ligne que l'épistôme.	Atrata. Putz. (v. infra 26.)	Austral.
2° Ailes reculées.	Fissipes Putz. (Mon. 37 et infra 27.)	Texas.
	Dentifemorata. Putz. (Mon. 39.)	Mexique.
	Armata. Putz. Mon. 40.)	Colombie.
	Corvina. Putz. (Mon. 41.)	Nouv. Orl.
	Dentipes. Dej. (Mon. 42.)	Amér. bor.
	Confusa. Lec.	Amér. bor.

(1. 2.) M. Sallé m'a envoyé sous ces noms des exemplaires de deux Clivines du Mexique très voisines de la *C. bipustulata*. Comme je suppose que M. de Chaudoir a l'intention de les décrire, je me borne à les signaler ici.

	Georgiana. Lec.	Amér. bor.
	Latimana. Putz. (Mon. 43.)	Colombie.
	Columbica. Putz. (Mon. 45.)	Colombie.
	Laticeps. Putz. (Mon. 47.)	Colombie.
	Dissimilis. Putz. (Mon. 48.)	Colombie.
5. 4e et 5e stries réunies à la base.		
1° Ailes avancées.	Hilaris. Putz. (infra 28.)	Amazone.
2° Ailes reculées.	Bidentata. Putz. (Mon. 46.)	Brésil.
	Longipennis. Putz. (infra 29.)	Amazone.
	Amazonica. Putz. (infra 30.)	Amazone.
II. 8e intervalle prolongé au dessus de l'épaule.	Foveilabris. Putz. (infra 31.)	Amazone.
1° Ailes un peu avancées.	Elongata. Chd. (Mon. 22.)	Cayenne.
2° Ailes reculées.	Javanica. Putz. (Mon. 52.)	Java.
	Parryi. Putz. (infra 32.)	Ind. or. N. Guinée.

B. Tibias intermédiaires non éperonnés.

8e intervalle prolongé.

Ailes et épistôme séparés.	Foveicollis. Putz. (infra 33.)	Chine.
	Bifoveata. Putz. (infra 34.)	Amazone.
	Natalensis. Putz. (infra 35.)	Natal.
	Caffra. Putz. (infra 36.)	Natal.
	Obesicollis. Putz. (infra 37.)	Celebes.
	Mordax. Putz. (infra 38.)	Bengale.

1. C. Ypsilon. Dej. Putz. Mon. Cliv. p. 77.

Cet insecte a été trouvé en Autriche, sur les bords du Neusiedlersee par M. Miller auquel on doit déjà de si belles découvertes.

M. Kolenati (Melet. ent. p. 22) croit que la *C. ypsilon* pourrait n'être qu'une variété de la *C. collaris*. Je ne puis me ranger à cet avis. La *C. ypsilon*, qui est constamment d'un brun testacé uniforme, a le corselet un peu plus allongé, moins convexe, avec les angles antérieurs beaucoup moins déprimés; les élytres sont plus allongées, plus cylindriques et leur base est tronquée.

2. C. Grandis Dej. Putz. Mon. Cliv. p. 65.

(Voy. fig. 57.)

Cette espèce paraît être répandue sur presque tout le conti-

nent africain. J'en ai vu un exemplaire venant d'Égypte; j'en possède du Sénégal, de l'Afrique intérieure et du Port Natal.

L'échancrure des lobes latéraux du menton n'est point un caractère constant.

3. C. Bohemanni (Angustata) Bohem. Ins. Caffr. n° 129.

Cette espèce, dont M. Boheman a bien voulu me communiquer l'individu typique, est très-différente de la *C. angustata* Dej. Bien qu'elle puisse, à la rigueur, conserver le nom sous lequel M. Boheman l'a décrite, l'insecte de Dejean devant rentrer dans un nouveau genre, (*Scolyptus*), je crois que pour éviter toute confusion, il vaut mieux lui assigner un nouveau nom et je propose celui de *C. Bohemanni*.

Elle se distingue de la *C. grandis*, (dont elle se rapproche beaucoup), par sa coloration — par sa taille — par ses élytres un peu plus allongées et surtout moins convexes; — par son corselet plus long et un peu plus large antérieurement; — par le sommet de la tête qui est moins rugueux; —par l'épistôme dont les ailes sont moins distinctement séparées des rebords supra-oculaires; — par le labre à peine échancré; — et surtout par les mandibules qui sont plus épaisses, à peine carénées au dessus, plus courtes; leur extrémité est très-obtuse et le côté intérieur n'est point échancré; — enfin par les dents externes des tibias antérieurs qui sont moins développées que chez la *C. grandis*.

L'examen d'un certain nombre d'individus fera connaître si ces différences sont constantes et ne sont pas seulement accidentelles.

4. C. Mandibularis. Dej. Putz. Mon. Cliv. p. 66.

(Voy. fig. 58.)

Cette clivine paraît être beaucoup plus localisée que la *grandis;* elle est plus étroite; l'épistôme n'est pas échancré en demi cercle comme chez cette dernière, il est coupé droit; la carène semi-circulaire du milieu forme un angle obtus; les côtés de l'épistôme et l'espace entre les yeux et le vertex sont pluri-sillonnés; à peine remarque-t-on quelques petits points vagues; l'impression antérieure du corselet, qui est ponctuée dans la *C. grandis*, ne l'est point chez la *mandibularis*.

5. C. Indica. Putz. Mon. Cliv. p. 67.

C. Rugosifrons. Nietn. Entomol. papers (Colombo 1856) n° 1, p. 50.

En 1845, je n'avais vu que deux individus de cet insecte; depuis, j'en ai rencontré dans presque toutes les collections. M. Nietner m'en a envoyé plusieurs de Ceylan où il est assez commun sous les bouses de vache desséchées.

6. C. Senegalensis. Dej. Putz. Mon. Cliv. p. 71.

Toute la surface du corselet est très-finement et vaguement ponctuée.

6*bis* C. Dumolinii. Putz. Mon. Cliv. p. 69.

A la 3e ligne de la description, au lieu de : *ses angles sont aigus et proéminents; ses ailes un peu plus reculées et arrondies*, il faut lire : ses ailes sont aiguës et proéminentes, presque bidentées; les ailes postérieures (rebord supra antennaire) un peu plus reculées et arrondies.

7. C. Castanea.

Elongata, castanea, nitida; clypeus emarginatus lateribus bidentatis (seu in medio truncatus angulis acute prominulis) : vertex rugosus foveolatus. Pronotum subquadratum. Elytra cylindrica, punctato-striata, stria 3a quadripunctata. Tibiæ anticæ sulcatæ, extus unidigitatæ atque bidentatæ; intermediæ calcaratæ. — Long. 7. — El. 4. — Lat. 1 1/2 Mill.

D'un brun clair brillant; la partie antérieure de la tête et l'extrémité des cuisses sont brunes; les palpes, les premiers articles des antennes, les quatre pattes postérieures ainsi que les cuisses antérieures sont testacés.

La dent du menton est aussi élevée que les lobes latéraux; elle forme un angle aigu et a l'extrémité obtuse; au centre elle porte une carène oblongue élevée qui n'atteint pas les bords; les lobes latéraux, du double plus larges, sont presqu'arrondis.

Les antennes grossissent vers l'extrémité ; leur 1er article est gros, cylindrique, d'un tiers plus long que le 2e qui est, à son tour, d'un quart plus long que le 3e ; les articles 5 à 10 sont à peu près carrés.

Les mandibules sont courtes, larges, rebordées extérieurement et assez planes vers la base. Le labre est bisinué en avant, arrondi sur les côtés, presque partagé dans son milieu par une large fossette qui disparaît avant le bord antérieur. L'épistôme est tronqué, un peu déprimé au milieu et fortement rebordé ; ses angles sont proéminents, assez aigus, traversés par une carène oblique qui forme un petit tubercule à son extrémité ; les ailes sont situées en arrière, très-petites et forment un angle très-obtus ; les rebords supra-antennaires ne dépassent pas le milieu des yeux qui sont très-saillants. — Le vertex porte au centre une fossette allongée et profonde dont les bords sont rugueux de même que toute la partie antérieure de la tête. L'élévation antérieure porte, de chaque côté, un petit tubercule arrondi et lisse. Le sillon qui sépare la tête du col est ponctué vers les côtés ; le col lui-même porte latéralement quelques gros points.

Le corselet est de moitié plus large que la tête, en carré transversal. Les angles antérieurs sont déprimés, droits avec l'extrémité obtuse ; les côtés sont légèrement dilatés extérieurement ; les angles postérieurs sont saillants, mais non aigus ; les côtés de la base sont prolongés en arc de cercle. — La ligne transversale antérieure n'atteint le bord à aucune de ses extrémités ; elle est presqu'interrompue, de chaque côté, à quelque distance du sillon longitudinal ; celui-ci, qui ne dépasse pas la ligne transversale, est profond dans toute son étendue. La surface du corselet porte dans son milieu quelques lignes ondulées et quelques très-petits points vaguement parsemés ; des deux côtés de la base, on voit deux sillons très-peu profonds dont l'extrémité se prolonge, mais fort indistinctement, jusqu'à l'extrémité antérieure ; en face de chacun des angles postérieurs se trouve un gros point arrondi.

Les élytres sont allongées, cylindriques, avec les épaules anguleuses et l'extrémité rétrécie ; elles sont striées ponctuées et la 3e strie porte quatre points plus gros. Le 7e intervalle se joint, à l'épaule, au bord marginal ; le 5e vient également aboutir à ce point. Les 2e et 3e intervalles ont leur base dilatée en forme de petit tubercule noirâtre.

Les tibias intermédiaires sont éperonnés.

Cette espèce est voisine de la *C. javanica* dont elle diffère prin-

cipalement par la taille, par la couleur, par les impressions de la tête, par son corselet plus court et moins rétréci en avant, par ses élytres plus cylindriques et dont les épaules sont beaucoup moins arrondies, par ses cuisses antérieures moins larges, par ses antennes grossissant davantage vers l'extrémité et dont les articles sont plus courts, par les lobes latéraux du menton qui sont simplement arrondis et nullement échancrés à leur sommet.

Ceylan et Nouvelle-Guinée. 2 ind.

8. C. Urophthalma.

(Fig. 52 et 53.)

Ferruginea, capite pronotoque nigro-brunneis. Clypeus angulatim excavatus, angulis prominulis. Vertex foveolatus. Oculi prominuli caudati. Pronotum elongato-subquadratum, margine antico ad oculos angulatim profunde emarginato. Elytra elongato-cylindrica, punctato-striata, interstitio 3° 5-punctato. Femora antica dentata. Tibiæ anticæ nec sulcatæ, sed supra carinatæ, extus bi-digitatæ unique-dentatæ, intermediæ breviter calcaratæ, unguiculi parvi, paronychio illis breviore, acuto, gracili. — Long. 7. — El. 3 1/2. — Lat. 1 1 3 Mill.

La languette, anguleuse au sommet, dépassée par ses paraglosses, est entièrement cachée derrière la dent du menton. Celle-ci forme, à son extrémité, un angle aigu ; les lobes latéraux, de même hauteur, arrondis au sommet, creusés au centre, sont coupés droit sur les côtés. Le dernier article des palpes est tronqué à l'extrémité ; le pénultième des palpes maxillaires est des trois quarts plus court que le dernier, qui est dilaté intérieurement au milieu. — Les mandibules sont assez courtes, larges, peu aiguës. — Les antennes grossissent vers l'extrémité ; leur 2e article est de moitié plus long que le 3e ; les articles 5 à 10 sont moniliformes. — Le labre est arrondi et un peu avancé au centre. L'épistôme est angulairement échancré en avant ; ses angles sont saillants et droits ; il est plus avancé que les ailes dont le bord antérieur est coupé droit. L'élévation antérieure est largement déprimée au centre ; le 1er sillon transversal est profond et droit ; un peu en arrière, s'en trouve un second plus inégalement arqué ; sur le vertex, une fossette large et profonde des deux côtés de laquelle on remarque deux

autres impressions irrégulières. Le derrière de la tête porte quelques gros points. Les yeux présentent un caractère fort singulier : le rebord latéral dans lequel ils sont enchâssés, disparaît, sauf sur un seul point où il forme en arrière des yeux et y adhérant, un tubercule très-saillant et pointu. Comme la tête est profondément enfoncée dans le corselet, ses mouvements eûssent été rendus impossibles par le prolongement des yeux, s'il n'y avait point été pourvu par une échancrure dans le bord antérieur du corselet. —

Le corselet est allongé, à côtés parallèles; les côtés de la base sont très-régulièrement arrondis ; le bord antérieur est coupé droit jusque derrière les yeux : là, il est profondément échancré angulairement; les angles antérieurs sont très-proéminents; les angles postérieurs ne sont point distincts.

Les élytres ne sont pas plus larges que le corselet, longues, cylindriques, tronquées à la base, fortement ponctuées-striées; le 3e intervalle porte cinq points enfoncés. Les intervalles externes sont étroits et en carène. Le 6e se réunit à l'épaule au bord marginal. Aucune des stries ne touche à la base.

Les cuisses antérieures sont larges, avec une grosse dent placée à l'extrémité du bord externe. Les tibias sont légèrement carénés en dessus; ils ont extérieurement deux digitations fort longues et obtuses, et au dessus, une dent peu aiguë. Les tibias intermédiaires sont munis d'un éperon court.

M. Stevens m'a envoyé trois individus comme venant de l'Amazone; je suis porté à croire que la patrie de l'insecte est Siam.

9. C. Basalis. Chaud. Bull. Mosc. 1843, p. 733.

Ce n'est que depuis la publication de ma Monographie des Clivines que j'ai pu examiner cet insecte. Outre les caractères généraux, très-bien indiqués dans la description de M. de Chaudoir, je crois devoir signaler les suivants :

Les trois lobes du menton sont arrondis en dessus, les latéraux plus élevés et du double plus larges que celui du milieu. Le dernier article des palpes maxillaires est très-allongé; le même des palpes labiaux est plus court et dilaté au milieu. Les antennes sont courtes et atteignent à peine les angles postérieurs du corselet; elles grossissent vers l'extrémité et sont moniliformes à partir du 5e article; le 1er est le plus gros, cylindrique, aplati au dessus; le 2e est plus

court, plus étroit, à peine un peu plus large à l'extrémité qu'à la base; le 3e est plus court que le 2e, en triangle allongé; le 4e est plus court que le 3e, triangulaire. L'épistôme est largement échancré, ses ailes sont avancées et très-arrondies. Le sommet de la tête, qui porte une fossette peu marquée, est couvert de petits points peu rapprochés les uns des autres. Les angles postérieurs du corselet, quoique peu marqués, sont cependant distincts; les côtés de la base sont coupés obliquement et la base elle-même est tronquée. Le dessous du corselet est chagriné; l'abdomen est lisse. Les pattes antérieures ont les cuisses très-larges, comprimées; les tibias sont sillonnés; au dessus de la digitation terminale, on remarque une forte dent latérale et une très-légère trace d'une dent plus petite et assez obtuse. Les tibias intermédiaires portent un fort éperon incliné.

L'épine terminale est de la longueur des crochets qui sont grêles.

10. C. Epihippiata. Putz. Mon. Cliv. n° 31.

Cette espèce est extrêmement voisine de la *C. basalis* Chaud. Elle diffère de cette dernière par sa taille plus petite, ses élytres plus étroites et plus allongées, ses mandibules un peu plus aiguës; l'absence d'une fossette sur le vertex; le corselet un peu plus allongé et dont les fossettes latérales sont moins marquées et plus droites. Au dessus de la digitation terminale des tibias antérieurs, il s'en trouve une seconde notablement plus longue que celle qui existe chez la *C. basalis;* la dent latérale supérieure est plus étroite et plus aiguë. La coloration est la même, sauf que la tache noire, au lieu d'occuper toute la partie postérieure ne dépasse pas le 6e intervalle et n'atteint pas l'extrémité.

J'en ai vu un individu de Macassar. J'en possède deux que j'ai reçus de M. Stevens comme venant des Iles Célèbes.

11. C. Suturalis.

Nigra, nitida, ore, antennis pedibus elytrisque testaceo-ferrugineis; hisce plaga suturali nigra ornatis. Clypeus truncatus angulis elevatis prominulis. Vertex depressus, punctatus. Pronotum subelongato-quadratum, punctatum, basi utrinque longitudinaliter im-

pressum. Elytra elongata subcylindrica, profunde punctato-striata. Tibiæ anticæ extus obtuse bidentatæ. — Long. 6.— El. 3.—Lat. 1 1/3 Mill.

La dent du menton est courte, obtuse; les lobes latéraux sont beaucoup plus élevés, très-régulièrement arrondis au sommet. Le dernier article des palpes labiaux est fusiforme, plus renflé au milieu que dans les autres espèces de l'Australie. Les mandibules sont très-courtes et obtuses. Les antennes sont courtes, moniliformes à partir du 5e article. — L'épistome est presque tronqué, rebordé; ses angles se relèvent en forme de dents saillantes; les ailes sont à peine distinctes des rebords supra-antennaires. Le vertex est aplati au centre, irrégulièrement fovéolé et ponctué; les carènes longitudinales des deux côtés de la tête sont très-nettes et droites; elles ne s'élargissent point vers leur naissance.

Le corselet est un peu plus long que large; ses côtés sont parallèles; les angles antérieurs, légèrement arrondis, sont très déprimés; les angles postérieurs ne sont indiqués que par l'interruption du rebord marginal et par un point pilifère placé à l'intérieur; toute la surface (sauf les bords) est parsemée de points assez gros qui sont plus forts et plus nombreux des deux côtés des fossettes basales; celles-ci sont oblongues, assez larges, mais peu profondes.

Les élytres sont de la largeur du corselet, allongées; leurs côtés sont presque parallèles; la base semble tronquée et l'extrémité est arrondie; elles sont fortement striées-ponctuées, et la 3e porte quatre points plus gros. La strie préscutellaire est oblique et courte. La suture est occupée par une tache d'un brun noir qui, dès la base, prend le 1er intervalle, et s'élargit après le 1er quart sans dépasser le 3e intervalle.

Australie (Port Philippe) 1 ind.

12. C. Oblongicollis.

(Fig. 39.)

Nigra, nitida. Menti dens elevatus hastatus; lobi laterales oblique truncati. Antennæ breves, moniliformes. Labrum obtuse tridentatum. Clypeus truncatus alis prominulis rotundatis; vertex lævis. Pronotum elongatum, postice dilatatum, basi vix prolongatum. Elytra angustata, oblonga, sulcata, sulcis postice foveolatis. Tibiæ

anticæ sulcatæ, extus bidentatæ; intermediæ calcaratæ. Abdominis segmenta lateraliter punctata. — Long. 11. — El. 6. — Lat. 2 1/4 Mill.

Noire, palpes ferrugineux; mandibules, antennes et pattes brunes, l'extrémité de chaque article des antennes noire.

Lobes latéraux du menton tronqués obliquement au sommet; dent du milieu plus élevée qu'eux, large, en fer de lance. Palpes courts, presque tronqués au bout. — Mandibules larges, planes, recourbées, aiguës à l'extrémité; leur dent est noire. — Antennes courtes, moniliformes à partir du 3e article. — Labre bisinué, son centre un peu avancé, ses angles arrondis; il porte cinq gros points; trois au centre et un de chaque côté. — L'épistôme est largement, mais peu profondément échancré; ses angles sont obtus. Le premier lobe des ailes (rebord supra-mandibulaire) est peu marqué; le deuxième, qui est lisse, est large et atteint presque l'extrémité des yeux : ceux-ci sont assez profondément enchâssés en avant et en arrière. — Le sillon transversal situé avant le vertex est très-profond et lisse; l'élévation en demi-cercle entre ce sillon et l'épistôme est comme échancrée en avant par deux fossettes qui se réunissent au milieu. — Le vertex est tout-à-fait lisse; on y distingue cependant, mais avec peine, quelques légères traces de dépressions arrondies. — La tête est séparée du col par un sillon très-marqué et lisse.

Le corselet est presqu'entièrement ovale, un peu plus large en arrière qu'en avant; ses angles très-déprimés ne sont visibles que de côté et le font paraître aussi arrondi en avant qu'en arrière. Le bord antérieur est à peine sinué, les côtés sont presque droits (vus de dessus, ils paraissent arrondis); le bord postérieur est très-peu prolongé; les angles antérieurs, fortement déprimés, sont obtus; les angles postérieurs ne sont marqués qu'intérieurement par un point enfoncé et un tubercule saillant. Le sillon longitudinal est profond, sauf à la base; il dépasse un peu le sillon transversal qui, très-profond et très-large, est presqu'interrompu au milieu et porte quelques gros points enfoncés. De chaque côté de la base, on voit une impression assez large, mais très-peu marquée.

Les élytres sont de la largeur du corselet, en ovale très-allongé; les épaules sont arrondies; l'extrémité est peu rétrécie et non sinuée. Elles présentent six sillons dont le fond est ponctué; tous partent de la base, mais aucun n'atteint l'extrémité; ils aboutissent au 7e intervalle qui, longeant le bord marginal de l'élytre, va se

réunir au premier; tous les intervalles s'épaississent vers l'extrémité où chacun d'eux porte cinq ou six fossettes arrondies. Entre le 7e intervalle et le bord marginal, on voit une ligne élevée et une rangée de points granulés. Le bord réfléchi de chaque élytre porte cinq ou six gros points vers la base.

Les tibias antérieurs sont bisillonnés en dessus; les digitations de l'extrémité sont médiocrement allongées et assez épaisses; extérieurement, on voit deux grosses dents. Les tibias intermédiaires sont éperonnés.

La pointe sternale est spatulée, canaliculée avant son extrémité qui est plane et arrondie.

Australie. 1 ind.

13. C. Planiceps.

(Fig. 43.)

Nigra, nitida, palpis, antennis pedibusque ferrugineis. Mens dente lato, rotundato, canaliculato, lobis lateralibus duplo latioribus, rotundatis. Antennæ breves, ab articulo 5° moniliformes. Mandibulæ longæ, arcuatæ, angustæ, acutæ, rugosæ. Clypeus truncatus, alis prominulis divergentibus. Vertex planus, rugosissimus-oculi prominentes. Pronotum elongato-quadratum, basi subprolongatum, angulis posticis nec prominulis, punctulis adspersum. — Elytra subcylindrica, ultra medium paulo latiora, profunde striata, striis punctatis, interstitio 3° quadripunctato. — Pedes breves. Femora antica lata, subtus subdentata; tibiæ supra sulcatæ, late digitatæ atque grosse bidentatæ; intermediæ ultra medium calcaratæ. Long. 14-16 1/2. — El. 7-8 1/2. — Lat. 2 3/4-3 3/4 Mill.

D'un noir brillant; les palpes, les antennes et les quatre pattes postérieures ferrugineux.

La dent du menton est large, arrondie, creusée à son extrémité; deux longs poils de chaque côté de la base; les lobes latéraux sont du double plus larges que la dent centrale, régulièrement arrondis, rebordés, creusés et sillonnés au centre.

La languette est oblongue, un peu plus étroite vers son sommet où elle est arrondie; son centre est échancré et surmonté d'un long poil. Les paraglosses, presque linéaires, sont un peu moins élevés que la languette.

Les mâchoires sont assez larges, fortes et moins courbées que d'habitude dans ce genre. Les palpes ont leur dernier article tronqué; le pénultième article des palpes maxillaires n'est que de moitié plus court que le dernier.

Les antennes sont courtes et dépassent à peine le milieu du corselet; elles grossissent et sont moniliformes à partir du 5e article. Le 2e et le 3e sont d'égale longueur.

Les mandibules sont longues, arquées, larges, planes à la base, relevées vers l'extrémité, rugueuses dans toute leur étendue.

Le labre est large, bisinué à sa partie antérieure, 5-ponctué supérieurement.

L'épistôme est tronqué; il est fortement débordé par ses ailes qui sont larges et tronquées obliquement; l'élévation antérieure est sémi-circulaire; aucun sillon transversal distinct ne la sépare du vertex. La tête est plane; toute sa surface est couverte de rugosités assez serrées et très-marquées; on voit deux sillons longitudinaux larges et profonds des deux côtés de l'élévation antérieure et, entre les yeux, une fossette que les rugosités rendent peu distincte.

Les yeux sont saillants, mais recouverts jusqu'au devant de leur milieu par le rebord supra-antennaire. Le corselet est en carré allongé, à peine rétréci en avant. Le bord antérieur est largement échancré; les angles antérieurs sont arrondis; les angles postérieurs ne sont indiqués que par un point intérieur; la base est à peine prolongée; l'impression transversale antérieure est très-rapprochée du bord; des deux côtés de la base, en face des angles postérieurs, on remarque une fossette un peu arquée, assez courte, mais profonde; la surface porte des rides transversales ondulées peu serrées et peu marquées et des points parsemés que l'on n'aperçoit qu'à l'aide d'une forte loupe.

Les élytres sont du double plus longues, mais pas plus larges que le corselet, presque cylindriques, s'élargissant un peu vers le dernier tiers, assez convexes, surtout vers l'extrémité, un peu déprimées au centre à la hauteur du premier point. Les épaules sont peu déprimées. Les stries sont ponctuées et bien marquées; la 3e porte quatre gros points dont les trois derniers sont situés dans la moitié postérieure; les premiers intervalles sont un peu plus convexes que les autres. — La tête est très-rugueuse en dessous; chaque segment de l'abdomen porte deux gros points.

Les pattes sont courtes et robustes; les cuisses antérieures, fort larges et ridées, ont à leur extrémité antérieure une petite dent

assez peu distincte. Les tibias antérieurs, fortement sillonnés, portent extérieurement une digitation large, mais assez courte, et au dessus, deux dents, dont la supérieure est très-obtuse. Les tibias intermédiaires, courts, denticulés au côté externe, portent un fort éperon assez allongé.

Australie (Melbourne) 5 indiv.

14. C. Elegans.

Nigra, nitida, palpis tarsisque testaceis; labro, antennis pedibusque brunneis. Clypeus truncatus, alis angulatim prominentibus. Pronotum planiusculum, oblongo-subquadratum, antice angustatum, a basi rotundatum, angulis posticis nec prominulis. Elytra elongato-oblonga, punctato-striata, interstitio 3° quadripunctato. Tibiæ anticæ sulcatæ extus fortiter bidentatæ; intermediæ calcaratæ. — Long. 15. — El. 8. — Lat. 4 Mill.

La dent du menton est large, creusée à l'extrémité de manière que, vue de face, elle paraît bifide, tandis que réellement elle forme un angle ouvert. Les lobes latéraux, assez écartés de la dent centrale, sont beaucoup plus élevés qu'elle, coupés obliquement sur leur côté interne, arrondis au sommet et extérieurement.

Le corps de la languette est étroit, acuminé et surmonté d'un long poil à l'extrémité. La partie membraneuse dépasse un peu la partie cornée; elle est tronquée à l'extrémité. — Les paraglosses, étroites et divergentes, sont de la même hauteur. Les antennes sont courtes, assez épaisses, grossissant de la base à l'extrémité, moniliformes à partir du 5e article.

Les mandibules sont courtes, larges, surtout à la base, assez fortement arquées, peu aiguës à l'extrémité.

Le labre est tronqué en avant, mais la dépression qui existe au centre le fait paraître légèrement échancré au milieu. Ses angles sont arrondis.

L'épistôme est très-légèrement sinué, intimement uni à ses ailes qui débordent fortement en angle aigu dont la pointe est obtuse; ces ailes sont, moins que d'habitude, séparées des rebords supra-antennaires. L'élévation antérieure porte, en arrière, un large sillon qui diminue un peu de profondeur au centre et sur les côtés. — Toute la tête est finement ponctuée. Sur le vertex, on remarque à peine une petite impression arrondie, et, un peu en avant, sur les

côtés, deux sillons transversaux qui se prolongent un peu en arrière. — Les yeux sont peu saillants, leur tiers postérieur est enchâssé dans le rebord latéral de la tête. — Le sillon qui sépare la tête du col est à peine marqué dans son milieu.

Le corselet est en carré plus long que large, rétréci en avant, très-arrondi aux angles postérieurs, peu prolongé en arrière; sa surface est peu convexe; le bord antérieur est largement échancré; les angles sont un peu proéminents; les côtés, coupés obliquement dans leur première moitié, sont régulièrement arqués jusqu'à la base; les angles postérieurs ne forment aucune saillie; on voit seulement un gros point intérieur, surmonté d'un tubercule qui ne dépasse pas le bord marginal. Le sillon transversal antérieur est assez rapproché du bord; le sillon longitudinal dépasse un peu le premier. Au milieu de chacun des côtés du corselet, en face des angles postérieurs, on voit un point assez large, mais peu profond, qui se prolonge en dessus en une ligne enfoncée plus marquée, droite et qui dépasse à peine le premier tiers du corselet.

Les élytres forment un ovale régulier très-allongé; en dessus, elles sont déprimées longitudinalement le long de la suture au tiers supérieur; les stries sont ponctuées, mais les intervalles ne sont pas relevés; le 3^{e} porte quatre gros points; la 1re strie se réunit à l'extrémité à la 2^{e}, la 3^{e} à la 4^{e} et la 5^{e} à la 6^{e}. C'est un prolongement très-étroit du 7^{e} intervalle qui se réunit à l'épaule au bord marginal; les intervalles 1-3 aboutissent seuls à la base. La strie préscutellaire, souvent très-longue chez les Clivines, est ici très-courte.

Les tibias antérieurs sont larges, sillonnés en dessus; extérieurement, ils ont une forte dent assez longue et, au dessus de celle-ci, une seconde dent courte et large. Les tibias intermédiaires sont larges, épineux le long du bord postérieur qui est éperonné.

En dessous, tout le corps est couvert de rides transversales ondulées, parsemées de points assez écartés les uns des autres.

Australie. 1 ind.

15. C. Bicornuta.

Ferruginea. Clypei alæ acutæ. Vertex excavatus, punctatus, tuberculisque 2 posticis instructus. Pronotum elongato-quadratum, angulis anticis prominulis, utrinque sulco lato punctatissimo antice bifurcato. Elytra cylindrica, punctato-striata, interstitio tertio

4-punctato. Tibiæ anticæ bidigitatæ atque unidentatæ; intermediæ longe calcaratæ. Unguiculi minuti, graciles, paronychio parvo, acuto. — Long. 5. — El. 3. — Lat. 1 Mill.

La dent du menton est large, un peu échancrée à l'extrémité, beaucoup plus courte que les lobes latéraux. Les palpes sont courts : leur dernier article, du double plus long que le précédent, est conformé comme dans le *G. Dyschirius*, c'est-à-dire élargi intérieurement dans sa moitié inférieure, acuminé à l'extrémité.

Les antennes atteignent presque les angles postérieurs du corselet; elles grossissent vers l'extrémité : leur 2e article est de près du double plus long que le 3e; les articles 5 à 10 sont moniliformes. — Les mandibules sont courtes et assez planes. — Le labre est grand, élargi en avant, échancré au centre, avec ses angles largement arrondis et ses côtés bordés de poils recourbés en avant. — L'épistôme est tronqué; ses angles sont proéminents et surmontés d'un petit tubercule noir; les ailes, sur le même plan, forment un angle aigu; le rebord supra-oculaire n'est point, comme d'habitude chez les clivines, arrondi sur les côtés; il est tronqué en avant et coupé presque droit latéralement, de sorte qu'il offre un angle presque droit; la carène qui le traverse pour se prolonger derrière les yeux est très-saillante et à peine arquée.

L'élévation antérieure est brusquement élevée en arrière; elle porte dans son milieu un sillon transversal. Le sommet de la tête, fortement ponctué, est très-creusé; cette large fossette se relève en arrière des yeux où elle forme deux carènes du centre de chacune desquelles s'élève un tubercule ordinairement noir à l'extrémité.

Le corselet est en carré allongé, à peine rétréci en avant; la base peu prolongée; le bord antérieur largement échancré; les angles très-saillants, mais obtus; les côtés profondément sillonnés entre le premier point marginal et les angles postérieurs qui sont petits, mais bien marqués et accompagnés de deux points plus grands, plus profonds et situés plus loin des angles que d'habitude. — De chaque côté de la base part un sillon très-ponctué qui se divise à la hauteur des angles postérieurs et se prolonge jusqu'au sillon transversal antérieur.

Les élytres sont de la largeur du corselet, cylindriques; leur base est presque tronquée; les stries sont profondes et ponctuées; le 3e intervalle porte quatre gros points.

Les tibias antérieurs sont larges, fortement carénés au milieu,

bidigités et unidentés extérieurement; l'éperon des tibias intermédiaires est fort long.

Quelques individus sont d'un dixième plus petits que les dimensions indiquées. Ceux qui sont récemment transformés sont d'un testacé très-pâle.

Reçu de M. Stevens comme provenant des bords de l'Amazone. Je crois plutôt que cet insecte est originaire de Siam. — 6 ind.

16. C. Cribricollis.

Rufo-brunnea, palpis antennis, pedibusque dilutioribus. Clypeus emarginatus alis prominulis. Vertex foveolatus punctatusque. Pronotum quadratum punctulatum. Elytra elongato-oblonga, punctato-striata, interstitio 3° 4-punctato. Tibiæ anticæ planæ, extus unidigitatæ unique-dentatæ; intermediæ calcare gracili exteriore munitæ. — Long. 6. — El. 3. — Lat. 1 3/4 Mill.

La languette est pyramidale, surmontée d'un poil droit; ses paraglosses ne la dépassent point. La dent du menton est large, arrondie, carénée au centre, plus courte que les lobes latéraux qui sont tronqués au sommet et arrondis sur les côtés. Les palpes maxillaires ont leur 3e article triangulaire, des trois quarts plus court que le dernier qui est élargi intérieurement un peu avant son milieu. Les antennes grossissent de la base à l'extrémité; leurs articles 5 à 10 sont moniliformes. — Les mandibules sont très-larges, courtes et aiguës à l'extrémité. — Le labre est tronqué en avant, arrondi sur les côtés. L'épistôme est échancré au centre; ses ailes, arrondies, le dépassent notablement. L'élévation antérieure est arrondie; aucun sillon distinct ne la sépare du vertex; celui-ci, qui porte au centre une fossette oblongue, est parsemé de points plus gros en avant qu'en arrière. — Les yeux sont saillants.

Le corselet est carré; les angles antérieurs étant très-déprimés et les côtés de la base étant coupés obliquement, il paraît, vu de dessus, être hexagonal; toute sa surface, sauf les bords, est parsemée de points enfoncés.

Les élytres sont oblongues-allongées, subcylindriques, avec les épaules arrondies; elles sont striées fortement ponctuées. L'avant-dernier intervalle se réunit à l'épaule au bord marginal et la 4e strie vient aboutir à ce point par un crochet arrondi; la 3e strie touche à la base; le 4e intervalle est très-élargi à sa base; le 8e est coupé

obliquement près de l'épaule dont il est notablement écarté; le 3e porte quatre points très-distincts.

Les tibias antérieurs sont larges, aplatis en dessus; ils portent extérieurement une digitation et une forte dent. L'éperon des tibias intermédiaires est long, mais grêle.

Les crochets des tarses sont petits, plus courts que l'épine terminale.

2 individus reçus de M. Stevens comme provenant des bords de l'Amazone. — Probablement de Siam.

17. C. Humeralis.

Brunnea, elytris nigro-brunneis, antennis palpisque testaceis. Clypeus profunde emarginatus, angulis prominentibus; alæ a clypeo separatæ, subrotundatæ. Pronotum subconvexum, quadratum, angulis anticis depressis. Elytra cylindrica, profunde lateque striata, striis grosse punctatis; interstitio 3° 4-punctato. Pronotum subtus punctatissimum. Femora antica lata, compressa, subtus dentata. Tibiæ anticæ extus longe digitatæ denteque armatæ, intermediæ calcaratæ. — Long. 7. — El. 3 3/4. — Lat. 2 Mill.

Menton transversal; dent centrale longue, aiguë, portant sur toute sa longueur une carène aiguë fortement marquée; lobes latéraux divergents, leurs bords interne et externe arqués, formant un angle droit à leur réunion; la base de ces lobes porte une fossette large et profonde, et toute leur surface est couverte de rugosités longitudinales.

Mandibules larges, planes, peu aiguës si ce n'est à l'extrémité. Labre large, légèrement bisinué en avant. — Les antennes, atteignant presque les angles postérieurs du corselet, ont leurs articles 6-10 plus gros que les autres et presqu'arrondis. — Epistôme tronqué dans son milieu; ses angles très-avancés, aigus; les rebords mandibulaires (ailes) très-nettement séparés, divergents, presqu'aussi avancés que l'épistôme, presqu'arrondis, leur extrémité relevée en forme de bourrelet. L'élévation antérieure est lisse, bornée en arrière par un sillon profond; le vertex porte au milieu une fossette oblongue, peu profonde, vaguement ponctuée sur ses bords; en arrière des yeux, on remarque un sillon transversal.

Le corselet est plus long que large, à peine un peu dilaté en

arrière; le bord antérieur est bisinué; les angles antérieurs sont déprimés; la base est à peine prolongée; les angles postérieurs sont distincts; entre ces derniers et le point situé au quart du bord marginal, on voit, le long de ce bord, un sillon dont le fond est marqué de gros points alignés; à l'intérieur des angles postérieurs, se trouve une fossette arrondie et profonde.

Le sillon longitudinal est bien marqué, mais il ne dépasse point le sillon transversal; des deux côtés, sont épars des points assez nombreux.

Les élytres sont allongées, cylindriques, de la largeur du corselet, assez planes en dessus. La base est presque tronquée; les épaules se terminent par une saillie aiguë comme celle qui se voit par exemple chez la *Cliv. grandis;* dans certains individus, on ne distingue qu'une simple échancrure, parfois même une simple sinuosité. Les stries sont profondes et très-fortement ponctuées; les 2^{e}, 3^{e} et 4^{e} intervalle ont leur base relevée en forme de bourrelet.

La strie préscutellaire s'étend jusqu'au quart de l'élytre. Le bord externe et la suture sont bruns.

En dessous, l'insecte est fortement ponctué; les points du corselet se confondent de manière à le faire paraître comme chagriné.

Les cuisses antérieures sont larges, fortement bisinuées en dessous. Les tibias sont également larges, sillonnés en dessus; ils portent extérieurement, indépendamment de la digitation terminale, une autre digitation suivie d'une dent très-longue au-dessus de laquelle on voit des traces d'une deuxième dent.

Elle diffère principalement de la *C. lobata* par ses mandibules moins aiguës, par l'échancrure de l'épistôme qui est droite *au fond*, par son corselet plus large, moins convexe; par ses élytres plus allongées et dont les stries sont moins larges; par le dessous du corselet qui est plus ponctué, enfin, par la dent supérieure des tarses antérieurs qui n'est nullement aiguë.

M. Riehl m'a envoyé cet insecte qu'il a reçu, soit de Sumatra, soit de Ternate. 6 ind.

18. C. Stricta.

Nigro-picea, ore; antennis pedibusque piceo-brunneis. Clypeus late nec profunde emarginatus; alæ a clypeo separatæ, subrotundatæ. Vertex foveolatus utrinque punctatus. Pronotum convexum,

quadratum, angulis anticis depressis. Elytra cylindrica, profunde punctato-striata. Femora antica lata, compressa, subtus dentata; tibiæ anticæ extus longe bidigitatæ denteque armatæ; intermediæ longi-calcaratæ. — Long. 7. — El. 3 1/2. — Lat. 1 1/2 Mill.

Voisine de la *C. lobata*, mais plus grande; d'un noir de poix, avec les parties de la bouche, les antennes et les pattes d'un brun foncé. L'épistôme est légèrement excavé; les sillons latéraux de la tête sont plus rapprochés au point où ils aboutissent au sillon transversal; les côtés de la tête près des yeux portent quelques gros points très-apparents; le corselet est un peu plus large; en dessous, les points qui le couvrent sont très-petits, mais les rides transversales sont nombreuses et très-distinctes.

Java. 1 ind. donné par M. Riehl.

19. C. Anceps.

Brunnea, ore, antennis pedibusque testaceis. Mentum latum, breve, dente medio lato, elevato, carinato, lobis lateralibus supra oblique truncatis. Mandibulæ acutæ. Clypeus angulatus, excavatus, angulis acutis; alæ divergentes. Caput transversim plurisulcatum, vertice oblonge foveolato. Pronotum quadratum, angulis anticis prominulis rotundatis, transversim rugulosum punctatumque, angulis obtusis prominulis. — Elytra cylindrica, punctato-striata; tibiæ anticæ extus 3-digitatæ atque unidentatæ, intermediæ longe calcaratæ. — Long. 5. — El. 2 1/2. — Lat. 1 1/3 Mill.

Cet insecte ressemble tellement au *Dacca forcipata*, ci-après, que je me bornerai à signaler les différences. La taille est un peu moindre; les mandibules, bien qu'aiguës à l'extrémité comme chez les espèces du groupe de la *C. lobata*, sont conformées comme dans le genre *Clivina* et n'ont ni la longueur ni la forme que l'on remarque dans le *G. Dacca*.

Le labre est un peu plus large, moins avancé au milieu; l'épistôme est nettement formé de deux lignes droites se touchant au centre; les ailes sont moins arrondies; la strie préscutellaire, très-courte et oblique chez le *D. forcipata*, est ici presque droite et se termine brusquement au premier quart de l'élytre.

Ind. orient, (Dacca) 2 ind.

20. C. Fasciata. Putz. Mon. Cliv. p. 106.

(Voy. fig. 56.)

M. Sallé m'a envoyé deux exemplaires de cette espèce, venant du Mexique, sous le nom de *C. dilutipennis* Chaud.

21. C. Melanaria. Putz. Mon. Cliv. p. 68.

J'ai vu de nombreux exemplaires de cette espèce qui paraît appartenir plus spécialement à la province du Bengale.

22. C. Picipes. Dej. Putz. Mon. Cliv. p. 105.

M. Schaum a examiné l'insecte sur lequel Bonelli a fait sa description et qui repose au Musée de Berlin. Il l'a reconnu pour être le *Scar. attenuatus* de Herbst.

Bien que je n'aie plus sous les yeux le type de Dejean, je crois pouvoir le rapporter à la *C. melanaria* dont j'ai vu maintenant de nombreux exemplaires.

23. C. Maculata. Nietner.

Journ. of the Asiat. Soc. of Bengal 1856, n° V. — Ann. and Mag. of nat. hist. XIX, p. 241.

M. Murray m'a envoyé, comme provenant des Indes orientales, une petite Clivine qui me paraît devoir être rapportée à l'espèce décrite par Nietner, bien que la coloration ne soit point la même. La *maculata*, (récemment transformée, sans doute) a les élytres ferrugineuses, marquées au delà du milieu d'une tache noire peu déterminée. Mon individu est d'un noir brillant et l'extrémité des élytres est ferrugineux. C'est bien réellement une Clivine, quoique son corselet presque globuleux et le dernier article de ses palpes assez dilaté intérieurement lui donnent un peu l'aspect d'un Dyschirius; ses antennes grossissent vers l'extrémité et sont moniliformes à partir du 5e article; ses tibias intermédiaires dépourvus d'éperon,

et le 7e intervalle se réunissant au-dessous l'épaule au bord marginal la placent dans la présente division. Le labre est grand, en demi-cercle, bisinué et presque tuberculé antérieurement. L'épistôme est étroit et relevé dans son milieu ; ses ailes, placées sur le même plan, sont creusées longitudinalement et leurs bords se relèvent en forte carène de manière à leur donner l'apparence de deux dents obtuses. Le milieu de la tête est occupé par une carène élevée des deux côtés de laquelle on en remarque deux autres divergeant en arrière. Les yeux sont saillants. Le 2e intervalle des stries se recourbe à l'extrémite de chaque élytre et s'y arrête contre la première strie.

Ceylan (Nietner).

L'exemplaire que j'ai reçu de M. Murray et un autre qui m'a été communiqué par M. de Motschulsky, sont indiqués comme venant des Indes orientales sans désignation plus précise.

24. C. Lernæa. Schaum. Deutschl. Ins. I, 228 et Berl. Ent. Zeits. I, 125.

C. Subcylindrica. Peyr. Ann. Soc. ent. de France; 3e S. tom. VI, p. 386.

Cette espèce s'éloigne beaucoup des Clivines européennes. La forme du menton, la configuration de l'épistôme, le développement des digitations aux tibias antérieurs et surtout le prolongement du sillon marginal des élytres jusque près de la base, la rapprochent du groupe américain des *elongata* et *Americana*.

C. Convexicollis.

Nigra, nitida, palpis ferrugineis; antennis tarsisque ferrugineis nigromaculatis; clypeus truncatus alis separatis nec prominulis. Pronotum convexum, transverse-rotundatum, antice truncatum, angulis anticis depressis, rotundatis. Elytra ovato-elongata, profunde striato-punctata, interstitio 3° *quadri-punctato. Tibiæ anticæ extus longe bidigitatæ atque unidentatæ; tibiæ intermediæ extus inermes.* — Long. 6. — El. 3 1/4. — Lat. 1 3/4 Mill.

D'un noir brillant; palpes, antennes et tarses ferrugineux; tous

les articles des antennes portent, sur toute leur longueur, une double ligne noire qui, sur le dernier article, s'arrête avant l'extrémité ; le 1er article des tarses est également taché de noir.

La dent du menton est large, fortement carénée au centre dans toute son étendue ; les lobes latéraux, un peu plus élevés, sont tronqués obliquement au sommet. Les palpes sont épais et peu allongés. Les mandibules sont arquées et aiguës.

L'épistôme et ses ailes sont finement granulés ; l'épistôme porte en outre quelques stries longitudinales peu marquées ; il est tronqué en avant, bien séparé de ses ailes qui ne le débordent point ; celles-ci sont arrondies. Les yeux sont très-saillants. Le vertex est séparé de l'épistôme par un sillon très-régulier ; entre les yeux, on remarque deux autres sillons longitudinaux très-distincts qui convergent en avant et qui se terminent brusquement avant le sillon transversal. Le vertex lui-même porte une fossette oblongue ; l'occiput est borné en arrière par un sillon ponctué ; le col est fortement ponctué sur les côtés.

Le corselet est convexe, transversal, arrondi sur les côtés, tronqué en avant ; les côtés de la base sont peu prolongés ; les angles antérieurs sont arrondis, très-déprimés ; les angles postérieurs sont formés par l'extrémité saillante du rebord basal ; le sillon longitudinal est bien marqué ; il ne dépasse pas le sillon transversal antérieur qui est profond et un peu ponctué ; le milieu du corselet est couvert de petits points assez serrés.

Les élytres, de moitié plus larges que le corselet, sont en ovale allongé ; leurs stries sont larges et profondes, et fortement ponctuées, mais elles deviennent moins distinctes vers l'extrémité ; les trois premiers intervalles portent à la base un tubercule oblong ; la 4e strie se réunit au sommet à la 5e ; le 8e intervalle se joint au dessus de l'épaule au bord marginal ; le 3e est 4-ponctué.

Les tibias antérieurs sont lisses en dessus ; ils portent extérieurement, au dessus de la digitation terminale qui est courbe, deux digitations très-longues et une dent obtuse.

M. Riehl, de qui je tiens cet insecte, l'a reçu soit de Sumatra, soit de Ternate.

26. C. Atrata.

Nigra, antennis brunneis, palpis pedibusque dilutioribus. Mandibulæ latæ, breves. Antennæ longæ, crassiusculæ. Labium bisinuatum. Clypeus emarginatus, alis prominentibus. Vertex 3 impressus denseque punctulatus. Oculi prominentes postice cupulati. Pronotum subquadratum, antice subangustatum, basi vix prolongata. Elytra elongata, basi truncata, punctato-striata, striis apice evanescentibus, punctis maxime distinctis. Femora antica subtus unidentata; tibiæ sulcatæ, extus unidigitatæ atque unidentatæ; intermediæ calcaratæ. — Long. 11 1/2. — El. 6 1/4. — Lat. 3 Mill.

D'un noir assez terne, surtout sur les élytres; les palpes et les pattes postérieures d'un testacé ferrugineux, le labre et les antennes bruns.

La dent du menton est peu large, arrondie à l'extrémité, plus courte que les lobes latéraux qui sont également arrondis. Les mandibules sont larges, courtes et obtuses. Les antennes sont longues, assez épaisses, avec les articles 5-10 en carré allongé. Le labre est bisinué en avant, très-arrondi sur les côtés. L'épistôme est largement échancré, ses angles sont saillants et nettement séparés des ailes qui sont arrondies et un peu plus avancées. L'élévation antérieure est séparée du front par un sillon interrompu au milieu; elle est glabre, hémisphérique, arrondie en avant où elle est bordée par une carène élevée; tout l'espace compris entre cette carène et le bord de l'épistôme est couvert de rugosités longitudinales très-marquées.

Le vertex porte trois impressions longitudinales dont celle du milieu est moins distincte; il est couvert de points assez serrés surtout en avant. — Les yeux sont très-saillants; leur extrémité postérieure est enchâssée dans le rebord latéral de la tête. Le sillon qui sépare la tête du col est à peine distinct, surtout au milieu.

Le corselet est convexe, presque carré, un peu rétréci en avant; les côtés de la base sont peu prolongés; les angles antérieurs sont très-déprimés, nullement saillants, arrondis; les côtés sont coupés presque droit jusqu'au delà du milieu, puis fortement arrondis jusqu'à la base; les angles postérieurs ne sont point saillants au delà du bord marginal. Le sillon transversal antérieur est plus profond

que le sillon longitudinal; ce dernier dépasse l'autre, mais fort peu distinctement. Sur la surface du corselet, on voit des rides ondulées assez écartées, et au milieu de chaque côté, à la hauteur des angles postérieurs, deux lignes très-faiblement enfoncées qui remontent droit jusqu'à l'extrémité du premier tiers.

Les élytres sont allongées avec l'extrémité arrondie : leur base est tronquée aux épaules et légèrement échancrée vers l'écusson. Les stries sont assez faibles, mais leur ponctuation est très-distincte; elles sont beaucoup moins enfoncées vers le bord externe et à peine perceptibles à l'extrémité. Il y a quatre gros points sur le 3e intervalle. Le 6e intervalle se réunit très-peu distinctement au dessus de l'épaule au bord marginal; aucune des stries ne touche à la base.

Les cuisses antérieures portent à leur extrémité externe une grosse dent obtuse; les tibias, sillonnés en dessus, ont à l'extrémité une digitation assez courte et une grosse dent très-marquée. Les tibias intermédiaires sont assez larges et éperonnés.

Il y a sous les élytres des ailes très-développées.

Je n'ai vu qu'un seul exemplaire de cet insecte qui vient de la Nouvelle-Hollande, sans que je puisse indiquer sa patrie d'une manière plus précise.

27. C. Fissipes. Putz. Mon. Cliv. p. 89.

Les stries atteignent la base des élytres.

28. C. Hilaris.

Brunneo-ferruginea, palpis, antennis pedibusque posticis testaceis. Clypei margo in medio emarginata; alæ prominulæ; vertex foveolatus punctulatusque. Pronotum subquadratum, antice angustatum, postice rotundatum, utrinque basi punctato-foveolatum atque in medio utrinque punctulatum. Elytra elongata, humeris rotundatis, punctato-striata, interstitio 3° 4-punctato. Femora antica subdentata; tibiæ in medio nec sulcatæ extus unidigitatæ unique dentatæ; intermediæ calcaratæ. Unguiculi graciales, longi; paronychio illis sesqui vix breviore. — Long. 9. — El. 5. — Lat. 2 1/8 Mill.

D'un brun ferrugineux, avec les palpes, les antennes et les tibias postérieurs testacés; l'extrémité des mandibules est noire.

La dent du menton forme un angle à son sommet; elle est pluricarénée, plus courte que les lobes latéraux, qui sont obtusement anguleux au sommet et arrondis extérieurement.

Les antennes sont longues; les 2e et 3e articles presqu'égaux, les 5e à 10e cylindriques.

Les mandibules sont assez planes, très-aiguës. — Le labre, coupé droit en avant, a ses angles très-arrondis. L'épistôme est dépourvu de rebord au centre, ce qui le fait paraître échancré; ses ailes sont proéminentes, coupées obliquement vers l'intérieur, anguleuses au sommet, arrondies à l'extérieur. L'élévation antérieure est séparée du vertex par un sillon profond en arrière duquel on en voit deux autres, ponctués, partant des côtés et se réunissant avant le sommet de la tête; celui-ci porte une impression oblongue irrégulière. La tête, surtout en arrière, est parsemée de points inégaux.

Le corselet est subquadrangulaire, rétréci en avant; sa base est à peine prolongée; les angles antérieurs sont droits avec la pointe arrondie; les angles postérieurs font saillie en forme de tubercule; de chaque côté, vers la base, on voit une impression allongée, dirigée extérieurement, et fortement ponctuée; le centre du corselet est également ponctué de chaque côté.

Les élytres sont en ovale assez allongé; leurs épaules sont arrondies; elles sont striées-ponctuées et le 3e intervalle porte quatre points enfoncés dont les deux derniers sont assez rapprochés l'un de l'autre.

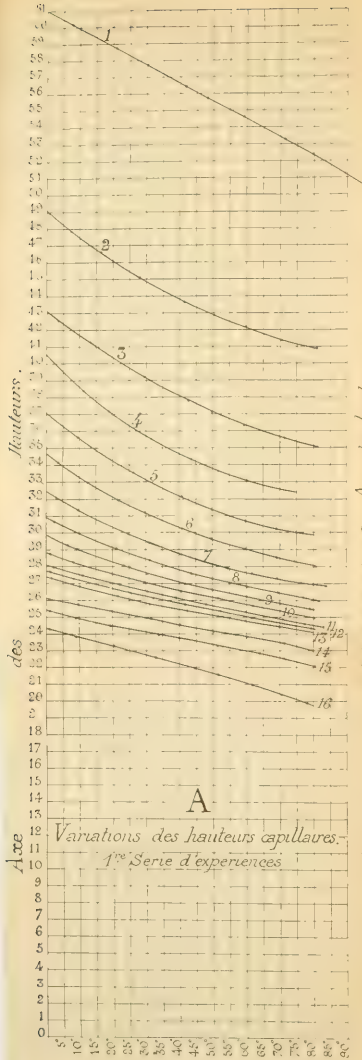
Le sillon marginal se termine à l'épaule même ; c'est l'avant-dernier intervalle qui se réunit au bord marginal. La 4e strie vient aboutir au point de jonction en faisant un crochet. La 3e strie ne touche point à la base.

Les cuisses antérieures portent, en dessous, à leur extrémité, une dent obtuse très-peu saillante. Les tibias, non sillonnés au milieu, ont à l'extrémité une digitation recourbée au dessus de laquelle on voit une grosse dent peu aiguë. Les tibias intermédiaires sont éperonnés.

Amazone. 1 ind.

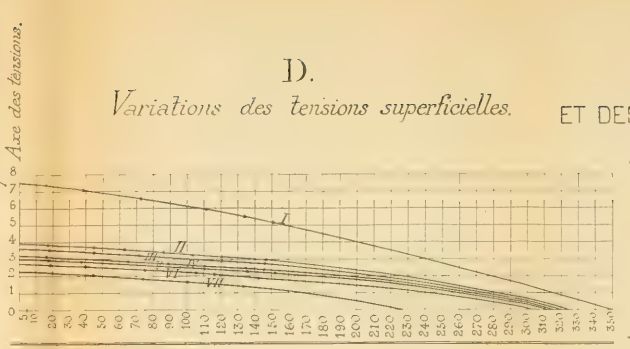
VARIATIONS DES HAUTEURS CAPILLAIRES ET DES TENSIONS SUPÉRFICIELLES DE L'EAU, DE L'ALCOOL ET DES SOLUTIONS D'EAU ET D'ALCOOL AVEC LA TEMPÉRATURE,

TEMPÉRATURES CRITIQUES DE L'EAU, DE L'ALCOOL ET DES SOLUTIONS D'EAU ET D'ALCOOL.



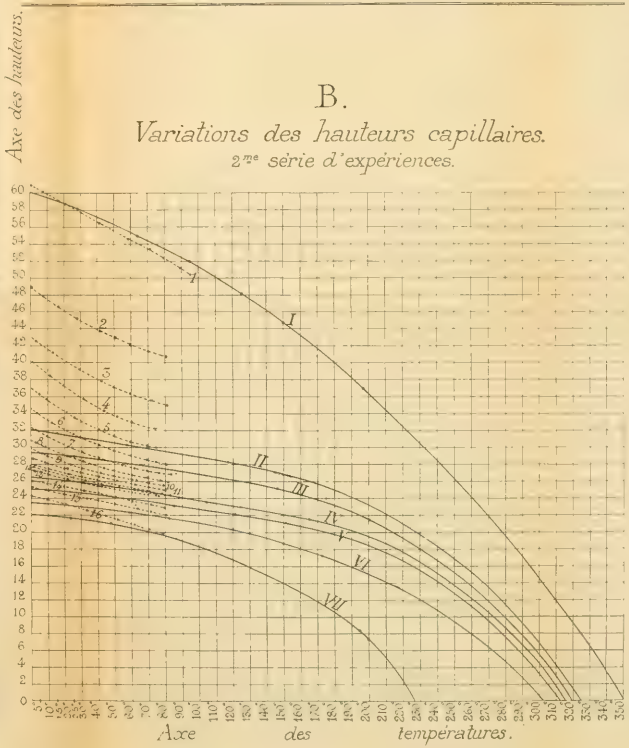
A

Variations des hauteurs capillaires.
1re Serie d'experiences



D.

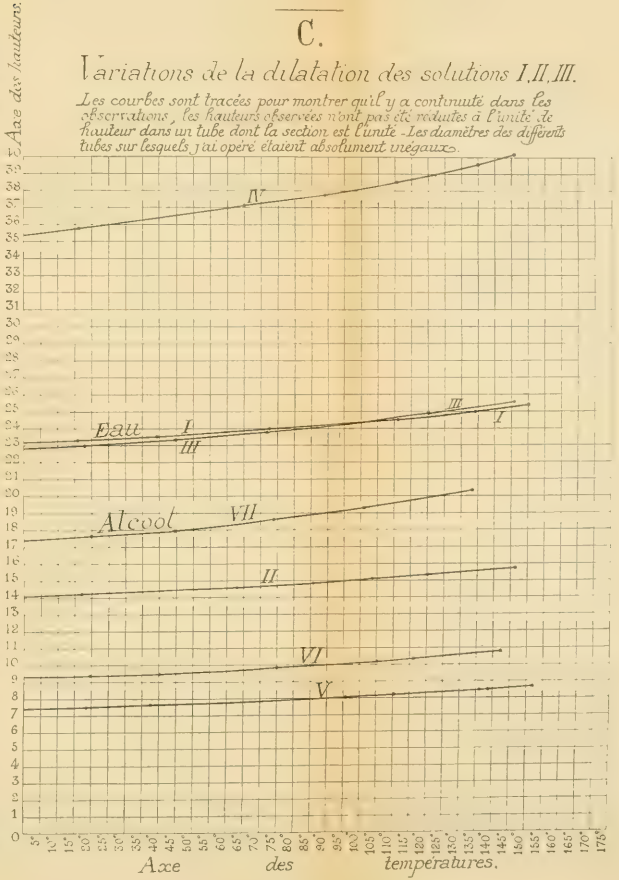
Variations des tensions superficielles.



B.

Variations des hauteurs capillaires.
2me série d'expériences.

Les courbes sont tracées pour montrer qu'il y a continuité dans les observations, les hauteurs observées n'ont pas été réduites à l'unité de hauteur dans un tube dont la section est l'unité. Les diamètres des différents tubes sur lesquels j'ai opéré étaient absolument inégaux.



C.

Variations de la dilatation des solutions I, II, III.

29. C. Longipennis.

Long. 8. — El. 4 1/2. — Lat. 1 2/3 Mill.

Voisine de la *C. bidentata*. Ses élytres sont plus étroites, plus longues, plus parallèles; d'un noir moins brillant; les intervalles des stries sont moins relevés; le corselet est plus court, moins convexe en arrière, moins élargi en avant; la dent du menton est plus étroite, un peu plus longue, la carène élevée est plus prolongée; les lobes latéraux sont tronqués; la partie centrale du labre est moins avancée; les tibias antérieurs sont plus distinctement sillonnés en dessus; la dent supérieure est plus forte et plus aiguë.

Le 6e intervalle des stries se réunit à la hauteur de l'épaule au bord marginal; de ce point, le bord intérieur est longé par une carène transversale interrompue qui forme un tubercule à la base des 2e et 3e intervalles.

Bords de l'Amazone. 2 ind.

30. C. Amazonica.

(Fig. 60.)

Nigra, nitida, palpis tarsisque testaceis, antennis, labro, scutello abdominisque ultimi segmenti apice ferrugineis. Menti dens medius latus rotundatus, lobis lateralibus oblique truncatis brevior. Labrum bisinuatum. Clypeus truncatus angulis prominulis alisque retractis rotundatis. Vertex foveola oblonga obsolete notatus. Pronotum subconvexum, subquadratum. Elytra elongato-ovata, profunde punctato-sulcata, interstitio 3° 5-punctato. Femora antica lata, extus apice obtuse unidentata; tibiæ anticæ supra subsulcatæ, longe digitatæ, extus unidentatæ; intermediæ calcaratæ. — Long. 8 1/2. — El. 4 1/2. — Lat. 1 3/4 Mill.

Les lobes latéraux du menton sont tronqués à leur sommet; la dent du milieu est un peu moins élevée, arrondie à l'extrémité. Le dernier article des palpes est long, presque tronqué à l'extrémité.

Les mandibules sont courtes, fortes, lisses, peu aiguës.

Antennes longues, ne grossissant pas vers l'extrémité, composées

(sauf le 1er) d'articles allongés, rétrécis à la base; le 2e article n'est guère plus long que le 3e.

Labre en demi cercle, bisinué, avec son milieu plus avancé et légèrement relevé. Epistôme tronqué en avant, dépassant les ailes; ses angles sont droits; il est bordé intérieurement de petites stries assez régulières en arrière desquelles on aperçoit une impression élevée en demi-cercle, appuyée sur le sillon transversal du vertex. Le 1er lobe des ailes est arrondi; le 2e (rebord supra-antennaire) est irrégulièrement allongé, ne dépasse pas l'œil, et porte trois fossettes dont celle qui est située au dessus de l'œil est la plus profonde. Le vertex est lisse; il a, au milieu, une impression allongée peu distincte. La tête est séparée du col par un sillon ponctué presqu'interrompu au milieu.

Le corselet, en avant, ne dépasse pas la largeur de la tête avec les yeux; il s'élargit ensuite jusqu'au delà de son milieu. Le bord antérieur est très-légèrement sinué; ses angles sont droits, un peu déprimés; les bords latéraux sont rebordés jusqu'à la base qui est presque tronquée.

Les angles postérieurs sont marqués par une petite dent obtuse et par un gros point placé intérieurement; entre ce point et celui qui est situé au dessous des angles antérieurs, on remarque un sillon profond, inégalement ponctué.

Le sillon longitudinal est bien marqué, surtout vers ses extrémités; il ne dépasse pas le sillon transversal antérieur lequel, lui-même, n'atteint pas les bords. Toute la surface du corselet porte des rides assez distinctes, mais peu rapprochées les unes des autres.

Les élytres sont en ovale-allongé, déprimées au centre en avant de l'écusson, et on y distingue à peine deux autres dépressions transversales, l'une au milieu, l'autre avant le milieu. Les stries sont profondes dans toute leur étendue, fortement ponctuées, sauf vers l'extrémité. Ces stries remontent toutes jusqu'à la base où elles se réunissent deux à deux; la 3e porte cinq gros points. La strie qui longe le bord externe est large et présente une série de fossettes du centre desquelles s'élève un petit tubercule.

Les cuisses antérieures portent en dessous, vers l'extrémité, une dent obtuse.

Les tibias antérieurs sont longuement digités; au dessus de la digitation externe se trouvent une grosse dent, et une petite élévation à l'endroit où dans d'autres espèces existe une seconde dent; le sillon central est peu distinct et raccourci; le sillon interne est mieux

marqué. — Les tibias intermédiaires ont un éperon droit assez long.

L'abdomen est lisse; le dernier segment est rougeâtre à l'extrémité.

Amazone. Je n'ai vu qu'un seul individu appartenant à M. Bates.

31. C. Foveilabris.

(Fig. 47 et 48.)

Nigra, nitida, palpis antennisque testaceis; labro, pedibus abdominisque ultimo segmento apice brunneo-ferrugineis. Menti dens medius latus, apice angulatim emarginatus, lobis lateralibus longior. Labrum in medio prominens, supra excavatum. Clypeus truncatus, alis cohœrens, hisce paululum prominentibus. Vertex sulcis transversis interruptis notatus, in medio foveolatus. Pronotum subquadratum, ante angulos posticos dilatatum, (hisce distincte prominulis) utrinque baseos oblonge foveolatum, superficie tota rugulis undulatis obtectum. Elytra elongata, profunde punctato-sulcata, interstitio 3° in dimidia parte posteriore tripunctato; striola præscutellari brevissima. Femora antica lata, crassa. Tibiæ anticæ supra bi-sulcatæ, longe bi-digitatæ, extus unidentatæ, intermediæ calcaratæ. — Long. 9 3/4. — El. 5. — Lat. 2 1/2 Mill.

Bien qu'essentiellement différente de la *C. Amazonica*, cette espèce lui ressemble assez au premier aspect.

Le menton a ses lobes latéraux arrondis; entre eux et plus haut qu'eux, s'élève la dent centrale, très-large, échancrée angulairement à son extrémité.

La languette paraît arrondie, mais son sommet est très-peu distinctement tronqué. — Le labre est avancé, bisinué, arrondi sur les côtés; le milieu est distinctement relevé en avant, déprimé en arrière, caractère que présentent quelques autres espèces, mais d'une manière beaucoup moins marquée. L'épistôme est tronqué en avant; dépassé par ses ailes qui sont tronquées obliquement et peu nettement séparées des rebords supra-antennaires.

Les élytres sont plus allongées que chez la *C. Amazonica*. Le 7e intervalle se réunit au dessus de l'épaule au bord marginal; un peu plus bas, il s'unit au 8e; le 1er intervalle porte à sa base un tubercule arrondi.

En dessous, le corselet est ridé et ponctué.

Reçu de M. Stevens comme venant des bords de l'Amazone. 1 ind.

32. C. Parryi.

Nigra, nitida, palpis tarsisque testaceis, antennis ferrugineis. Caput lœve, antice transversim sulcatum; vertice foveola rotunda impresso. Pronotum transversum, convexum, antice angustatum, basi parum prolongatum. Elytra elongato-oblonga, punctato-striata, striis apice evanescentibus. Tibiæ anticæ extus bidentatæ; intermediæ calcaratæ. — Long. 8 1/2. — El. 5. — Lat. 2 Mill.

A première vue, cet insecte ressemble beaucoup à la *Cl. melanaria*.

La dent du menton est très-large, presque tronquée à son extrémité de même que les lobes latéraux qui ne sont pas plus élevés. Les mandibules sont larges, courtes et planes en dessus, peu aiguës à l'extrémité. Le labre est tronqué en avant. L'épistôme est tronqué, ses angles sont arrondis; ses ailes sont situées plus en arrière, très-arrondies et creusées au centre : elles sont proéminentes et anguleuses dans la *C. melanaria*. Les antennes sont plus longues que dans cette dernière espèce; elles grossissent moins vers l'extrémité. L'élévation antérieure est séparée de la tête par un sillon transversal profond et lisse; le vertex porte au sommet un petit point arrondi. Les yeux sont plus proéminents que dans la *C. melanaria*.

Le corselet est beaucoup plus court que dans cette espèce, et plus convexe; les angles antérieurs sont droits, mais nullement proéminents. Les angles postérieurs sont saillants; la base est moins prolongée; le sillon longitudinal est longé dans son milieu par deux autres sillons courts et peu apparents; le sillon transversal antérieur, moins profond vers les côtés, est plus onguleux et plus profond au milieu.

Les élytres sont conformées comme dans la *C. melanaria;* seulement, la strie préscutellaire, qui manque dans cette espèce, est ici longue et très-distincte; les stries et les points sont un peu moins marqués vers l'extrémité et extérieurement; le 3^{e} intervalle porte trois points plus ou moins distincts.

Le corps est lisse en dessous.

Les dents des tibias antérieurs sont assez longues et aiguës; les tibias intermédiaires sont éperonnés intérieurement.

Inde et Nouvelle Guinée. 8 ind.

33. C. Foveicollis.

Nigra, nitida, palpis, tarsis tibiisque 4 posterioribus testaceis; antennis mandibulisque brunneo-ferrugineis. Clypeus truncatus, angulis rectis nec prominulis; elevatione antica tripunctata. Vertex foveatus. Pronotum subglobosum utrinque in 3ª antica parte distincte foveolatum. Elytra oblongo-ovata, fortiter punctato-striata, interstitio 3° 4-punctato. Tibiæ anticæ extus bidigitatæ et unidentatæ. — Long. 6 1/2. — El. 3 1/4. — Lat. 2 Mill.

D'un noir brillant, avec les palpes, les tarses et les tibias des quatre pattes postérieures testacés; le labre, les antennes et les mandibules d'un brun ferrugineux.

La dent du menton, large, carénée au centre, arrondie à l'extrémité, est aussi élevée que les lobes latéraux. Ceux-ci sont arrondis à l'extrémité, creusés au centre. Les palpes sont assez courts; leur extrémité est tronquée; le 2e des maxillaires est du double plus gros que les suivants. Les mâchoires sont minces et très-aiguës. Les mandibules sont assez courtes, larges à leur base, presque droites sur les côtés; l'extrémité est légèrement courbée et assez aiguë.

L'épistôme est tronqué; ses angles sont droits, nullement proéminents; ses ailes sont sur le même plan, petites et portant, de même que les ailes postérieures, un point enfoncé. Les antennes sont courtes, dépassant à peine le milieu du corselet, grossissant vers l'extrémité; le 1er article peu épais, le 3e plus long que le 2e, presque moniliformes à partir du 5e. Les yeux, proéminents, dépassent de leur moitié le rebord antérieur de la tête. L'élévation antérieure, qui est assez marquée, est séparée du vertex par un sillon profond; elle porte en avant une fossette large et, sur chacun de ses côtés, un point plus petit; du sillon transversal partent deux carènes élevées qui se prolongent en divergeant jusqu'à la partie postérieure des yeux; au milieu se trouve une large impression assez profonde portant sur ses bords quelques rugosités.

Le corselet, très-convexe, est transversalement globuleux, légèrement rétréci en arrière. Le bord antérieur est tronqué; les angles

sont très-déprimés, arrondis ; les angles postérieurs sont marqués par une dent saillante et par un point enfoncé. Les sillons, transversal antérieur, et longitudinal, sont profonds et bien marqués ; on en distingue deux autres, larges mais très-légers, partant de l'angle antérieur et se prolongeant obliquement jusqu'au milieu de chaque côté. Au milieu de chacune des deux parties du corselet, on voit, au tiers à partir du bord antérieur, un point enfoncé large et bien marqué (1). Le point qui existe ordinairement sur le bord externe en dessous des angles antérieurs est ici placé un peu plus bas que dans la plupart des autres espèces.

Les élytres sont en ovale un peu allongé, un peu rétrécies vers l'extrémité ; les épaules sont très-arrondies ; les stries, bien marquées dans toute leur étendue, sont fortement ponctuées dans leurs deux tiers antérieurs ; le 4e intervalle est marqué de quatre points bien distincts.

Les tibias antérieurs, non sillonnés en dessus, sont larges, profondément échancrés ; leur côté externe porte deux digitations longues et une large dent obtuse. Les tibias intermédiaires ne portent extérieurement aucun éperon.

Chine. 1 ind.

34. C. Bifoveata.

Rufo-brunnea, palpis, antennis pedibusque testaceis. Clypei alæ retractæ. Caput antice sulcatum, in vertice foveolatum. Pronotum subquadratum, utrinque in medio punctulatum, basi foveolis 5 *oblongis interrupta. Elytra elongato-oblonga, antice subangustiora, punctato-striata, interstitio* 3° 5*-punctato. Tibiæ anticæ sulcatæ, extus bi-digitatæ ; intermediæ calcaratæ. Tarsorum unguiculi graciles, curvati, paronychio longitudine æquali.* — Long. 4 3/4. — El. 2 1/2. — Lat. 1 1/4 Mill.

D'un brun rougeâtre, avec les palpes, les antennes et les pattes postérieures testacés.

Le menton est étroit, élevé ; la dent centrale est carénée au mi-

(1) Ces deux points sont plus ou moins distincts dans un certain nombre d'espèces, mais jamais autant que dans celle-ci.

lieu, aussi longue que les lobes latéraux qui sont tronqués en dessus. Les antennes atteignent presque la base du corselet; le 2e article est un peu plus long que le 3e; les articles 5-11 sont cylindriques. — L'épistôme est tronqué, rebordé; ses angles sont droits, mais obtus; les ailes, petites, arrondies, sont placées plus en arrière; les rebords supra-antennaires sont très-convexes, et dépassent le milieu des yeux. L'élévation antérieure, bornée en arrière par un sillon profond, forme dans son milieu un ovale transversal déprimé au centre. Le sommet de la tête est rétréci sur les côtés antérieurs par deux fossettes profondes; il porte au centre un point oblong; toute la tête est finement chagrinée. Les yeux sont saillants, enfoncés sur les côtés et en arrière jusqu'à leur milieu dans un rebord très-mince.

Le corselet, carré entre ses angles, paraît presque cordiforme à cause des fossettes de la base. Le bord antérieur est tronqué; les angles sont obtus; les côtés à peine sinués; les angles postérieurs sont peu saillants. La base est interrompue par cinq fossettes oblongues qui se rétrécissent en avant, dont l'une est située au centre, deux contre les angles postérieurs et deux autres entre celles-ci, de sorte qu'en arrière, le corselet semble avoir quatre prolongements arrondis à l'extrémité. — Les sillons transversal et longitudinal sont bien marqués. De chaque côté, le corselet est couvert d'une ponctuation très-distincte moins marquée au milieu.

Les élytres sont ovales oblongues, plus étroites en avant qu'en arrière, très-rebordées; le 6e intervalle se rétrécit à sa base en une carène très-saillante; les stries sont profondes et fortement ponctuées; chaque élytre porte à sa base une rangée de trois tubercules; le 3e intervalle est marqué de cinq points pilifères.

Les tibias antérieurs sont sillonnés au centre et portent extérieurement deux digitations; les tibias intermédiaires, assez larges et denticulés extérieurement, n'ont pas d'éperon.

Un seul individu envoyé par M. Stevens comme venant des bords de l'Amazone.

35. C. Natalensis.

Nigra, nitida, palpis, antennis pedibusque posticis testaceis, elytrorum margine apicali ferrugineo; clypeus sub-excavatus, alis non prominulis, a clypeo separatis. Vertex sulco transversali profundo, sulculo oblongo in medio notatus. Pronotum convexum, sub-

quadratum, basi prolongatum. Elytra subcylindrica, fortiter punctato-striata, striis ante apicem abbreviatis. Tibiæ anticæ longe bi-digitatæ denteque forti armatæ; intermediæ angustæ, inermes.— Long. 6-7. — El. 2 1/4-3/12. — Lat. 1 1/2-1 3/4 Mill.

Noire, avec les palpes, les antennes et les quatre pattes postérieures testacés. Les élytres sont bordées de ferrugineux extérieurement et intérieurement vers l'extrémité.

La dent du menton est large, arrondie, plus courte que les lobes latéraux qui, arrondis d'abord, se rétrécissent vers leur côté externe où ils forment une pointe obtuse. Le 3e article des palpes maxillaires est de moitié plus court que le dernier; celui-ci est tronqué à son extrémité. Les mandibules sont courtes, arquées, mais peu aiguës. Les antennes grossissent vers l'extrémité, mais leurs articles ne sont point moniliformes; le 3e est un peu plus court que le 2e. — Le labre, légèrement sinué antérieurement, est garni de poils dorés surtout sur les côtés. — L'épistôme, dont le bord antérieur est relevé, est un peu échancré dans son milieu; ses angles sont arrondis, écartés des ailes qui sont sur le même plan, arrondies, rebordées et creusées au centre. Les rebords supra-antennaires n'atteignent que le milieu des yeux qui sont très-saillants. — L'élévation antérieure est très-nettement séparée du front par un sillon profond des deux côtés duquel partent deux carènes divergeant jusqu'un peu avant l'extrémité des yeux; ces carènes sont plus élevées que dans les espèces voisines. Le vertex porte au centre une fossette oblongue et quelques petites dépressions moins distinctes. Le sillon derrière la tête est profond et ponctué dans toute son étendue.

Le corselet est subquadrangulaire, convexe; le bord antérieur est largement échancré; ses angles, très-déprimés, sont carrés avec l'extrémité arrondie; les côtés sont légèrement arqués jusqu'aux angles postérieurs qui sont saillants; les côtés de la base, dont le rebord est très-élevé, sont assez prolongés (notablement plus que dans la *C. Senegalensis*); la base elle-même n'est point échancrée. Le sillon transversal antérieur est profond et marqué intérieurement de gros points; il n'est pas dépassé par le sillon longitudinal qui est également bien marqué, mais qui se rétrécit vers la base. La surface porte quelques rides ondulées qui sont beaucoup plus distinctes vers la base.

Les élytres sont allongées, presque cylindriques; leurs épaules sont bien arrondies; les stries sont profondes et fortement ponc-

tuées; cependant aucune d'elles n'atteint la prolongation postérieure de la 8e strie. L'avant-dernier intervalle se réunit au dessus de l'épaule au bord marginal.

Les tibias antérieurs sont sillonnés en dessus; ils portent, au dessus de la 2e digitation une forte dent obtuse au bout. Les tibias intermédiaires sont étroits et non munis d'éperon latéral.

Le dessous de la tête est fortement ponctué sur les côtés; il porte au milieu deux lignes de gros points.

Natal. 4 indiv.

36. C. Caffra.

Brunnea, capite thoraceque nigro-brunneis. Clypeus truncatus, angulis rectis, alis sub-retractis, a clypeo separatis; elevatio antica transversim impressa; vertex sulco transversali profundo sulculoque oblongo in medio notatus; carinulæ divergentes, ante oculos angulatæ. Pronotum subquadratum, basi prolongatum atque punctulatum. Elytra subcylindrica punctato-striata, striis ante apicem abbreviatis; tibiæ anticæ sulcatæ, longe-digitatæ denteque forti armatæ; intermediæ latiores, inermes. — Long. 7.—El. 3 3/4.—Lat. 2 Mill.

Voisine de la *C. Natalensis*, mais plus large; la dent du menton est plus étroite, un peu plus courte que les lobes latéraux. L'épistôme est tronqué, ses angles sont droits; les ailes sont situées plus en arrière, moins arrondies; l'élévation antérieure porte, le long de l'épistôme, une impression rugueuse bien marquée, et, au milieu, une fossette allongée; les carènes, divergentes, sont angulcuses dans leur milieu. Le corselet est moins convexe, plus long, ses côtés sont moins arrondis; il est couvert de rides ondulées parsemées de très-petits points; les côtés de la base sont ponctués. Les élytres sont moins larges; leurs stries sont un peu moins fortement ponctuées. L'avant-dernier intervalle vient se réunir au dessus de l'épaule au bord marginal; de ce point, part une carène arquée à laquelle aboutit le 4e intervalle; les trois premiers intervalles ont chacun un tubercule à la base; celui du 2e est plus petit. — Les tibias antérieurs sont sillonnés en dessus; les intermédiaires, beaucoup plus larges et denticulés, ne portent pas non plus d'éperon externe.

L'unique individu que j'aie vu est brun avec la tête et le corselet plus foncés ; l'extrémité de l'abdomen est ferrugineuse.

Port Natal.

37. C. Obesicollis.

Nigra, nitida ; palpis antennisque brunneis ; tarsis nigro-brunneis. Menti lobi laterales obtuse angulati ; dens medius illis brevior. Antennarum articuli cylindrici. Clypeus truncatus angulis rectis, alis sub-retractis rotundatis. Vertex sulco transversali unico, sulcisque lateralibus divergentibus. Occiput transversim profunde punctato-sulcatum. Pronotum convexum rotundatum, post angulos anticos coarctatum, sulcis transversali longitudinalique profundis. Elytra oblonga, interstitio 8° ultra humerum prolongato ; striis fortiter punctatis, interstitio 3° 4-punctato. Tibiæ anticæ extus digitatæ denteque valido armatæ, intermediæ non calcaratæ. — Long. 6 1/2. — El. 3 3/4. — Lat. 2 Mill.

D'un noir très-brillant, avec les palpes et les antennes d'un brun rougeâtre, les pattes postérieures d'un brun foncé. La languette, allongée, a son centre corné et presque linéaire, surmonté d'un seul poil droit, dépassant légèrement les parties latérales qui sont tronquées obliquement au sommet avec les angles arrondis ; les paraglosses, très-étroits, sont plus courts que la languette.

La dent du menton est large, obtuse à l'extrémité, plus courte que les lobes latéraux qui forment à leur sommet un angle un peu arrondi. Les mâchoires sont étroites, arquées, aiguës ; le dernier article de leur lobe externe est très-dilaté au milieu, et se rétrécit de ce point à l'extrémité où il est aigu ; je n'ai remarqué ce caractère dans aucune autre espèce.

Les antennes sont longues ; les 2e et 3e articles sont de même longueur ; les 3e et 4e sont en triangle allongé et les autres cylindriques.

Le labre, élargi à sa base, est avancé, proéminent au centre ; ses angles sont arrondis. L'épistôme, tronqué en avant, rebordé, a ses angles obtus ; ses ailes sont écartées, arrondies et placées un peu plus en arrière ; les rebords supra-antennaires atteignent le milieu des yeux ; ceux-ci sont blancs, un peu enchâssés sur les côtés interne et postérieur. L'élévation antérieure, assez longue, est séparée de

la tête par un sillon profond d'où partent deux carènes divergentes beaucoup moins distinctes que dans la *C. Caffra,* et qui s'étendent jusqu'après les yeux. Le vertex est glabre et non fovéolé. Le col est brusquement séparé de la tête par un sillon fortement ponctué surtout au milieu et sur les côtés.

Le corselet a beaucoup d'analogie avec celui des *Dyschirius;* il est presque globuleux, rétréci en avant; les côtés de la base sont peu prolongés; le bord antérieur est légèrement échancré dans son milieu; ses angles sont déprimés et arrondis; les côtés sont assez fortement rebordés; en dessous des angles postérieurs, le rebord est moins marqué que dans la *C. Natalensis;* les angles postérieurs forment une saillie assez prononcée. Le sillon transversal antérieur est profond, ponctué et atteint le bord à ses deux extrémités; il n'est pas dépassé par l'impression longitudinale qui est également profonde; toute la surface est traversée par des rides ondulées qui sont plus nombreuses vers la base.

Les élytres sont ovales-oblongues, échancrées au milieu de la base, avec les épaules arrondies et l'extrémité un peu rétrécie; les stries sont profondes et bien ponctuées, mais elles disparaissent en partie à l'extrémité; le 3e intervalle est marqué de quatre points larges et très-distincts; le 8e se prolonge au delà de l'épaule jusqu'à la hauteur du 4e; les 1er, 2e et 3e portent un petit tubercule à leur base.

Les tibias antérieurs ne sont pas sillonnés en dessus; la digitation terminale est aussi longue que l'épine placée en face d'elle; la digitation externe est à peine de moitié plus courte; elle est surmontée d'une grosse dent obtuse.

Les tibias intermédiaires ne sont pas éperonnés.

Célèbes. 4 ind.

38. C. Mordax.

Long. 5. — El. 2 1/2. — Lat. 1 1/8 Mill.

Voisine de la *C. obesicollis*, mais plus petite, plus étroite; les élytres sont plus allongées; le corselet est moins large et moins convexe, plus allongé, moins rétréci en avant, couvert de rides transversales très-distinctes; les mandibules sont notablement plus longues, plus étroites et plus aiguës à l'extrémité; les ailes de l'épistôme s'avancent jusqu'au niveau de celui-ci.

Ind. or. (Dacca) 2 ind.

G. Dacca.

Ce genre, dont j'emprunte le nom à la patrie de l'insecte sur lequel il est établi, ne diffère essentiellement des Clivines que par ses mâchoires et surtout ses mandibules très-longues, très-étroites et arquées, planes dans leur première moitié, puis s'épaississant un peu jusque vers l'extrémité qui est très-aiguë. Aucune des espèces du genre *Clivina* ne présente une telle disposition, pas même celles qui ont les mandibules les plus allongées et les plus étroites.

L'unique espèce de ce genre que je connaisse jusqu'à présent se rattache, par toutes ses analogies, au groupe des Clivines de la *lobata;* elle s'en distingue, non seulement par la forme des mâchoires et des mandibules, mais encore par la strie préscutellaire, qui est longue dans les Clivines et qui, dans les *Dacca*, est très-courte.

L'un, au moins, de mes six exemplaires de la *D. forcipata* étant un ♂, j'ai cru un instant que l'allongement extraordinaire des mandibules était une différence sexuelle; mais j'ai vérifié chez une Clivine Indienne du groupe dont il s'agit, que les mandibules des mâles ne diffèrent pas sensiblement de celles des femelles. Au reste, fût-il même reconnu que chez la *D. forcipata* les organes de la mastication varient suivant les sexes, ce serait encore là un caractère qui justifierait suffisamment la coupe que je propose.

D. Forcipata.

(Fig. 41.)

Brunnea, ore, antennis pedibusque plus minusve testaceis. Mentum latum, breve, dente medio lato, elevato, carinato, lobis lateralibus supra oblique truncatis; mandibulæ longæ, angustæ, arcuatæ. Clypeus sub-angulatim excavatus, angulis prominulis; alæ divergentes. Caput transversim plurisulcatum, vertice oblonge foveolato. Pronotum quadratum, angulis anticis prominulis rotundatis, transversim rugulosum punctatumque, angulis posticis obtusis prominulis. Elytra cylindrica, punctato-striata, interstitio 3° 4-punctato; corpus subtus punctulatum. Tibiæ anticæ extus tridigitatæ atque unidentatæ; intermediæ longe calcaratæ. — Long. 6 1/2-7. — El. 3 1/4-3 1/2. — Lat. 1 1/3 Mill.

Languette légèrement arrondie à sa partie supérieure, plus étroite vers sa base; les paraglosses plus courtes, aiguës, divergentes.

Mâchoires longues, étroites, arquées.

Menton transversal; la dent centrale est large, fortement carénée au milieu, un peu plus élevée que les lobes latéraux qui sont tronqués obliquement à leur sommet, concaves intérieurement et rugueux vers la partie supérieure.

Labre avancé et arrondi au milieu, sinué avant les angles qui sont arrondis. Antennes grossissant fortement vers l'extrémité, moniliformes à partir du 4e article.

Mandibules très-longues, arquées, croisées dans le repos, larges et planes à la base qui porte intérieurement une dent obtuse, se rétrécissant fortement vers l'extrémité.

Epistôme rebordé, échancré presqu'angulairement, ses angles saillants et relevés; les ailes écartées, un peu reculées, arrondies, très-nettement séparées du rebord supra-oculaire. En arrière de l'élévation antérieure, se trouve un sillon transversal court, mais très-profond. Le vertex porte une fossette oblongue, ponctuée postérieurement et au milieu de laquelle viennent aboutir deux sillons obliques; au dessus de ces sillons, on voit, de chaque côté, un point enfoncé. De chaque côté de la tête se trouve une carène longitudinale; en arrière, un sillon longitudinal profond, ponctué au milieu, suivi de deux autres moins distincts et un peu ondulés.

Les yeux sont très-saillants et le rebord supra-oculaire n'atteint pas leur milieu.

Le corselet est carré; les bords antérieur et postérieur sont échancrés; les côtés ne se rétrécissent nullement en avant; les angles antérieurs sont saillants, mais arrondis; les angles postérieurs sont légèrement saillants et portent intérieurement un gros point enfoncé; le sillon transversal antérieur est profond et complet; le sillon longitudinal est double, moins marqué vers la base, et il n'atteint pas le bord antérieur; sa surface, excepté au tiers antérieur, est parsemée de points enfoncés et de rides ondulées; au milieu du bord antérieur, de chaque côté, on voit une ligne enfoncée, à peu près droite, qui descend jusqu'aux rides dont je viens de parler.

Les élytres sont cylindriques, de la même largeur que le corselet et ayant trois fois sa longueur; elles sont striées-ponctuées dans toute leur étendue; les intervalles sont assez convexes et le 3e porte quatre gros points. L'intervalle marginal dépasse notablement les épaules dont le rebord est saillant, et s'élargit à sa partie supérieure; les

intervalles 2e, 3e et 4e ont leur base dilatée en une sorte de bourrelet arrondi ; le 4e et le 5e se réunissent à leur sommet.

En dessous, la tête est fortement chagrinée ; les côtés du corselet sont traversés par de nombreuses lignes ondulées entremêlées de points ; la base de chacun des segments abdominaux est fortement ponctuée.

Les pattes sont courtes ; les cuisses épaisses et renflées ; les tibias antérieurs sillonnés en dessus ; au dessus de la digitation terminale, ils en portent deux autres étroites et longues, puis une dent bien marquée. Les tibias intermédiaires sont longuement éperonnés. L'épine terminale est plus longue que les crochets.

Ind. or. (Dacca) 6 ind.

Chez deux individus plus foncés que les autres, le corselet est parsemé de taches rouges très-apparentes et irrégulières, parfois confluentes.

G. Dyschirius.

L'excellent travail que M. Schaum a publié récemment sur les espèces européennes (1) me dispense d'en aborder la révision.

M. *Leconte* a donné, de son côté, un synopsis des Dyschirius des Etats-Unis (2).

Ayant eu l'occasion d'examiner un certain nombre d'individus du *D. rufus* (Mon. p. 44, n° 46) je dois reconnaître que le *D. brevicarinatus* (ib. p. 53, n° 58) qui en a été éloigné par une transposition typographique, n'en est qu'une simple variété.

Cet insecte a toute l'apparence d'une Clivine ; cependant, à raison de ses palpes dont le dernier article est très-renflé à la base, de ses mandibules courtes, larges et aplaties et de l'absence d'un éperon aux tibias intermédiaires, je le place parmi les *Dyschirius*.

La description indique suffisamment que c'est par erreur que la diagnose porte : *stria marginali ad humerum abbreviata* au lieu de : *in humero prolongata*.

---

(1) Naturgesch. der Ins. Deutschl. I, 192-226 (1857).

(2) Proceed. of the Acad. of Nat. Sc. of Philad. 1857. (p. 75-80.)

N° 5. D. Abbreviatus.

Cet insecte ne vient pas du Yucaton, mais du Texas.

G. Ardistomis. Putz. Mon. Cliv. p. 118.

(Voy. fig. 32, 34, 35, 36 et 37.)

J'ai sous les yeux un assez grand nombre d'espèces nouvelles que je me propose de décrire prochainement dans un travail spécial sur ce genre. Je crois donc devoir m'abstenir pour le moment soit de rectifier certaines descriptions, soit de discuter quelques points de synonymie.

Inna Gen. nov. Calleidæ affine.

Mentum breve lobis lateralibus acutis, dente medio lato elevatioribus.

Ligula cornea porrecta rotundata, paraglossis ei cohærentibus.

Palpi labiales art. 3° brevissimo conico, ultimo triangulari.

Maxillæ angustæ, subarcuatæ, acutæ, intus setosæ.

Palpi maxillares art. 2° longiore clavato intus incurvo, 3° brevi triangulari, ultimo duplo majore subsecuriformi.

Mandibulæ validæ, obtrigonæ, apice acuto tantum incurvæ, unidentatæ.

Labrum porrectum, latitudine longius, antice subemarginatum 15-setosum.

Antennæ filiformes, art. 1° clavato, 3ii longitudine, 2° minuto, triangulari, cæteris cylindricis, ultimo præcedente longiore, apice rotundato.

Pronotum hexagonum, lateribus serratis.

Elytra elongata, parallela, apice truncata, angulo externo rotundato.

Tarsi tenues, 1° secundoque cylindricis, 3° quartoque triangularibus ; unguiculi magni, simplices.

I. Punctata.

(Voy. fig. 71, 72, 73 et 74.)

Brunnea, undique punctata; pronoto antice posticeque angustato, angulis anticis rectis, posticis obtusis; elytris elongatis, costatis, striis costisque punctatis. — Long. 8 1/2. — El. 4 3/4. — Lat. 2 3/4 Mill.

Brunnea, ore, antennis, pedibus, sutura extrema, abdomineque dilutioribus.

Caput elongatum, postice attenuatum, convexum, inter antennas leviter bi-impressum, undique punctatum.

Labrum in medio transversim impressum, rufo-marginatum; oculi parum prominuli, semi-globosi.

Pronotum capite latius, antice subemarginatum, basi bisinuatum, lateribus serratis, in medio angulatim dilatatis; anguli antici subrecti, postici obtusi, elevati; superficie tota punctata; linea longitudinali media marginem anticum non attingente; impressione antica arcuata; prope angulos posticos foveolæ duæ late nec profundæ.

Scutellum magnum, triangulare.

Elytra pronoto latiora, elongata, parallela, basi recta, humeris rotundatis, apice oblique subtruncato; profunde punctato-striata; interstitia costulata, punctulata; striæ omnes apice undique punctato evanescunt; striola præscutellaris obliqua inter suturam atque striam primam.

Pronotum subtus punctatum, abdomine vero læve.

Pedes antici carent in specimine mihi obvio; cæteri tenues, tibiis canaliculatis; tarsis rufo-pilosis.

Aragua.

Specimen unicum a D. Schaum benevole communicatum.

Eucheila Flavilabris. Dej. spec. V, p. 455. Iconog. pl. VIII, fig. 3.

(Voy. fig. 75, 76 et 77.)

Je donne ici les détails anatomiques de cet insecte qui est peu répandu dans les collections et dont l'Iconographie de Dejean n'a donné qu'une figure très insuffisante.

EXPLICATION DES PLANCHES.

Fig. 1. *Oxygnathus elongatus.*
Menton, languette et palpes.

» 2. *Systenognathus porosus.*
Menton.

» 3. Id. Languette et paraglosses.

» 4. Id. Mâchoire et palpe maxillaire.

» 5. *Oxystomus cylindricus.*
Languette et palpes labiaux.

» 6. Id. Mâchoire et palpe maxillaire.

» 7. *Cryptomma multistriatum.*
Menton.

» 8. Id. palpe maxillaire.

» 9. Id. Languette et palpe.

» 10. *Listropus brevipennis.* — Tête.

» 11. Id. Menton.

» 12. Id. Languette, mâchoire et palpes.

» 13. *Pyramis crassicornis.* — Menton.

» 14. Id. Languette et palpe.

» 15. Id. Palpe maxillaire.

» 16. *Scapterus longicollis.*
Menton et palpe.

» 17. Mâchoire et palpe.

» 18. Languette.

Fig. 19. *Lachenus impunctipennis.*
Menton, languette et palpes.

» 20. *Camptodontus cayennensis.*
Languette et palpe.

» 21. Id. Menton.

» 22. Mâchoire et palpe.

» 23. *Camptodontus puncticeps.*
Languette.

» 24. Id. Menton.

» 25. *Camptodontus falcatus.*
Mâchoire et palpe maxillaire.

» 26. In. Menton, languette et palpe.

» 27. Id. Tête.

» 28. *Stratiotes clivinoides.*
Menton et palpe maxillaire.

» 29. Id. Languette, mâchoire et palpe labial.

» 30. *Stratiotes latidens.*
Menton.

» 31. *Aspidoglossa submetallica.*
Menton, languette et palpe.

» 32. *Ardistomis rostrata.*
Menton, languette et palpes labiaux.

» 33. *Aspidoglossa mexicana.*
Tarse antérieur du mâle.

» 34. *Ardistomis fasciolata.*
Tarse antérieur du mâle.

» 35. *Ardistomis Leprieurii.*
Tarse antérieur du mâle.

» 36. *Ardistomis fasciolata.*
Mandibule.

» 37. *Ardistomis unicolor.*
Mâchoire et palpe maxillaire.

» 38. *Schizogenius strigicollis.*
Epistome.

» 39. *Schizogenius V-sulcatus.*
Epistome.

Fig. 40. *Schizogenius apicalis.*
Epistome.

» 41. *Dacca forcipata.*
Partie antérieure de la tête.

» 42. *Mesus rugatifrons.*
Menton, languette, mâchoire et palpes.

» 43. *Clivina planiceps.*
Languette et paraglosses.

» 44. *Clivina Americana.*
Menton, languette et palpe.

» 45. *Clivina fossor.*
Mâchoire et palpe maxillaire,

» 46. Id. Menton, languette et palpe.

» 47. *Clivina foveilabris.*
Languette et palpe.

» 48. Id. Menton.

» 49. *Climax fissilabris.*
Languette.

» 50. Id. Menton.

» 51. Id. Tête.

» 52. *Clivina urophthalma.*
Menton.

» 53. Id. Tête et corselet.

» 54. *Clivina fuscicornis.*
Menton.

» 55. *Clivina dentifemorata.*
Patte antérieure.

» 56. *Clivina fasciata.*
Tête.

» 57. *Clivina grandis.*
Tête.

» 58. *Clivina mandibularis.*
Tête.

» 59. *Clivina oblongicollis.*
Menton.

Fig. 60. *Clivina Amazonica.*
Menton.

» 61. *Scolyptus microphthalmus.*
Tête.

» 62. Id. Languette.

» 63. Id. Palpe labial.

» 64. Id. Mâchoire.

» 65. Id. Palpe maxillaire.

» 66. *Bohemannia gigantea.*
Menton et palpes labiaux.

» 67. Id. Languette.

» 68. Id. Mâchoire et palpe maxillaire.

» 69. *Clivina maculata.*
Tête.

» 70. Id. Menton.

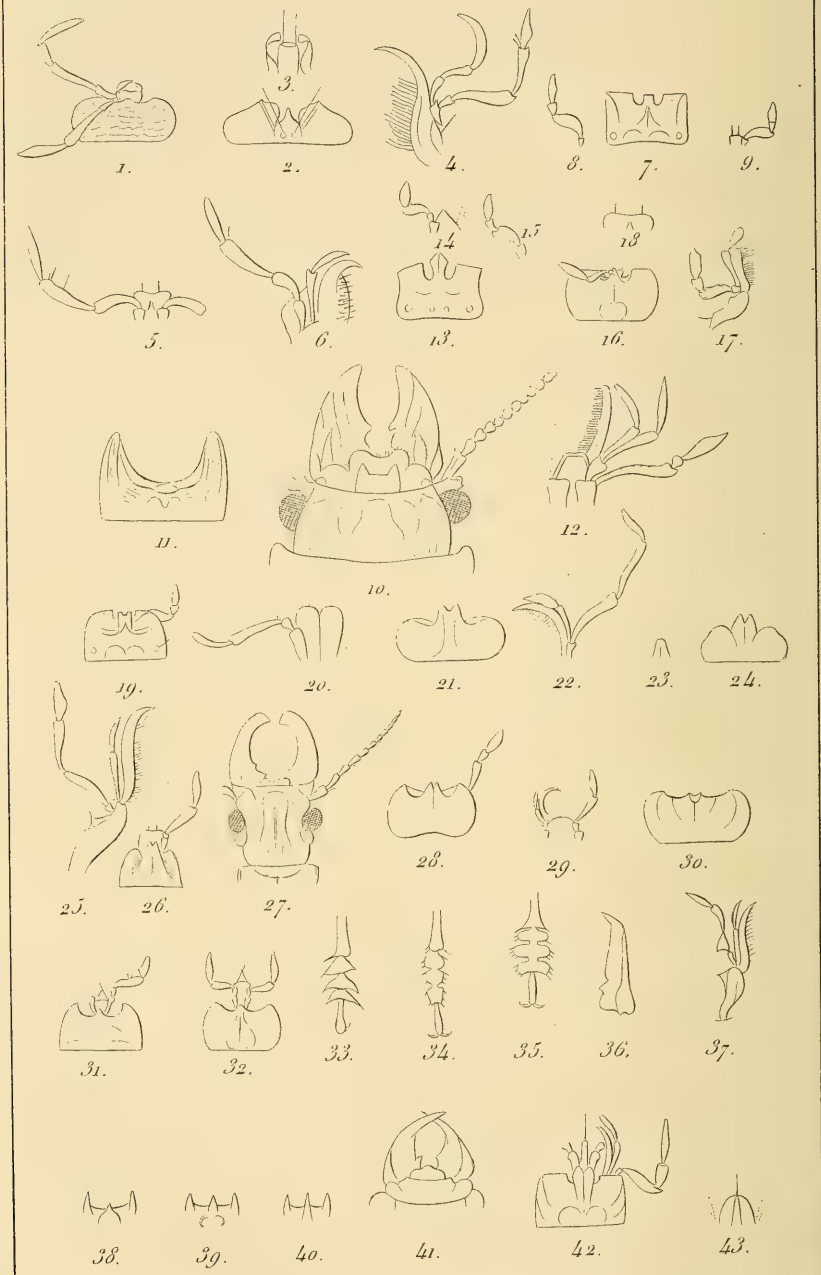
» 71. *Inna punctulata.*

» 72. Id. Tête.

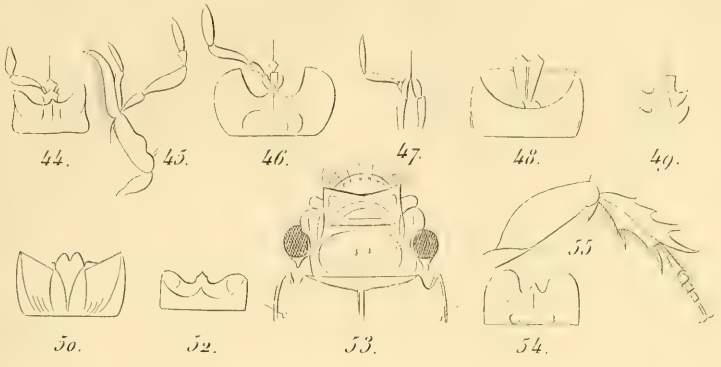
» 73. Id. Menton, languette, machoire et palpes.

» 74. Id. Patte intermédiaire.

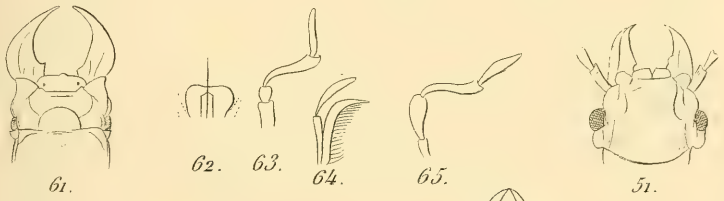
» 75, 76 et 77. *Eucheila flavilabris.*



Ptz. del. Lith. H. Dessain.


44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
52.
53.
54.
55.

56.
57.
58.
59.
60.


61.
62.
63.
64.
65.
51.
66.
67.
68.
69.
70.

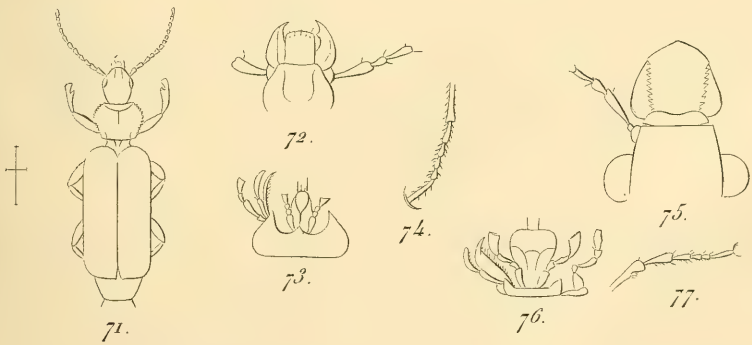

71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.

TABLE ALPHABÉTIQUE.

Acephorus. 4
Ardistomis. 4-71
Aspidoglossa. 4-
Bohemannia. 3-17
» gigantea. 18

Camptodontus. 3
» Cayennensis. 5
» falcatus. 8
» Lacordairei. 6
» puncticeps. 6
» Reichei. 6
Carenum. 3
Climax. 3-11
» fissilabris. 11
Clivina. 4-29
» Amazonica. 33-57
» Americana. 32
» anceps. 31-50
» *angustata*. Boh. 34
» armata. 32
» Assamensis. 31
» atrata. 32-54
» Australasiæ. 31
» basalis. 31-38
» bicornuta, 31-45
» bidentata. 33-
» bifoveata. 33-62
» bipustulata. 32
» bisignata. 32
» Bohemanni. 30-34
» caffra. 33-65
» castanea. 31-35
» collaris. 30
» columbica. 33
» confusa. 32
» convexicollis. 32-52
» corvina. 32
» cribricollis. 31-47
» cruciata. 32
» dentifemorata. 32
» dentipes. 32
» dissimilis. 33

Clivina distigma. 32
» Dumolinii. 31-35
» elegans. 31-44
» elongata. 33-
» ephippiata. 31-39
» extensicollis. 31
» fasciata. 32-51
» ferrea. 31
» fissipes. 32-55
» fosfor. 30
» foveiceps. 31
» foveicollis. 33-61
» foveilabris. 33-59
» Georgiana. 33
» grandis. 30-33
» hilaris. 33-55
» humeralis. 31-48
» Indica. 31-35
» Javanica. 33
» Klugii. 32
» latimana. 33
» laticeps. 33
» Lernæa. 32-52
» lobata. 31
» longipennis. 33-57
» maculata. 32-51
» mandibularis. 31-34
» melanaria. 32-31
» mordax. 33-67
» Natalensis. 33-63
» obesicollis. 33-66
» oblongicollis. 31-40
» ovipennis. 30
» Parryi. 33-60
» picea. 32
» *picipes*. 32-51
» planiceps. 31-42
» scripta. 30
» sculptifrons. 32
» Senegalensis. 31-35
» sobrina. 31
» stigmula. 32
» stricta. 31-49

Clivina striatopunctata. 32
» suturalis. 31-39
» testacea. 31
» tuberculata. 32
» urophthalma. 31-37
» vulgivaga. 31
» ypsilon. 30-33

Dacca. 4-68
» forcipata. 68
Dyschirius. 4-70
» rufus. 70
» abbreviatus. 71-

Emydopterus. 3
Eucheila. 72
Gnathoxys. 3

Inna 71
» punctata. 72

Lachenus. 4
Listropus. 3-13
» brevipennis. 13

Mesus. 4-23
» rugatifrons. 23

Oxygnathus. 3
» elongatus. 5
Oxystomus. 3

Pasimachus. 3
Pyramis. 4
Scapterus. 3-16
» Guerinii. 16
Scapterus longicollis. 16
» sulcatus. 17
Scaritides. 2
Schizogenius. 3
» amphibius. 24
» apicalis. 24-25
» canaliculatus. 24
» capitalis. 24-25
» crenulatus. 24
» depressus. 24
» dyschirioides. 24-28
» exaratus. 24-27
» ferrugineus. 24
» frontatis. 24
» gracilis. 24
» lineolatus. 24
» pluripunctatus. 24
» quinquesulcatus. 24-26
» simplex. 24
» strigicollis. 24
» sulcatus. 24
» sulcifrons. 24
» sulculatus. 24
» tristriatus. 24
» xanthopus. 24
Scolyptus. 4-21
» angustatus. 22
» curvidens. »
» microphthalmus. »
Stratiotes. 3-8
» clivinoides. 9
» iracundus. »
» latidens. 10
» longicollis. »
Systenognathus. 4-18
» porosus. 19

II. — *Nouvelle méthode pour déterminer le centre de gravité des corps.*

PAR

E. TERSSEN.

(Suite.)

Centre de gravité des corps de révolution qui n'existent qu'en projet.

Dans la première partie de ce travail, insérée dans le Tome 16 des *Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége*, nous avons dit comment on peut, au moyen de la Balance centroscopique, déterminer le centre de gravité o de la section génératrice d'un corps de révolution, *fig.* 7. Mais la projection o' de ce point sur l'axe de révolution n'est généralement pas le centre de gravité du solide. Pour que le point o' fût le centre de gravité du solide, il faudrait que, le corps étant censé coupé en deux par le plan décrit par la droite oo', les moments des deux parties, pris par rapport à ce plan, fussent égaux; ce qui n'a lieu que par exception.

Nous nous proposons maintenant de déterminer le centre de gravité d'un corps de révolution qui n'existe qu'en projet, ou dont on n'a que le tracé, ou bien encore dont les dimensions sont trop considérables pour la Balance.

Considérons un corps de révolution de forme quelconque mais homogène, et supposons connue la position de son centre de gravité. Partageons ce corps, par la pensée, en tranches infiniment minces perpendiculaires à l'axe de révolution. Désignons par X', X''... les rayons des tranches situées au-dessus du centre de gravité; par X_1, X_2... les rayons des tranches situées au-dessous; et par Y', Y''... Y_1, Y_2... les distances des tranches au centre.

En prenant les moments des volumes élémentaires du corps, par rapport au centre de gravité, et en supprimant les facteurs communs, on a l'égalité

$$X'^2 Y' + X''^2 Y'' + \cdots = X_1^2 Y_1 + X_2^2 Y_2 + \cdots$$

Or, cette égalité n'est pas altérée lorsqu'on multiplie par un facteur commun, plus grand ou plus petit que l'unité, soit toutes les quantités X, soit toutes les quantités Y, soit toutes ces quantités à la fois. Si l'on multiplie les quantités X, la hauteur du corps ne change pas, et son centre de gravité reste au même point de son axe. Si l'on multiplie les quantités Y, le corps s'allonge ou se raccourcit, suivant que le facteur commun est plus grand ou plus petit que l'unité; mais le centre de gravité du corps conserve sa position relative sur l'axe, c'est-à-dire qu'il divise l'axe en parties proportionnelles. Le même effet se produit lorsqu'on multiplie en même temps, par le même facteur ou par deux facteurs différents, d'une part les quantités X, et d'autre part les quantités Y.

Ainsi donc, un corps de révolution étant donné, il existe une infinité d'autres corps de révolution, d'ailleurs très-dissemblables, qui tous ont leur centre de gravité semblablement placé. Tels sont, par exemple, les cônes droits à base circulaire, qui ont leur centre de gravité à $\frac{1}{4}$ de leur hauteur à partir de la base, quelle que soit la hauteur et quel que soit le rayon de la base. Pour abréger, nous nommerons ces corps *isocentriques*.

Considérons actuellement une figure plane ayant un axe de symétrie. Soient x', x''... les demi-longueurs des tranches infiniment minces perpendiculaires à l'axe, situées au-dessus du centre de gravité; x_1, x_2... les demi-longueurs des tranches situées au-dessous; y', y''... y_1, y_2... les distances des tranches au centre. On a

$$x' y' + x'' y'' + \cdots = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots$$

Or, si nous supposons que les quantités y, qui entrent dans cette égalité, soient respectivement égales aux quantités Y, qui entrent dans l'égalité des moments d'un corps de révolution, que faut-il pour que ces deux égalités soient identiques?

Evidemment, il faut que l'on ait

$$x' = X'^2, \quad x'' = X''^2 \cdots x_1 = X_1^2, \quad x_2 = X_2^2 \cdots$$

Et alors nous aurons une figure plane symétrique de même hau-

teur que le corps dont il s'agit ; et si nous faisons coïncider l'axe de symétrie de la figure et l'axe de révolution du corps, le centre de gravité de la figure se confondra avec le centre de gravité du corps. C'est ce que nous indiquerons en disant que la figure plane et le corps de révolution sont *isocentriques*.

Mais la figure plane ainsi construite n'est pas la seule figure plane isocentrique du corps; car, par la même raison qu'un corps de révolution admet une infinité de formes isocentriques, il y a aussi une infinité de figures planes isocentriques qui correspondent à un corps de révolution donné. Comme toute figure plane ayant un axe de symétrie peut être considérée comme la section méridienne d'un corps de révolution, on peut définir les figures planes isocentriques d'un corps de révolution comme suit :

Les figures planes isocentriques d'un corps de révolution sont les sections méridiennes d'autres corps de révolution, que l'on obtient en élevant au carré les rayons des différentes tranches du premier corps et des corps isocentriques avec celui-là.

En résumé, on voit, par ce qui précède, que, quelles que soient les dimensions d'un corps de révolution, la recherche de son centre de gravité peut se ramener à celle du centre de gravité d'une figure plane de telle grandeur qu'on voudra, et que dès-lors le problème peut se résoudre, dans tous les cas, au moyen de la Balance centroscopique.

Avant d'aller plus loin, nous construirons les figures planes isocentriques du cylindre, du cône et de l'hémisphère ; et pour simplifier, nous prendrons l'axe de révolution de chacun de ces corps pour axe de symétrie de la figure isocentrique.

Soient AB le rayon d'un cylindre droit à base circulaire, et AC sa hauteur, *fig.* 9. Les rayons de toutes les tranches perpendiculaires à l'axe du cylindre étant égaux à AB, toutes les abscisses de la figure plane isocentrique sont égales à $AD = n \cdot \overline{AB}^2$, n étant un facteur numérique arbitraire ; et cette figure est un rectangle tel que DEE'D'. En effet, quelles que soient les dimensions d'un rectangle, son centre de gravité est au milieu de son axe de symétrie, comme le centre de gravité du cylindre est au milieu de son axe de révolution.

En second lieu, soient AB le rayon de la base d'un cône droit, et AC sa hauteur, *fig.* 10. Si nous considérons une tranche quelconque II' dont le rayon est FI, l'abscisse correspondante de la

figure isocentrique est $FH = n.\ \overline{FI}^2$; une autre tranche BB′, dont le rayon est AB, donne une abscisse $AD = n.\ \overline{AB}^2$; et les lignes CHD, CH′D′, sont des branches de parabole.

Prenons le sommet C pour origine des coordonnées, et désignons par a la tangente trigonométrique de l'angle ACB, par X, Y les coordonnées du point I, par x, y celles du point H. Nous aurons

$$Y = \frac{1}{a} X$$

$$y = Y$$

$$x = n X^2$$

D'où

$$y^2 = \frac{1}{na^2} x$$

Ce qui est l'équation d'une parabole dont le sommet est à l'origine, et dont l'axe est perpendiculaire à l'axe du cône.

Il s'agit de trouver le centre de gravité de la figure DHCH′D′, ou bien, ce qui revient au même, à cause de la symétrie, l'ordonnée CG du centre de gravité de la demi-figure ADHC.

Le moment de l'élément de surface FH, pris par rapport à l'axe des abscisses, étant

$$x\,dy\,.\,y = na^2 y^3\,dy\,,$$

La somme des moments est

$$na^2 \int y^3\,dy = \tfrac{1}{4}\,n a^2\,y^4 + C$$

Et le moment de la surface ADHC est

$$\tfrac{1}{4}\,na^2\ \overline{AC}^4$$

Divisant ce moment par la surface ADHC, qui est égale au tiers de la surface du rectangle ADEC, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}\,(AC \times n.\ \overline{AB}^2)$, et observant que

$$a = \frac{AB}{AC}\,,$$

On trouve

$$CG = \tfrac{3}{4}\,AC.$$

Cette distance étant exactement la même que celle du centre de gravité du cône à partir du sommet, on voit que la figure interparabolique DHCH'D' est réellement une figure isocentrique du cône.

Soient enfin A le centre d'une hémisphère, et AC son axe de révolution et son rayon, *fig.* 11. Nous aurons, comme pour le cône, $FH = n.\overline{FI}^2$, $AD = n.\overline{AB}^2$, et ainsi de suite. En prenant pour origine le centre de la sphère A, et en désignant par r le rayon de la sphère, par X, Y les coordonnées du point I, par x, y celles du point H, on a

$$y = Y = \sqrt{r^2 - X^2}$$
$$x = nX^2$$

D'où $$y^2 = r^2 - \frac{1}{n}x.$$

Ce qui est l'équation d'une parabole dont le sommet est sur l'axe des abscisses, à la distance $nr^2 = n.\overline{AB}^2$ de l'origine, et qui coupe l'axe des ordonnées au point C.

Pour trouver le centre de gravité de la figure DHCH'D', il suffit, à cause de la symétrie, de connaître l'ordonnée AG du centre de gravité de la demi-figure ADHC. Or, l'ordonnée du centre de gravité de la figure CHDE est, on vient de le voir, $\frac{3}{4}DE = \frac{3}{4}AC$, et l'ordonnée du centre de gravité du rectangle ADEC est $\frac{1}{2}AC$. On a donc l'égalité

$$ADEC \times \tfrac{1}{2}AC = CHDE \times \tfrac{3}{4}AC + ADHC \times AG.$$

Ou bien, en observant que CHDE est le tiers du rectangle ADEC, et ADHC les deux tiers,

$$\tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{3}.\tfrac{3}{4}AC + \tfrac{2}{3}AG;$$

D'où $$AG = \tfrac{3}{8}AC.$$

Le centre de gravité de l'hémisphère étant aussi à $\frac{3}{8}AC$ à partir du centre, on en conclut que la figure parabolique DHCH'D' et l'hémisphère sont réellement isocentriques.

Remarque. Si le centre de l'arc de cercle générateur BIC ne se trouvait pas sur l'axe de révolution, la courbe DHC serait un arc de parabole d'un ordre supérieur. Mais cette distinction n'a aucune importance, du moment que l'on construit la courbe par points. Ce

mode de construction s'applique d'ailleurs à toutes les courbes quelles qu'elles soient.

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour construire la figure isocentrique de l'obus ogivo-cylindrique, dont la section génératrice est représentée *fig.* 8. Cette section se compose de lignes droites parallèles à l'axe de révolution, de lignes droites perpendiculaires à l'axe, d'une ligne oblique, et d'arcs de cercle. D'après ce qu'on a vu plus haut, les droites parallèles ou perpendiculaires à l'axe restent des lignes droites dans la figure isocentrique, mais les obliques et les arcs de cercle deviennent des arcs de parabole. Or, comme il suffit d'un point pour fixer la position d'une droite parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée, toute l'opération se réduit donc à tracer les arcs de parabole qui correspondent aux arcs de cercle et à la ligne oblique de la section génératrice. Il va du reste sans dire qu'il suffit de construire la moitié de la figure isocentrique, à cause de la symétrie; et c'est ce que nous ferons toujours dans la suite.

A cet effet, on divise en un certain nombre de parties, la projection de chaque arc de cercle ou ligne oblique sur l'axe de la section génératrice, et l'on mène une abscisse par chaque point de division; on prend la longueur de chaque abscisse, sans s'astreindre à tenir compte de l'échelle du dessin, et on l'élève au carré; on multiplie tous les carrés par un facteur commun plus petit que l'unité, afin d'avoir des dimensions en rapport avec celles de la balance; et l'on joint les points ainsi obtenus par une ligne courbe qui est l'arc de parabole dont il s'agit. Tous les arcs de parabole étant construits, on complète la figure isocentrique en traçant les lignes droites parallèles ou perpendiculaires à l'axe, *fig.* 12.

En se servant d'une table des carrés pour élever les abscisses au carré, et en choisissant un facteur commode pour réduire les carrés des abscisses, tels que 0.1, 0.02, 0.005 etc., l'opération marche rapidement. Dans l'exemple cité, on a pris les abscisses de la section génératrice en millimètres, et l'on a multiplié leurs carrés par $n = 0.02$; ce qui a donné, pour l'abscisse maximum $o'd'$ de la figure isocentrique, une longueur peu différente de celle de l'abscisse correspondante od de la section génératrice.

On connaît, par la première partie de ce travail, la manière de déterminer le centre de gravité d'une figure plane, au moyen de la balance centroscopique. En appliquant ce procédé à la demi-figure isocentrique de l'obus, on trouvera, par une double pesée, la

distance de son centre de gravité à l'abscisse $o'd'$ dont la position est connue ; on en déduira immédiatement le centre de gravité G de la figure entière, et par suite celui du projectile.

Corps de révolution imparfaits ou hétérogènes.

Parmi les corps de révolution dont il est utile de connaître le centre de gravité, il y en a qui présentent des parties saillantes ou rentrantes qui ne règnent pas sur tout leur pourtour, tels que les tourillons des bouches à feu ; d'autres, comme certains projectiles oblongs, se composent de deux métaux. Nous allons examiner ces deux cas, auxquels on pourra aisément ramener tous les cas particuliers qui peuvent se présenter.

Soient CDEF, *fig.* 13, la section génératrice d'un cylindre creux, que nous supposerons faire partie d'une bouche à feu, et C'D'E'F' la partie correspondante de la figure plane isocentrique de la pièce ; en sorte que l'on ait $AC' = n \cdot \overline{AC}^2$, $AD' = n \cdot \overline{AD}^2$.

Soient AB l'axe de la bouche à feu, PQ l'axe des tourillons, et OV la distance entre ces deux axes.

Il est évident qu'à cause de la distance OV, le centre de gravité général de la bouche à feu ne se trouve pas sur l'axe AB, comme celui du corps de la pièce, mais un peu au-dessous de cet axe. Toutefois l'abaissement du centre de gravité général par rapport à AB est toujours une très-petite quantité que l'on peut négliger. Nous ne nous occuperons donc ici que de la projection G du centre de gravité général sur l'axe de la bouche à feu.

Cela posé, il est facile de voir que l'on peut, sans déplacer le point G, donner aux tourillons et à leurs embases telle forme que l'on voudra, pourvu que leur volume reste le même, et que leur centre de gravité ne sorte pas du plan perpendiculaire à AB passant par PQ. Or, si l'on transforme les deux tourillons et leurs embases en un cylindre unique équivalent, la figure isocentrique de ce cylindre sera un rectangle qu'il suffira d'ajouter à C'D'E'F', où et comme on voudra, pourvu que son centre de gravité se trouve sur la droite PQ.

Désignons par d le diamètre des tourillons, par D celui des embases, par l la longueur des tourillons, par L la longueur de la génératrice inférieure des embases et par σ l'aire de la figure mixtiligne XYZ, formée d'un triangle rectangle et d'un segment de cercle.

Menons tangentiellement à l'une des embases deux plans per-

pendiculaires à AB, et deux plans perpendiculaires aux deux premiers : nous aurons un parallélipipède rectangle circonscrit, dont le volume s'obtiendra en retranchant du parallélipipède rectangle $D^2 L$ le prisme σD, construit sur la figure mixtiligne XYZ avec D pour hauteur. Le cylindre inscrit étant au parallélipipède circonscrit comme $\pi : 4$, le volume de l'embase sera par conséquent $\frac{1}{4}\pi(D^2 L - \sigma D)$, et celui des deux embases et des deux tourillons $\frac{1}{2}\pi(D^2 L - \sigma D) + \frac{1}{2}\pi d^2 l$.

Soient H la hauteur d'un cylindre droit équivalent, et D son diamètre, *fig.* 13bis, on aura :

$$\frac{1}{4}\pi D^2 H = \frac{1}{2}\pi d^2 l + \frac{1}{2}\pi(D^2 L - \sigma D);$$

D'où
$$H = 2\left(\frac{d^2}{D^2} l + L - \frac{\sigma}{D}\right).$$

Pour construire la figure isocentrique de ce cylindre, dans les mêmes conditions que celle du corps de la pièce, il faut prendre $KM = n\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} n D^2$, et $KU = H$. Cette figure est par conséquent le rectangle KMTU, qu'il suffit de transporter en K'M'T'U' pour avoir la figure isocentrique complète de la bouche à feu.

Remarque. — Lorsque la partie de la bouche à feu où se trouvent les embases des tourillons est un tronc de cône, la surface σ est variable. Dans ce cas, on aura une approximation suffisante en prenant la valeur de σ dans le plan PQ perpendiculaire à AB.

Considérons maintenant un projectile ogivo-cylindrique composé de deux métaux : fonte de fer et plomb.

Soient A la projection du projectile avant l'emplombage, et B la projection du projectile après l'emplombage, *fig.* 14. On voit que les parties en plomb consistent en trois anneaux P, reliés par une chemise ou enveloppe cylindrique Q, et par quatre petits prismes R disposés sur deux génératrices diamétralement opposées du projectile. On voit aussi que, par suite de l'existence de ces prismes, le projectile n'est pas un corps de révolution parfait; mais que néanmoins son centre de gravité se trouve sur son axe.

En négligeant d'abord les parties prismatiques R, la figure plane isocentrique de A est une figure telle que C, abstraction faite des parties ombrées, dans laquelle on a $d'e' = n \cdot \overline{de}^2$, $d'f' = n \cdot \overline{df}^2$, et ainsi de suite. Les parties ombrées de cette figure représentent les

parties en plomb du projectile ; et voici comment on les construit :

Soient $\delta = 6.95$ la densité de la fonte, et $\delta' = 11.35$ celle du plomb ; d'où $\frac{\delta'}{\delta} = 1.65$

Si les parties P et Q étaient en fonte, la ligne $g\,i$ de la projection B deviendrait la ligne $g'\,i'$ de la figure C, et l'on aurait $\overline{d'\,i'} = n \cdot \overline{d\,i}^2$. Dans cette hypothèse, les anneaux P sont représentés dans la figure isocentrique par les rectangles S, dont la largeur est $f'\,i'$, et la chemise Q par les rectangles T, dont la largeur est $k'\,g'$. Or, pour que les rectangles S et T représentent des parties en plomb, au lieu de parties en fonte, il suffit évidemment de multiplier leur largeur par $\frac{\delta'}{\delta}$; et alors la largeur des rectangles S devient $f'\,i''$, et celle des rectangles T devient $k'\,g''$.

Quant aux prismes R, qui forment des parties rentrantes par rapport à la fonte, et saillantes intérieurement par rapport à la chemise de plomb, si l'on désigne leur largeur par u, leur profondeur par v, et leur hauteur par h, chaque prisme est l'équivalent d'un cylindre droit de même hauteur, dont la base est $\pi r^2 = u\,v$, et dont la figure isocentrique est facile à construire. Mais il est plus simple de réunir les quatre cylindres en un cylindre unique équivalent, ayant son centre de gravité au centre de gravité o des quatre prismes. En donnant à ce cylindre unique la même hauteur h, sa base est $\pi r^2 = 4\,u\,v$, et sa figure isocentrique est un rectangle dont la base est, pour la fonte, $n\frac{4\,u\,v}{\pi}$, et pour le plomb $n\frac{4\,u\,v}{\pi}\frac{\delta'}{\delta}$. Le premier de ces rectangles doit être retranché de la figure C, et le second doit y être ajouté. Donc la figure isocentrique du projectile sera complète, si l'on y ajoute le rectangle M dont la base est $n\frac{4\,u\,v}{\pi}\left(\frac{\delta'}{\delta} - 1\right) = 0.8\,n \cdot u\,v$, et dont h est la hauteur.

Note sur la valeur de n. — On peut construire directement la figure isocentrique du prisme $4\,u\,v \cdot h$, de l'exemple précédent ; mais il faut, dans ce cas, modifier la valeur de n.

En effet, soient πX^2 une tranche d'un corps de révolution, et $X\,Z$ une tranche d'un corps prismatique ou pyramidal. Si l'on n'introduit aucun facteur étranger, les abscisses des figures isocentriques qui correspondent à ces tranches sont respectivement

$x = \frac{1}{2}\pi X^2$ et $x' = \frac{1}{2} X Z$. Et les deux figures isocentriques sont comparables, c'est-à-dire que leurs surfaces sont entre elles comme les volumes des corps. Mais on peut évidemment multiplier les abscisses de ces deux figures par un même nombre N, sans que ces figures cessent d'être isocentriques et comparables ; et alors on a

$$x = \tfrac{1}{2}\pi N \cdot X^2,$$

$$x' = \tfrac{1}{2} N \cdot X Z.$$

Comme les corps de révolution sont notre objectif principal, posons, pour simplifier, $\frac{1}{2}\pi N = n$, d'où $N = \frac{2n}{\pi}$, et substituons ces valeurs. Il vient

$$x = n X^2,$$

$$x' = \frac{n}{\pi} X Z.$$

Ainsi donc, si n est le facteur commun au moyen duquel on a construit la figure isocentrique d'un corps de révolution, $\frac{n}{\pi}$ est le facteur qu'il faut employer pour construire *directement* la figure isocentrique d'un prisme ou d'une pyramide, si l'on veut que les deux figures soient comparables, et puissent se composer en une seule.

En appliquant ceci au prisme $4uv \cdot h$, la base du rectangle isocentrique est $\frac{n}{\pi} 4uv$; ce qui est identiquement la même expression que celle que nous avons trouvée en convertissant d'abord le prisme en un cylindre équivalent.

Poids du solide déduit de la figure isocentrique.

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons déterminé le poids du solide en opérant sur sa section génératrice, et en appliquant la règle de Guldin. Maintenant que nous avons la figure isocentrique du corps, nous pouvons évaluer son poids directement et d'une manière plus générale ; car la méthode que nous allons indiquer s'applique non-seulement aux corps de révolution parfaits, mais aussi aux corps de révolution imparfaits et à ceux composés de plusieurs matières.

En conservant les notations employées précédemment, le volume

élémentaire d'un corps de révolution est $\pi X^2 dY$, et la surface élémentaire de la figure isocentrique est $2x\,dy$. Mais comme nous nous bornons à construire la moitié de la figure isocentrique, la surface élémentaire est simplement $x\,dy$. Désignant le volume total par V et la surface totale de la demi-figure par S, on a

$$V = \pi (X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_m^2)\, dY\,;$$
$$S = (x_1 + x_2 + \cdots x_m)\, dy.$$

Mais par construction, $x = nX^2 \ldots$ et $y = Y$. Divisant le volume par la surface, on a par conséquent

$$\frac{V}{S} = \frac{\pi}{n};$$

D'où

$$V = \frac{\pi}{n} S.$$

C'est-à-dire que *le volume d'un corps de révolution équivaut à celui d'un prisme droit, dont la figure isocentrique de ce corps est la base, et dont* $\frac{\pi}{n}$ *est la hauteur.*

Prenons pour exemple le cylindre, le cône et l'hémisphère dont les figures isocentriques sont représentées *fig.* 9, 10 et 11. Il est aisé de voir que les surfaces des figures isocentriques sont :

Pour le cylindre. . . . . $ADEC = n \cdot \overline{AB}^2 \times AC$;
Pour le cône. . . . . $ADHC = \frac{1}{3} n \cdot \overline{AB}^2 \times AC$;
Pour l'hémisphère . . . . . $ADHC = \frac{2}{3} n \cdot \overline{AB}^3$.

Or, il suffit évidemment de multiplier ces surfaces par $\frac{\pi}{n}$ pour avoir les volumes des corps dont il s'agit.

On a vu, dans la première partie, que si p est le poids d'une surface S, et p' celui d'un cercle d'un décimètre de diamètre du même papier, on a :

$$S = \frac{\pi}{4} \frac{p}{p'} \text{ décimètres carrés;}$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{p}{p'} \text{ 100 centimètres carrés;}$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{p}{p'} \text{ 10000 millimètres carrés}$$

Supposons d'abord que la figure isocentrique ait été construite en prenant les abscisses X_1, X_2, X_3 . . . de la section génératrice en décimètres : soient p_1 le poids de la figure isocentrique dans cette hypothèse, P le poids du corps de révolution, et δ sa densité ou le poids d'un décimètre cube. On a

$$V = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p_1}{p'} \text{ décimètres cubes}$$

$$P = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p_1}{p'} \delta \text{ kilogrammes.}$$

Supposons ensuite qu'on ait pris les abscisses de la section génératrice en centimètres, et soit p_2 le poids de la figure isocentrique dans cette hypothèse. Le poids d'un centimètre cube étant $\frac{\delta}{1000}$, on a :

$$V = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p_2}{p'} \; 100 \text{ centimètres cubes;}$$

$$P = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p_2}{p'} \; \frac{\delta}{10} \text{ kilogrammes.}$$

Supposons enfin qu'on ait pris les abscisses en millimètres, et soit p_3 le poids de la figure isocentrique. Le poids d'un millimètre cube étant $\frac{\delta}{1000000}$, on a

$$V = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p_3}{p'} \; 10000 \text{ millimètres cubes;}$$

$$P = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p_3}{p'} \; \frac{\delta}{100} \text{ kilogrammes.}$$

Ainsi donc, l'expression du poids du solide diffère d'après l'unité dont on a fait choix pour construire la figure isocentrique ; ce qui est naturel, puisque la surface de la figure et par conséquent son poids dépendent de cette unité. En effet, il ne faut qu'un peu d'attention pour se convaincre que, si n a la même valeur dans les trois hypothèses, p_2 est dix fois plus grand que p_1, et p_3 cent fois plus grand que p_1. Or, si l'on remplace p_2 et p_3 par leur valeur en fonction de p_1, les trois expressions du poids du solide deviennent identiques ; ce qui doit être.

Comme application numérique, proposons-nous de déterminer le

poids de l'obus ogivo-cylindrique dont la section génératrice est représentée *fig.* 8, et la figure isocentrique *fig.* 12. Ce poids ayant déjà été obtenu par la loi de Guldin, on verra jusqu'à quel point les résultats pratiques des deux méthodes s'accordent.

La figure isocentrique du projectile ayant été construite en prenant les abscisses de la section génératrice en millimètres, et en faisant $n = 0.02$, on a :

$$P = \frac{\pi}{0.02} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{p_3}{p'} \cdot \frac{\delta}{100} \text{ kilogrammes.}$$

Le poids d'un cercle d'un décimètre de diamètre du papier Bristol dont on s'est servi est $p' = 3^{gr}.15$; celui de la figure isocentrique est $p_3 = 1^{gr}.935$; et la densité de la fonte est estimée à 6.95. Substituant ces valeurs, on trouve

$$P = \frac{\pi^2}{0.08} \cdot \frac{1.935}{3.150} \cdot 0.0695$$

$$P = 5^{k}.267.$$

D'après la première méthode, on a trouvé $P = 5^{k}.274$. La différence n'est donc que de 7 grammes, ou d'environ $\frac{1}{753}$ du poids du corps.

Il reste à dire comment on tient compte de l'échelle du dessin dans l'évaluation du poids du solide. Si la section génératrice d'où l'on a déduit la figure isocentrique est de grandeur naturelle, comme nous l'avons supposé dans l'exemple précédent, le poids donné par la formule est le poids réel du corps. Si la section génératrice est à l'échelle $\frac{a}{b}$, et que l'on ait construit la figure isocentrique sans en tenir compte, le poids donné par la formule est celui du corps réduit, et il faut le multiplier par $\left(\frac{b}{a}\right)$ pour avoir le poids réel. Par exemple, si l'on voulait déterminer le poids du projectile ogivo-cylindrique d'après la *fig.* 12, on obtiendrait le poids du corps réduit aux dimensions de la *fig.* 8; et comme cette dernière est à l'échelle $\frac{6}{10}$, il faudrait multiplier le résultat par $\left(\frac{10}{6}\right)^3$.

Mais il peut arriver que, pour la commodité de l'opération, et tout en construisant la figure isocentrique, il soit nécessaire de réduire la hauteur de la section dans le rapport $c : d$. Dans ce cas, si la section est de grandeur naturelle, le poids obtenu doit être simplement multiplié par $\frac{d}{c}$; mais si la section est déjà réduite à l'échelle $\frac{a}{b}$, le poids donné par la formule doit être multiplié par $\frac{d}{c}\left(\frac{b}{a}\right)^3$.

Ces règles s'expliquent facilement; nous n'y insisterons pas davantage, et nous terminerons par quelques mots relativement au poids des corps de révolution imparfaits ou hétérogènes.

D'abord, en ce qui concerne les corps de révolution imparfaits, tels que le tronçon de bouche à feu avec tourillons et embases de tourillons, *fig.* 13, il est clair que le rectangle K'M'T'U' de la figure isocentrique représente les tourillons et leurs embases, au même titre que le rectangle C'D'E'F' représente le tronçon cylindrique du corps de la pièce. En effet, ces deux figures ont été construites d'après le même principe, et avec le même facteur commun n. Il n'y a donc pas de doute que le poids donné par la formule ne soit le véritable poids du corps, y compris les tourillons.

Quant au corps de révolution composé de fonte et de plomb, *fig.* 14, rappelons-nous qu'après avoir construit les figures isocentriques des anneaux et de la chemise en plomb, comme si ces parties étaient en fonte de fer, on a ensuite augmenté leur largeur dans le rapport de la densité de la fonte à la densité du plomb. Ce qui revient évidemment à racheter par une augmentation du volume de ces parties, la perte de poids due à la substitution de la fonte au plomb.

Concluons donc que la formule donnée plus haut pour déterminer le poids des corps de révolution, est applicable à tous les cas qui peuvent se présenter.

E. TERSSEN, Major d'artillerie.

Fig. 9.

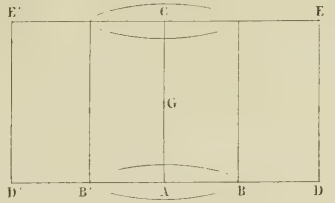


Fig. 10.

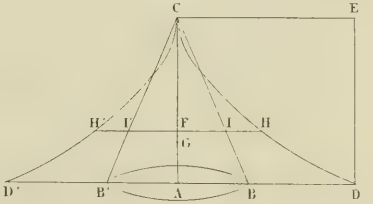


Fig. 11.

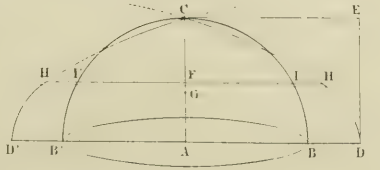


Fig. 13.

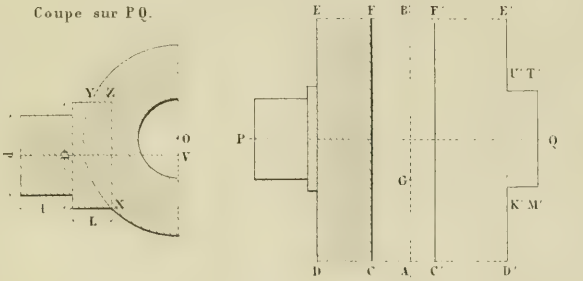


Fig. 13 bis.

Fig. 14.

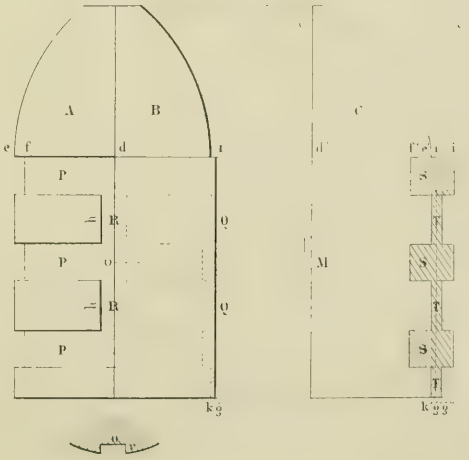
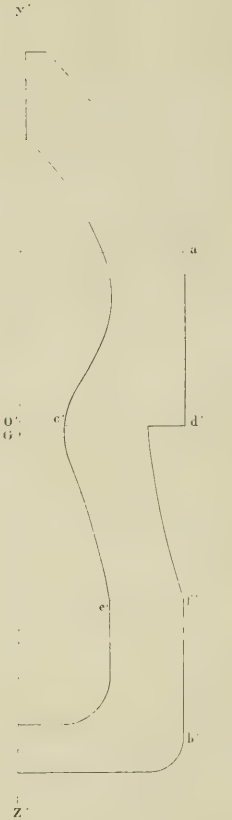


Fig. 12.



E.T.

III. — *Dissertation sur les vrais principes de l'Algèbre.*

PAR

A. J. N. PAQUE.

Introduction.

Il y a, au point de vue de la philosophie mathématique, un fait digne d'attention et devant lequel on s'est arrêté brusquement, sans en chercher l'explication, comme s'il pouvait être permis de bâtir sur un terrain dont on ne connaît pas la nature : on rencontre ainsi, dans la suite, une série de difficultés que l'on est obligé de vaincre à l'aide d'explications ou d'hypothèses, dont le moindre inconvénient est de déparer, par hétérogénéité, l'ensemble d'une science logique et rigoureuse par excellence.

Ce fait est le suivant.

L'Arithmétique, la Géométrie, la Statique ont reçu des définitions justes et claires même pour ceux qui sont étrangers aux spéculations mathématiques ; chacun se fait une idée précise de ces sciences ayant pour buts respectifs l'étude des propriétés des nombres, de l'étendue, ou de l'équilibre des forces. Mais la partie analytique ne présente plus la même lucidité dans ses définitions fondamentales, et pour s'en convaincre il suffirait de comparer et de discuter les définitions que les plus grands géomètres ont présentées de l'Algèbre : cet examen serait inutile ici, car toutes ces définitions sont généralement reconnues *obscures, peu intelligibles, insuffisantes et non caractéristiques.*

Des efforts infructueux que l'on a faits pour trouver une définition *complète*, coordonnée avec celles des autres parties des mathé-

matiques, nous croyons pouvoir conclure que l'on n'a pas encore entièrement saisi le véritable caractère de l'Algèbre, et que jusqu'à présent l'on n'a, philosophiquement parlant du moins, exécuté dans cette science que des *manipulations littérales*.

Il y a deux voies générales d'exploration mathématique, dont l'une étudie la *forme*, et l'autre la *valeur* des éléments des corps : entre ces deux voies il devrait toujours y avoir *correspondance immédiate et complète*, afin de permettre sans effort *le passage du concret à l'abstrait*.

Pour ne pas s'être placé à ce point de vue, on a été entraîné dans des *définitions de noms*, dont l'ensemble produit l'obscurité qui domine l'analyse, et parfois, la géométrie.

Au point de vue *concret*, c'est-à-dire de la *forme* ou de l'*étendue*, nous croyons qu'il faut d'abord saisir et mettre en évidence les deux grands modes de *translation* et de *rotation* suivant lesquels s'accomplit la génération des grandeurs, et distinguer ensuite avec soin le sens ou la direction générative du mode.

Au point de vue abstrait, on doit considérer en particulier la grandeur dans le mode et selon la direction qui l'a créée ; on effectue seulement alors sa comparaison avec une unité convenablement choisie.

Lorsque, pour concevoir la génération des grandeurs, on considère un point qui se meut, on reconnaît sans peine que ce point est SANS CESSE *soumis à deux influences, ou à deux forces*, dont les actions, DÉTERMINÉES ET CONTINUES, s'exercent ainsi à CHAQUE INSTANT, et font décrire, par la combinaison de leurs effets, le lieu réellement parcouru, c'est-à-dire la *trajectoire* du point.

Dans ce mouvement, et à un instant quelconque, si les forces qui sollicitent le point continuaient leur action, en *persistant* dans la détermination qui leur est alors *particulière*, la trajectoire deviendrait une ligne droite, c'est-à-dire le type d'un seul déplacement, ou d'une seule direction conservée invariablement.

C'est là le mouvement par TRANSLATION.

Mais, le plus souvent, les forces qui concourent au mouvement varient à chaque instant, suivant des lois *connues* ou *données* : il s'en suit que pour passer de l'une à l'autre de deux positions consécutives, le point générateur doit, dans une direction déterminée passant par la première, et en vertu d'une force de trans-

lation, avancer d'une certaine quantité, tandis que *simultanément* il se meut d'une quantité angulaire *convenable* pour abandonner la direction que la translation lui avait d'abord imposée.

Ce mouvement *angulaire* doit évidemment être regardé comme une ROTATION exécutée par le point mobile autour de chaque position qu'il acquiert.

L'étude approfondie des trajectoires curvilignes est du ressort de la Géométrie, et il n'y a pas lieu de s'en occuper ici; il nous *suffit* maintenant de constater et de faire comprendre que le mouvement d'un point a lieu par suite d'effets *simultanés et continus de translation et de rotation :* l'uniformité et la variation de ces actions, de natures si différentes, donnent lieu à toutes les espèces et à toutes les variétés de courbes possibles, tant planes que gauches.

Cet ordre d'idées permet d'établir A PRIORI les théories des quantités positives, négatives et imaginaires, et de dégager ainsi l'Algèbre de l'échafaudage d'absurdités plus ou moins sérieuses, dont on l'avait entouré jusqu'aujourd'hui.

Ce travail comprend trois parties, dont les deux premières exposent respectivement les lois analytiques des générations par translation et par rotation, et dont la troisième présente les conséquences principales des principes développés précédemment.

En parcourant rapidement la partie dogmatique de la science, nous rectifierons et nous généraliserons quelques points qui laissent plus ou moins à désirer.

PREMIÈRE PARTIE.

TRANSLATION ANALYTIQUE.

I.

Usage des lettres dans le calcul. — Caractère principal de l'Algèbre. — Correspondance entre l'opposition des directions et l'opposition des signes. — Quantités positives et négatives; nombres positifs, négatifs. — Règles des signes.

1. Afin de maintenir l'enchaînement des calculs et de rappeler les diverses parties du raisonnement, on remplace avantageusement les nombres par des lettres. Cette manière de représenter les grandeurs n'a rien de nouveau puisqu'en Arithmétique on en fait sans cesse usage, mais il importe, même en dehors de toute étude mathématique de se familiariser avec un semblable mode de représentation dont l'emploi est continuel aujourd'hui : en effet dans les collections d'espèce quelconque ne désigne-t-on pas par des lettres chacune des parties du tout, en attribuant à chaque lettre la valeur particulière et spéciale de l'objet correspondant.

2. L'Arithmétique et l'Algèbre tiennent de si près l'une à l'autre qu'il serait difficile, dès le principe, de donner de la seconde de ces sciences, une définition claire et précise : disons *seulement* ici, et pour le moment, que l'Algèbre ne consiste pas *uniquement* à faire usage de lettres dans les démonstrations, mais bien à *introduire d'une manière* EXPLICITE dans les calculs, *l'idée de direction*, c'est-à-dire *à considérer le mode suivant lequel s'accomplit la génération de la quantité par accroissement ou par décroissement ; à préciser par une notation convenable, le sens dans lequel cette génération a lieu.*

En Arithmétique on admet implicitement que la génération des grandeurs est ascendante, et par *voie de décomposition* on redescend ensuite l'échelle ou la série numérique ainsi formée : mais pourquoi cette décomposition semble-t-elle s'arrêter à l'unité, qui est le point de départ de l'échelle de formation? et dans cette série, qui représente les différents *accroissements* en nombre illimité, que l'on peut donner à une grandeur de *valeur quelconque*, pourquoi le *régime contraire de décroissement* n'est-il pas lui-même illimité, indéfini à partir du même point, c'est-à-dire de l'unité?

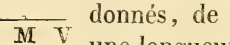
C'est parce que la comparaison des quantités a été faite au point de vue *particulier et spécial* de la *formation par accroissement.*

Un exemple, malheureusement devenu trivial nous fera mieux comprendre : une personne qui reçoit 5000 francs et qui en doit 2000, dit qu'elle n'a en réalité que 5000 — 2000 ou 3000 francs; mais si elle ne reçoit que 2000 et qu'elle doive 5000 francs, il est clair qu'après avoir soldé la somme de 2000 elle aura encore à *payer* 3000 francs : voilà donc deux sommes de 3000 francs qui sont loin d'être égales, puisque l'une d'elles exprime un accroissement et l'autre un décroissement, *par rapport à un état de fortune déterminé et quelconque.*

L'échelle des nombres ne présente nullement une distinction semblable, et l'on constate ainsi une lacune importante que l'on est toutefois parvenu à combler à l'aide d'interprétations qui, bien que rigoureuses mais *incomplètes*, ne sont rien autre chose que des détours regrettables.

5. Lorsqu'à propos de la formation des nombres nous parlons ainsi d'*accroissement* et de *décroissement*, nous *particularisons* l'expression de direction, propre à la génération par translation des grandeurs d'un ordre quelconque.

Sous une forme plus générale supposons la droite V sur laquelle deux points fixes A et P sont donnés, de telle sorte que AP ait une longueur l; considérant les deux points M et M′ équidistants de A sur cette droite, il viendra, en désignant par z la distance linéaire A M,



$$PM = l + z$$
$$PM' = l - z$$

Actuellement si nous remarquons que l'opposition des signes de z, dans ces deux égalités correspond, pour les lignes AM et AM', à une opposition de directions par rapport au point A pris pour origine, il est clair que l'on est conduit à cette loi générale et simple :

L'opposition de directions des grandeurs entraîne l'opposition de signes dans la représentation analytique de ces éléments.

Tel est le principe fondamental connu, en géométrie analytique, sous le nom de *principe de Descartes* : on doit le poser au début de l'Algèbre, parce qu'il est seul apte à mettre en évidence la vraie signification des deux espèces bien différentes de quantités dont l'analyse a à s'occuper.

4. Les grandeurs, considérées au point de vue de la valeur et de la direction, introduisent donc dans les calculs des nombres de mêmes signes ou de signes opposés, selon que les directions correspondantes de génération sont identiques ou contraires.

Il en résulte que pour rappeler la correspondance des oppositions de directions et de signes, on est conduit à donner le même signe (+) par exemple, aux quantités ayant une même direction et par suite à effectuer du signe (—) toutes les quantités dont la direction est opposée.

On comprend que nous aurons désormais deux espèces de quantités à soumettre au calcul.

Les quantités positives, qui précédées du signe +, admettent toutes la même génération déterminée ;

Les quantités négatives, précédées du signe —, et qui sont douées d'une génération commune inverse, ou contraire, de la précédente.

De là les *nombres positifs et négatifs*, dont la génération propre ou individuelle est la même, et qui ne diffèrent que par l'opposition de signes provenant de l'opposition de directions dans les grandeurs ; les signes + et — des nombres ont exactement les mêmes raisons d'être, et l'un n'a pas, au détriment de l'autre, le privilége de caractériser l'impossibilité.

5. Les quantités négatives ont donc *en mathématique* une existence aussi certaine et aussi rationnelle que les quantités positives, *dont elles ne diffèrent que par le sens ou la direction* ; et il est absurde de prétendre, comme on l'a fait si souvent, que les quantités douées du signe + sont supérieures à *zéro*, qui n'est pas même une quantité, tandis que les quantités possédant le signe —

sont inférieures à la même limite : les unes et les autres sont, chacune dans leur espèce, propres aux mêmes opérations suivant des lois *communes*; c'est seulement lorsque les deux genres se combinent, qu'un *calcul* spécial devient nécessaire, et qu'ainsi à côté de chaque opération fondamentale arithmétique et littérale vient se placer l'opération de même nom relative aux signes + et —, dont peuvent être affectés les éléments d'une question; c'est ainsi que l'on rencontre les *règles des signes*.

6. L'Algèbre se partage naturellement en deux parties dont la première est relative au *calcul littéral*, et établit les règles à suivre pour exécuter à l'aide des nouvelles notations, les principales opérations fondamentales de l'Arithmétique; et dont la seconde expose le *Calcul équationnel*, qui traite de la représentation et de la transformation des relations d'égalité ou d'inégalité, qui peuvent exister entre les grandeurs ou entre les nombres, alors que ces relations dépendent de certaines conditions accidentelles ou générales.

Le *calcul par équation* ayant sans cesse besoin du calcul littéral, c'est de ce dernier dont il faut d'abord faire l'étude.

Lorsque nous aurons fait connaître l'influence de la génération par rotation des grandeurs sur la représentation analytique, nous pourrons seulement, dans la troisième partie, obtenir de l'Algèbre une *définition concise, claire et complète*.

7. Le produit d'un certain nombre de *facteurs égaux* prend le nom de *puissance*; la *base* de cette puissance est le facteur répété par multiplication et le *degré* de la puissance est le nombre ou la quotité des facteurs égaux pris par *voie factorielle*; l'exposant peut donc être lui-même représenté par une lettre.

Considérant le produit d'une quantité quelconque N par la fraction $\frac{1}{d^n}$, c'est-à-dire

$$N \cdot \frac{1}{d^n} = \frac{N.1}{d^n} = \frac{N}{d^n}$$

On voit que cette opération revient à la division suivante,

$$N : d^n = \frac{N}{d^n}$$

Dans laquelle l'*exposant* n *indique le nombre de fois que la quantité* d *est prise comme* DIVISEUR; or comme la division n'est en

définitive qu'une soustraction rapide du même nombre, convenons immédiatement *pour rappeler cette origine soustractive du diviseur* de qualifier du signe (—) le degré de la puissance par laquelle on divise, et d'écrire ainsi, sous la forme factorielle,

$$N : d^n = N \cdot d^{-n}$$

Dès lors nous dirons que,

L'exposant est un nombre positif ou négatif, selon que la quantité qu'il affecte joue le rôle de facteur ou de diviseur.

Remarquons en passant que le changement de signes de l'exposant correspond encore à une opposition de générations des grandeurs, par les voies inverses de la multiplication et de la division.

8. On démontre en Arithmétique, (1) que l'*on élève un produit à une puissance en élevant chaque facteur à cette puissance*; on a eu d'après cela,

$$(a\,b\,c....)^n = a^n\,b^n\,c^n....$$

Actuellement si nous supposons que tous les facteurs, en nombre k, du produit $a\,b\,c...$ soient égaux à a, il viendra :

$$(a^k)^n = a^n\ a^n\ a^n....$$

Remarquant que a est contenu n fois comme facteur dans la puissance a^n, prise k fois par multiplication, on en conclut aisément que a est, en tout, kn fois facteur; par suite,

$$(a^k)^n = a^{kn}$$

D'où évidemment en extrayant la racine n^e pour retourner à la quantité primitive :

$$a^k = \sqrt[n]{a^{kn}}$$

Ce qui prouve que *pour extraire la racine n^e d'une puissance, il faut diviser le degré de la puissance par l'indice de la racine à extraire;* cette loi est générale en présence de la théorie des nombres incommensurables (2).

Il suit de là que, si l'on pose, p et q étant des nombres entiers,

$$x = \sqrt[q]{a^p}$$

(1) Voir notre *Arithmétique*, (p. 62).
(2) Voir notre *Arithmétique*, Liv. VI.

On aura

$$x = a^{\frac{p}{q}}$$

Voilà donc des *exposants* $\frac{p}{q}$ *fractionnaires*, suffisamment et clairement définis par *la racine d'indice égal au dénominateur d'une puissance, de degré égal au numérateur;* plus tard on aura à revenir avec détails sur ce point important, et l'on remarquera ici en passant que $\frac{p}{q}$ peut être incommensurable avec 1.

9. Il nous reste, pour compléter ce que nous avons à dire à propos de la définition générale de l'exposant, à considérer le *cas singulier* de la division d'une puissance quelconque a^n par elle-même.

Le quotient est évidemment égal à 1, puisque arithmétiquement parlant, 1 est le seul nombre qui multiplié par une quantité, donne pour produit cette même quantité.

On a donc

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Mais puisque l'exposant n, qui affecte le dénominateur, indique la division par a^n il en résulte que, chaque fois que a est pris par multiplication, il l'est également par division : a ne faisant pas ainsi partie du quotient *on a cherché à indiquer que* a *ne figure pas comme facteur* et l'on a trouvé naturellement l'expression a^o, à laquelle toutefois il faut attribuer la valeur

$$a^o = 1$$

Ce n'est donc que par suite d'une extension conventionnelle de notation que l'on a introduit en algèbre des quantités, ayant zéro pour exposant, et pour lesquelles la définition de l'exposant n'offrirait *à priori* aucun sens possible.

10. Sans considérer les exposants, l'expression est un *polynome*, si elle est composée de plusieurs parties séparées les unes des autres par le signe + ou par le signe —; ces diverses parties sont les *termes* du polynome.

Ainsi donc l'expression

$$-ab^2c + 11a^m b^{-3} - 9a^3b^5 - 2b^{-x} + \frac{7}{9}a^{\frac{3}{2}}x^{-p} - \sqrt[n]{a^5b^{-2}x^{-2}}$$

est un polynome, parce que, sans avoir égard aux signes qui peuvent entrer dans la composition des exposants, on y trouve diverses parties telles par exemple que

$$9\,a^3\,b^5 \quad et \quad -2b^{-x}$$

séparées *consécutivement* l'une de l'autre par l'un des signes + ou —. Chacune de ces parties accompagnée du signe qui la précède immédiatement est un *terme;* on voit donc que

$$-9\,a^3\,b^5 \quad et \quad -2b^{-x}$$

sont deux termes du polynome.

Dans le cas où un seul des signes + ou — ne se trouve employé qu'une seule fois, l'expression algébrique prend le nom de *monome;* voici un exemple

$$-2\,a^4\,b^2\,c^{-5}$$

On donne spécialement le nom de binome à un polynome composé de *deux* termes, celui de *trinome* au polynome qui en renferme *trois;* mais on ne particularise guère plus loin les noms d'une quantité algébrique par rapport aux nombres de termes qui la composent.

11. Des quantités sont *fonctions* l'une de l'autre lorsqu'un changement arbitraire dans la valeur d'une ou de plusieurs d'entr'elles entraîne un changement dans la valeur des autres, et l'on appelle *fonction* l'expression analytique de la loi qui lie ces quantités.

Ainsi

$$3\,xy^2 - \sqrt[3]{7\,xy^3}$$

est une fonction de x et de y, parce que le moindre changement de valeur imposé isolément ou simultanément à x et à y, fait varier la valeur du polynome proposé.

Dans une fonction on distingue en général deux espèces de quantités : les *constantes* qui ont une valeur fixe et invariable, bien qu'arbitraire, et les *variables* qui n'ont pas de valeur déterminée et qui peuvent recevoir une suite de valeurs se déduisant les unes des autres par *voie de continuité,* c'est-à-dire SANS INTERRUPTION.

Pour indiquer une fonction d'une ou de plusieurs variables x, y, z on emploie les notations ou caractéristiques,

$$f,\ \mathrm{F},\ \psi,\ \varphi,\ f',\ \mathrm{F}',\ \text{etc.}$$

ainsi F (x) représente une fonction x de forme *quelconque;* de même on aurait la notation,

$$5\,x^2\,y - \sqrt{7\,x^3 y} = \varphi\,(x, y)$$

Lorsqu'on se sert de la même lettre f en écrivant :

$$f(x)\ ,\ f(y)$$

on veut exprimer que ces fonctions sont exactement composées de la même manière, l'une en x et l'autre en y; il en résulte qu'elles se transforment l'une dans l'autre à l'aide du seul changement de x en y, et réciproquement.

Supposons l'expression

$$z = f(x)$$

La quantité x, à laquelle la variation continue est imposée *à priori*, s'appelle *variable indépendante*, tandis que l'on nomme *variable dépendante* la quantité z dont les changements de valeurs sont dus à la variabilité de x.

II.

DE L'ADDITION.

Règle des signes. — Addition des polynomes. — Interversion de l'ordre des termes d'un polynome. — Réduction des termes semblables.

12. Cette opération s'indique en séparant par des signes + les différents additifs renfermés, au préalable, entre parenthèses; de sorte que pour les deux polynomes

$$a + b - c \quad et \quad p - q + r$$

On écrira

$$(a + b - c) + (p - q + r)$$

Règle des signes. — Considérons actuellement les combinaisons suivantes de signes que l'addition de deux monomes peut présenter :

$$(+ a) + (+ b)$$
$$(- a) + (+ b)$$
$$(+ a) + (- b)$$
$$(- a) + (- b)$$

Le principe de Descartes, expression mathématique de la *dualité du sens*, nous conduit sans effort à la solution de ces divers cas.

En effet, a et b représentent des nombres d'unités de génération dont les sens sont marqués par les signes + ou — qui accompagnent ces lettres : comme on peut dire que l'addition procède à la composition des grandeurs par voie d'unités de directions généralement quelconques, il est clair que le total d'unités de même sens, en nombres a et b, contient *autant d'unités de ce sens* que l'indique la somme arithmétique de a et b, et qu'ainsi l'on a, selon que ces unités sont positives ou négatives :

$$(+ a) + (+ b) = + (a + b) \qquad (1)$$
$$(- a) + (- b) = - (a + b) \qquad (2)$$

De plus, il est incontestable que si les unités des additifs sont de directions opposées, le total renferme, en dernière analyse, autant d'unités que l'indique la différence arithmétique des *nombres* a et b; seulement cette différence a le même sens, et par conséquent le même signe, que celui du plus grand de ces nombres. On a dès lors :

$$(-a) + (+b) = \begin{cases} -(a-b), \text{ si } a > b & (3) \\ +(b-a), \text{ si } a < b & (4) \end{cases}$$

$$(+a) + (-b) = \begin{cases} +(a-b), \text{ si } a > b & (5) \\ -(b-a), \text{ si } a < b & (6) \end{cases}$$

Les résultats (1), (2), (3), (4), (5), (6) établissent ces règles :

1° *Deux additifs de mêmes signes donnent ce signe à leur total.*

2° *De deux additifs de signes différents, le plus grand communique son signe au total.*

13. *Remarque.* — Lorsque les additifs sont de mêmes signes comme dans (1) et (2), le signe + d'addition ne fait que *maintenir* la génération positive ou négative déjà existante.

14. *Addition des polynomes.* Soit l'opération

$$(a + b - c) + (p - q + r)$$

Le total devant contenir autant d'unités de chaque espèce, ou de chaque direction, qu'il s'en trouve dans les divers termes de chacun des additifs il est clair que le rôle de l'un quelconque de ces termes persiste au total commun dans l'additif dont ce terme fait partie; la *composition* de la somme demandée sera donc :

$$a + b - c + p - q + r$$

De là on conclut cette règle :

Pour ajouter des polynomes, il faut les écrire les uns à la suite des autres, en conservant les signes de tous leurs termes.

15. Par suite de la considération d'unités de sens différents on se convaincra, avec une égale facilité, que l'*on peut changer à volonté l'ordre des termes d'un polynome :* en effet quel que soit l'ordre des termes on a toujours finalement à combiner la même somme d'unités positives et le même nombre d'unités négatives, c'est-à-dire que l'on se trouve ramené à l'un des quatre cas étudiés à l'occasion de la règle des signes de l'addition des monomes.

16. *Réduction des termes semblables.* — L'interversion possible des termes d'un polynome, permet le rapprochement des *termes semblables* que pourrait contenir ce polynome, ainsi que la disposition de ces termes semblables en deux séries l'une positive et l'autre négative.

Soit par exemple l'addition

$$(3a^2 - ab + 5c) + (5a^2 + 7ab + c) + (-4a^2 - 5ab - 8c)$$

dont la somme s'obtient d'après la règle (n° 25) en exécutant les additions et les soustractions que comporte l'indication

$$3a^2 - ab + 5c + 5a^2 + 7ab + c - 4a^2 - 5ab - 8c$$

On peut, en intervertissant l'ordre des termes, écrire par rapprochement des termes semblables de mêmes signes :

$$3a^2 + 5a^2 - 4a^2 + 7ab - ab - 5ab + 5c + c - 8c$$

Or de la même manière qu'en arithmétique 3 unités et 5 unités font 8 unités, on dira que $3a^2$ et $5a^2$ font $8a^2$; par suite, et d'une manière analogue, on obtiendra, en réunissant séparément les termes semblables positifs et les termes semblables négatifs,

$$8a^2 - 4a^2 + 7\,ab - 6\,ab + 6c - 8\,c$$

La règle de Descartes, qui permet de combiner alors des générations de sens contraires, c'est-à-dire *qui décompose en réalité les résultats obtenus par une seule et unique direction,* fournit

$$4a^2 + ab - 2c$$

On peut donc dire que :

Pour réduire des termes semblables il faut faire, d'une part la somme des coefficients positifs, et d'autre part la somme des coefficients négatifs; puis, soustraire la plus petite de ces sommes de la plus grande, en donnant au reste le signe de la plus grande, pour le qualifier ensuite des lettres et des exposants qui appartiennent aux termes entre lesquels on opère la réduction.

III.

DE LA MULTIPLICATION.

Règle des signes, pour deux ou plusieurs facteurs. — Formation ou multiplication des puissances d'une même lettre. — Produits d'un polynome par un monome positif ou négatif. — Produits de deux polynomes. — Irréductibilité des produits de certains termes des facteurs.

17. Cette opération s'indique en plaçant les deux facteurs, renfermés chacun entre parenthèses, de manière que le multiplicateur soit à droite.

Règle des signes. Les quatre cas suivants sont à considérer :

$$(+a)\ (+b)$$
$$(-a)\ (+b)$$
$$(+a)\ (-b)$$
$$(-a)\ (-b)$$

Quant aux deux premiers, on se rappellera la définition arithmétique de l'opération.

Le produit se compose avec le multiplicande comme le multiplicateur se compose avec l'unité, et dès lors puisqu'ici le multiplicateur $+b$ s'obtient par l'addition successive de b unités, le produit résultera de l'addition de b quantités égales à $+a$, dans le premier cas, et de b quantités égales à $-a$ dans le second; comme on a chaque fois ainsi à additionner des quantités de mêmes signes, les sommes (n° 12, 1re règle de signes) sont positives ou négatives en même temps que le multiplicande.

On aura donc, puisque les valeurs numériques de ces sommes sont égales à ab,

$$(+a)\ (+b) = +ab \qquad (1)$$
$$(-a)\ (+b) = -ab \qquad (2)$$

Le *multiplicateur positif indiquant* A PRIORI *la persistance d'une direction ou d'une génération préexistante,* (n° 15) il est clair qu'*un mul-*

tiplicateur négatif impose le renversement *de cette direction*, manifestée dans le multiplicande, et fournit ainsi des résultats de *sens* ou de *signes contraires* à ceux qui ont été obtenus avec un multiplicateur positif : il s'en suit évidemment que les troisième et quatrième cas donneront respectivement, mais aux signes près, les mêmes produits que les premier et deuxième ; et l'on aura,

$$(+a)\ (-b) = -ab \qquad (3)$$

$$(-a)\ (-b) = +ab \qquad (4)$$

Remarquant que les relations (1) et (4), dans lesquelles ab est positif, ont des facteurs de mêmes signes, tandis que (2) et (3), dont ab est négatif, ont des facteurs de signes différents, on pourra énoncer la règle :

Un produit de deux facteurs est positif ou négatif selon que ces facteurs sont de mêmes signes ou de signes contraires.

18. Le produit (1) de plusieurs facteurs se forme en multipliant d'abord les deux premiers, puis le résultat obtenu par le troisième, le nouveau résultat par le quatrième facteur, et ainsi de suite de proche en proche. Etablissons que ,

Théorème I. *Le signe du produit d'un nombre quelconque de facteurs est indépendant de l'ordre des facteurs.*

Démonstration. Soit un produit P composé d'autant de facteurs que l'on veut, et supposons qu'on le multiplie par un nouveau facteur k, pouvant être positif ou négatif : il s'agit de prouver que le signe du produit Pk résultera aussi de l'introduction de k entre deux facteurs consécutifs quelconques de P.

Représentons par p' et p'' les deux portions de P entre lesquelles cette introduction a lieu, c'est-à-dire soit

$$\mathrm{P} = p' \,.\, p''$$

Multipliant de part et d'autre par k il viendra,

$$\mathrm{P}\,(k) \quad \text{et} \quad p'\,(k)\,.\,p''$$

Si k est *positif*, p' et $p'\,(k)$ sont de mêmes signes, tandis que si k est *négatif* p' et $p'(k)$ sont de signes différents ; il s'en suit que $p'(k)\,.\,p''$ et $p'\,.\,p''$ seront de mêmes signes ou de signes contraires selon que k est positif ou négatif : or k influant évidemment aussi de la même manière entre $\mathrm{P}(k)$ et P, il est clair qu'en intro-

(1) Voir notre *Arithmétique*, n° 56.

duisant le facteur k à une place quelconque dans le produit P on parvient au même signe pour le produit P (k) *c. q. f. d.*

19. Théorème II. — *Le produit d'un nombre quelconque de facteurs est positif ou négatif selon que les facteurs négatifs sont en nombre pair ou impair.*

Démonstration. Puisque l'ordre des facteurs n'influe pas sur le signe du produit, il est permis de *rapprocher* d'une part les signes +, ainsi que d'autre part les signes —, de manière à obtenir la succession suivante de signes entre les divers facteurs d'un produit P,

$$+\cdot+\cdot+\cdot+\cdots\cdots+\times-\cdot-\cdot-\cdot-\cdots\cdots \qquad (1)$$

La série positive, située à gauche de la croix de multiplication, donne à son produit le signe +; quant à la série négative, elle pourra se subdiviser en groupes consécutifs de 2 signes, et prendre la forme

$$-\cdot-\times-\cdot-\times-\cdot-\times-\cdot-\times\cdots\cdots \qquad (2)$$

Il est à remarquer que le *dernier groupe à droite est complet ou incomplet* c'est-à-dire contient 2 ou 1 signe selon que les facteurs négatifs sont en nombre pair ou impair; chaque groupe tel que (—·—) donne un produit positif, et la série (2) se transforme ainsi dans l'une des deux,

$$+\cdot+\cdot+\cdot+\cdots\cdots+\cdot+ \qquad (3)$$

$$+\cdot+\cdot+\cdot+\cdots\cdots+\cdot- \qquad (4)$$

dont la première appartient au cas où le dernier groupe de (2) est *complet*, et dont la seconde se présente lorsque ce dernier groupe est *incomplet;* or, par des multiplications de proche en proche, il est manifeste que le produit (3) est positif, tandis que (4) est négatif.

On voit donc que le produit P, qui avait donné lieu, par interversion de facteurs, à la série (1) conduit à multiplier *un facteur positif* par un terme qui est *positif ou négatif, lorsque le nombre de facteurs négatif est pair ou impair;* P a donc le même signe que ce terme. *c. q. f. d.*

20. Corollaire. I. — *Toute puissance d'une quantité négative est positive ou négative, selon que le degré en est pair ou impair.*

En effet le degré indique alors le nombre de facteurs négatifs qui composent le produit.

21. Corollaire. II. — *Les diverses puissances de* (-1) *sont alternativement* (-1) *et* $(+1)$.

22. *Multiplication des puissances d'une même lettre.* Soit à effectuer le produit

$$a^m \cdot a^p$$

dans lequel nous supposerons que

1° m *et* p *sont entiers et positifs :* dans ce cas on pourra écrire, d'après la définition de l'exposant

$$a^m \times a^p = a \cdot a \cdot \ldots\ldots \times a \cdot a \cdot a \ldots$$

Le produit qui forme le second membre renfermant à gauche du signe $\times$, m facteurs égaux à a et p facteurs à droite, contient évidemment $m + p$ facteurs ; d'où l'on voit que

$$a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

Le produit demandé se forme donc en donnant pour exposant à a *la somme des exposants des facteurs.*

2° m et p *sont entiers*, mais ils peuvent être négatifs simultanément, ou, l'un négatif et l'autre positif.

m et p étant tous les deux négatifs indiquent que a, devant être pris comme diviseur d'une part m fois et d'autre part p fois, est considéré $m + p$ fois par division, ce qui s'écrit $a^{-(m+p)}$, donc

$$a^{-m} \cdot a^{-p} = a^{-(m+p)}$$

ou bien encore (n° 9) :

$$a^{-m} \cdot a^{-p} = a^{-(m+p)} = \frac{1}{a^{m-p}}$$

L'exposant $-(m+p)$ est le total des exposants des facteurs.

Si l'un des exposants p par exemple est négatif, et que l'on ait l'opération

$$a^m \cdot a^{-p}$$

Il est clair que si $m > p$, le produit ne contiendra la quantité a comme *facteur* qu'autant qu'il y a d'unités contenues dans $m - p$, parce que chacun des p facteurs égaux à a, employés par division, disparaît par suite d'un facteur correspondant contenu par multiplication dans a^m ; pareillement on trouverait très aisément que si $m < p$, le produit ne renferme la

quantité a comme diviseur qu'autant de fois que $p - m$ contient d'unités. Dans ces deux derniers cas on aurait donc

$$a^m \cdot a^{-p} = a^{m-p} \quad , \textit{pour } m > p$$
$$a^m \cdot a^{-p} = a^{-(p-m)} \quad , \textit{pour } m < p$$

Les exposants $m - p$ et $-(p - m)$ sont encore les sommes algébriques (n° 25) des exposants des facteurs.

3° *m et p sont fractionnaires et de signes quelconques.*

Supposons pour un instant que l'on ait

$$m = \frac{k}{l} \, , \, p = \frac{k'}{l'}$$

c'est-à-dire, à effectuer le produit P, où k, l, k', l' sont des nombres entiers,

$$\mathrm{P} = a^{\frac{k}{l}} \cdot a^{\frac{k'}{l'}}$$

On peut évidemment écrire en réduisant les exposants au même dénominateur ll',

$$a^{\frac{k}{l}} \cdot a^{\frac{k'}{l'}} = a^{\frac{kl'}{ll'}} \cdot a^{\frac{k'l}{ll'}}$$

ou

$$\mathrm{P} = a^{\frac{1}{ll'}kl'} \cdot a^{\frac{1}{ll'}k'l}$$

Nous savons que pour élever une quantité à une puissance de degré donné il faut en multiplier l'exposant par le degré ; nous pouvons donc considérer les facteurs

$$a^{\frac{1}{ll'}kl'} \quad \text{et} \quad a^{\frac{1}{ll'}k'l}$$

comme les puissances de degrés kl' et $k'l$ d'une même quantité $a^{\frac{1}{ll'}}$ qui, représentée par b, donnera,

$$\mathrm{P} = b^{kl'} \cdot b^{kl'}$$

Ramenés, comme on le voit par cette égalité, au 1° ou au 2°, selon que kl' et $k'l$ sont positifs ou négatifs, nous pouvons écrire

$$\mathrm{P} = b^{kl'+k'l}$$

Cette dernière quantité étant une puissance de b prend la forme (n° 10) :

$$P = a^{\frac{1}{ll'}(kl'+k'l)} = a^{\frac{kl'+k'l}{l'}} = a^{\frac{k}{l}+\frac{k'}{l'}}$$

ce qui prouve que l'exposant du produit cherché est encore la somme des degrés des puissances facteurs.

Énonçons donc cette règle générale :

Pour multiplier des puissances d'une même lettre, écrivez cette lettre une seule fois au produit en lui donnant pour exposant la somme algébrique des exposants qu'elle a dans les facteurs.

23. *Multiplication des monomes.* Soit à effectuer la multiplication

$$(-\frac{5}{2}h^4l^{11}x)(+\frac{3}{2}h^{-7}l^{-9})(-7\,h^{-2}l^{+6}x^{\frac{3}{4}})(-h^{-1}l^{-2}x^{-\frac{1}{5}})$$

Dans une semblable opération on ne s'inquiète nullement des signes +, et l'on compte simplement les facteurs négatifs; le nombre que l'on obtient étant pair ou impair, on a vu (n° 19) que le signe du produit est positif dans le premier cas, et négatif dans le second : ici donc le résultat demandé est négatif, parce que le nombre 3 de facteurs négatifs est un nombre impair.

Cela étant il ne nous reste plus qu'à rapprocher, par multiplication, d'une part les facteurs numériques, c'est-à-dire les coefficients, et d'autre part les puissances d'une même lettre; le produit négatif P donnera donc lieu à,

$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 7.1\times h^4.h^{-7}.h^{-2}.h^{-1}\times l^{11}.l^{-9}.l^{+6}.l^{-2}\times x.x^{\frac{3}{4}}.x^{-\frac{1}{5}}$$

La multiplication des puissances d'une même quantité exigeant l'addition des exposants, il viendra;

$$P = -\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 7.1\times h^{4-7-2-1}\times l^{11-9+6-2}\times x^{1+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}}$$

d'où, en exécutant les opérations indiquées, et en s'appuyant sur la règle d'addition (n° 23),

$$P = -\frac{105}{4}h^{-6}l^{+6}x^{-\frac{1}{20}}$$

que l'on pourrait encore écrire

$$P = -\frac{105}{4}\frac{l^6}{h^6\sqrt[20]{x}}$$

Règle. *Le produit d'un nombre quelconque de monomes a pour coefficient le produit des coefficients des facteurs; il contient chaque lettre non commune avec l'exposant propre à cette lettre, et chaque lettre commune avec un exposant égal à la somme* algébrique *des exposants dans les divers facteurs qui la renferment : le signe du produit est positif ou négatif, selon que le nombre de facteurs négatifs est pair ou impair.*

24. *Multiplication d'un polynome par un monome.*

Deux cas peuvent se présenter.

1er Cas. *Le multiplicateur est* positif. Soit le polynome $a - b + c$, donnant lieu par le multiplicateur $(+m)$ au produit,

$$P = (a - b + c)\ (+m)$$

D'après la définition de l'opération, le produit P s'obtiendra en exécutant sur le multiplicande $a - b + c$, toutes les opérations que l'on doit faire sur l'unité pour former le multiplicateur; or comme l'addition successive de l'unité fournit $(+m)$, c'est aussi en additionnant un certain nombre d'additifs égaux au multiplicande, que l'on parviendra au produit ; on peut donc écrire, parallèlement l'une à l'autre les deux séries d'opérations suivantes:

$+1$	$a - b + c$
$+1$	$a - b + c$
$+1$	$a - b + c$
.	. . .
.	. . .
.	. . .
$+m$	$am - bm + cm$

Puisque (n° 12) des additifs de mêmes signes donnent ce signe à leur total, il est clair que les sommes, exécutées en colonnes verticales, auront respectivement *les mêmes signes que les termes correspondants du polynome.*

2e Cas. *Le multiplicateur est* négatif. Soit à effectuer

$$P = (a - b + c)\ (-m)$$

Ici le multiplicateur $(-m)$ étant de génération contraire au multiplicateur $(+m)$ du cas précédent, il faudra additionner des unités de signes — pour former $(-m)$; ensuite, et chaque fois que l'on renverse ainsi la génération, ou la direction de l'unité, il faut renverser la génération du multiplicande *en changeant la direction ou le signe de chaque terme;* on donnera ainsi lieu aux additions

-1	$-a+b-c$
-1	$-a+b-c$
-1	$-a+b-c$
.	.
.	.
.	.
$-m$	$-am+bm-cm$

Remarquons que les signes du multiplicande sont respectivement contraires de ceux des termes du total, et, par rapprochement des deux cas que nous venons d'étudier, nous formulons cette règle :

Pour faire le produit d'un polynome par un monome, multipliez, en faisant d'abord abstraction des signes, chaque terme du multiplicande par le multiplicateur; ensuite dans les différents produits ainsi obtenus, conservez ou changez les signes du multiplicande, selon que le multiplicateur est positif ou négatif.

25. *Multiplication des polynomes.* — Soit la multiplication de polynomes,

$$(a+b-c)\ (p-q+r)$$

Puisque le multiplicateur s'obtient en considérant successivement l'unité, p fois par addition, q fois par soustraction, et enfin r fois encore par addition, il faudra, conformément à la définition générale de la multiplication, exécuter, dans le même ordre, les mêmes opérations sur le multiplicande; on aura ainsi

$$P = (a+b-c)\,p - (a+b-c)\,q + (a+b-c)\,r$$

De là on déduit cette règle : *Pour obtenir le produit de deux polynomes, multipliez successivement le multiplicande par cha-*

que terme du multiplicateur, en ayant soin de conserver ou de changer tous les signes du multiplicande, selon que le terme multiplicateur est positif ou négatif; la somme des produits partiels ainsi obtenus est le produit cherché.

Avant d'effectuer la multiplication il est convenable, pour la facilité et pour la régularité des calculs, d'*ordonner* les polynomes; dans le cours des opérations on devra avoir soin de placer les termes semblables les uns en-dessous des autres, en colonnes verticales, de manière à permettre sans erreur, la réduction des termes semblables ainsi disposés.

26. Lorsque les deux facteurs sont ordonnés de la même manière, c'est-à-dire lorsque le multiplicande et le multiplicateur ont simultanément l'ordonnance croissante ou décroissante, par rapport à la même lettre, il est évident que le produit des deux polynomes s'ordonne aussi dans le même sens pour la même lettre.

Remarquons de plus que :

1° *Les produits du* PREMIER *terme du multiplicande par le* PREMIER *terme du multiplicateur;* 2° *du* DERNIER *terme du multiplicande, par le* DERNIER *terme du multiplicateur, sont uniques de leurs espèces respectives* ; 3° que ces produits, qui ne peuvent se combiner dès lors avec d'autres termes qui leur soient semblables, sont contenus SANS RÉDUCTION dans le produit des deux polynomes.

En effet si l'ordonnance est ascendante, le produit des premiers termes donne lieu à la plus faible puissance de la lettre ordonnatrice dont on ajoute les plus petits exposants du multiplicande et du multiplicateur, ce qui fournit nécessairement la plus petite somme possible; le produit des derniers termes constitue, au contraire, la plus haute puissance de la lettre principale, puisque, pour former ce produit, on additionne les plus hauts exposants de cette lettre, et qu'aucune autre somme de deux exposants pris dans les deux facteurs ne peut atteindre le degré ainsi fourni.

Cette remarque est générale et s'applique évidemment aussi à *des exposants fractionnaires et de signes quelconques*, dès que les facteurs sont ordonnés de la même manière par rapport à la même lettre; elle nous permettra de donner plus tard, à la théorie de la division, toute l'extension immédiate dont elle est susceptible *à priori*.

IV.

DE LA SOUSTRACTION.

—

Règle des signes. — Soustraction de deux quantités algébriques quelconques, établie à priori et par décomposition.

27. La composition et la décomposition des quantités sont la consécration analytique de la *conservation* et du *changement* des générations diverses des unités combinées; après avoir déjà dit que l'addition *maintient* les directions préexistantes, nous disons ici que la *soustraction renverse ces directions;* d'ailleurs le principe de Descartes, pris dans sa complète signification, prouve que ce renversement se traduit analytiquement par un changement de signes.

De là résulte que :

La soustraction change, par génération, le signe de la quantité à soustraire.

En symbolisant cette loi, ou *règle de signes*, on obtient :

$$(+a) - (+b) = +a - b$$
$$(-a) - (+b) = -a - b$$
$$(+a) - (-b) = +a + b$$
$$(-a) - (-b) = -a + b$$

28. Cette règle exige nécessairement que le changement de signes ait lieu par *voie générative*, c'est-à-dire que le renversement de directions doit être effectué sur chacune des parties, ou termes, de la quantité à soustraire : c'est seulement ainsi que la génération primitive peut être suivie et changée à chaque instant.

Dès-lors, d'une manière plus explicite, on dira en parlant des polynomes :

Pour faire une soustraction il faut au préalable, changer les signes du diminueur que l'on écrit, ainsi changé, à la suite du diminuende.

D'après cela, on aura généralement :

$$(a+b-c)-(-p+q-r)=a+b-c+p-q+r$$

29. On pourrait *matérialiser*, si l'on peut s'exprimer ainsi, les deux règles précédentes :

1° Quant au premier cas de la règle des signes, le diminuende peut se mettre sous la forme

$$\begin{array}{r} +a-b \\ +b \end{array}$$

Et l'on voit dès-lors que $+b$ étant partie constitutive de la quantité dont on doit soustraire, il suffit, pour opérer la soustraction, de *supprimer* ou de *ne plus considérer cette partie*, pour avoir immédiatement,

$$(+a)-(+b)=+a-b$$

Pour les trois autres cas, le diminuende prend les formes respectives

$$\begin{array}{lll} -a-b, & +a+b, & -a+b \\ +b & -b & -b \end{array}$$

et la *suppression* du diminueur, écrit sur la seconde ligne, fournit les restes

$$-a-b, \quad +a+b, \quad -a+b$$

2° Quant à la soustraction des polynomes (n° 28), on aurait, de la même manière,

$$\begin{array}{r} a+b-c+p-q+r \\ -p+q-r \end{array}$$

Ce nouveau polynome étant maintenant celui dont on doit soustraire, et $-p+q-r$ étant devenu l'une des parties constitutives de ce polynome, le reste sera l'ensemble des autres parties, ou

$$a+b-p+c-q+r.$$

Remarque. Ces deux nouvelles et dernières démonstrations sont simples et très-faciles à saisir, mais elles sont loin de remonter à la signification de l'opération de soustraction, considérée au point de vue de l'*essence propre directive ou générative des grandeurs.*

V.

DE LA DIVISION.

I.

Règle des signes. — Division des puissances d'une même lettre. — Division des monomes. — Division d'un polynome par un monome. — Division des polynomes. — Reste nul. — Vraie signification de l'expression *division impossible*.

30. *Règle de signes.* — Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient *complet*, il est clair que si les termes de la division ont mêmes signes ou mêmes *directions*, il faut *maintenir* dans le quotient la direction ou le signe du diviseur : le maintien d'une direction quelconque, s'exprimant à l'aide du signe $+$, on aura

$$\frac{+}{+} = + \qquad \text{et} \qquad \frac{-}{-} = +$$

Au contraire si les termes de la division sont de signes ou de directions différentes, la composition du dividende au moyen du diviseur ne peut se faire que par un changement de signes ou de génération ; d'où l'on voit que

$$\frac{+}{-} = - \qquad \text{et} \qquad \frac{-}{+} = -$$

De là cette règle : *Un quotient est positif ou négatif selon que ses termes sont de mêmes signes ou de signes contraires.*

31. *Division des puissances d'une même lettre.* — Soit en général

$$a^m : a^p$$

1° m et p étant entiers, il pourra se faire que m soit plus grand ou plus petit que p; dans le premier cas il est évident que tous les diviseurs égaux à a disparaissent *par* AUTANT *de*

facteurs introduits, et qu'ainsi il ne reste plus au quotient que $m-p$ facteurs égaux à a; dans le second cas les facteurs a du dividende sont détruits par un nombre égal de diviseurs a, de telle sorte que le quotient renfermera $p-m$ diviseurs.

On aura donc, puisque l'*exposant négatif indique la quotité des diviseurs égaux à une même quantité*,

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \qquad , \text{ pour } m > p$$

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{-(p-m)} = a^{m-p}, \text{ pour } m < p$$

$m-p$ est donc l'exposant du quotient, et selon qu'il sera positif ou négatif la lettre a jouera le rôle de facteur ou de diviseur; ou peut, dès lors, en tenant compte du signe de cette différence, appliquer un même énoncé aux résultats de formes identiques de ces divisions et dire :

Le quotient de deux puissances d'une même lettre est une puissance de cette lettre, ayant pour degré la différence algébrique de l'exposant du diviseur à l'exposant du dividende.

2° Si $m = p$, nous avons déjà vu (n° 11), que

$$\frac{a^m}{a^m} = 1 = a^o$$

Et il est clair que la forme a^o n'est qu'un cas particulier de $m \gtrless p$.

3° En supposant m et p fractionnaires, positifs ou négatifs, soient

$$m = \frac{k}{l} \text{ et } p = \frac{k'}{l'}$$

Par la réduction de ces fractions au même dénominateur ll', on pourra écrire

$$\frac{a^{\frac{k}{l}}}{a^{\frac{k'}{l'}}} = \frac{a^{\frac{kl'}{ll'}}}{a^{\frac{k'l}{ll'}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{ll'}}\right)^{kl'}}{\left(a^{\frac{1}{ll'}}\right)^{k'l}}$$

Représentant pour un instant par b la puissance placée entre parenthèses, il viendra

$$\frac{a^{\frac{k}{l}}}{a^{\frac{k'}{l'}}} = \frac{b^{kl'}}{b^{k'l}}$$

Les exposants kl' et $k'l$ étant maintenant entiers, on peut appliquer la règle établie pour ce cas, et obtenir

$$\frac{a^{\frac{k}{l}}}{a^{\frac{k'}{l'}}} = b^{kl'-k'l}$$

ou, en remplaçant b par sa valeur,

$$\frac{a^{\frac{k}{l}}}{a^{\frac{k'}{l'}}} = a^{\frac{kl'-k'l}{ll'}} = a^{\frac{k}{l}-\frac{k'}{l'}}$$

Ce résultat maintient donc la règle établie dans le cas des exposants entiers quelconques.

31. *Division des monomes.* — Le quotient de deux monomes ne peut évidemment être qu'un *monome*, puisque son produit par le diviseur est monome, et égal au dividende.

L'interversion étant permise entre les facteurs de chacun des termes de la division, on pourra rapprocher les puissances des lettres communes ; quant aux lettres non communes, le quotient les contiendra avec l'exposant qui leur appartient, maintenu ou changé de signe, suivant que cette lettre fait parti du dividende ou du diviseur.

Ainsi si c^m fait partie du dividende, et non du diviseur, le quotient admettra le facteur c^m ; tandis que *si* d^k *entre seulement dans la composition du diviseur, le quotient recevra comme facteur* d^{-k}.

En effet, pour c^m il faut que l'on ait, après l'introduction de c^o ou 1 dans le diviseur, et en représentant par x l'exposant de c dans le quotient :

$$c^x \cdot c^o = c^m$$

d'où

$$x + o = m, \quad et \quad x = m$$

De même, par suite d'un diviseur renfermant d^k, si l'on désigne par y l'exposant de d au quotient, et que l'on introduise d^o ou 1 dans le dividende, nous devons avoir

$$d^k \cdot d^y = d^o$$

d'où

$$k + y = a, \quad et \quad y = -k \qquad c.\,q.\,f.\,d.$$

On a donc cette règle :

Le quotient de deux monomes est positif ou négatif selon que les signes de ces monomes sont les mêmes, ou différents ; son coefficient est le quotient du coefficient du dividende par le coefficient du diviseur ; lorsqu'une lettre est COMMUNE *aux deux monomes, elle figure au quotient avec un exposant égal à l'excès* ALGÉBRIQUE *de l'exposant du dividende sur l'exposant du diviseur ; lorsqu'une lettre a le même exposant dans les deux termes à diviser, on ne l'écrit pas au quotient ; lorsqu'une lettre n'entre que dans un des monomes, on l'écrit au quotient avec l'exposant qu'elle possédait, maintenu ou changé de signe suivant que cette lettre se trouve dans le dividende ou dans le diviseur.*

Remarque. — Il est presqu'inutile de rappeler que toute quantité, qui, dans le quotient, aura un exposant négatif, peut passer en dénominateur en changeant le signe de cet exposant, en vertu de la transformation autorisée (n°7), par suite de l'extension donnée à la définition de l'exposant.

32. *Division d'un polynome par un monome.* — Soit la division

$$\frac{a - b + c + d - f}{m}$$

dans laquelle le diviseur est quelconque et dont le dividende, ne renfermant pas de termes semblables, est ordonné, s'il y a lieu, par rapport à une certaine lettre.

Il est évident que le quotient est un polynome, que nous représenterons, sans rien préjuger sur la valeur ou sur les signes de ses divers termes, par

$$p + q + r + s + t$$

On doit avoir

$$a - b + c + d - f = (p + q + r + s + t)\,m$$

D'où

$$a - b + c + d - f = pm + qm + rm + sm + tm.$$

Comme les termes du polynome proposé diffèrent tous les uns des autres, cette égalité exige que chacun de ses termes ait son égal dans le polynome $pm + qm + rm + sm + tm$; posons donc simultanément, en supposant que le quotient soit ordonné par rapport à la même lettre que le dividende,

$$pm = +a,\ qm = -b,\ rm = +c,\ sm = +d,\ tm = -f$$

d'où

$$p = +\frac{a}{m},\ q = -\frac{b}{m},\ r = +\frac{c}{m},\ s = +\frac{d}{m},\ t = -\frac{f}{m}$$

Si m était négatif, il viendrait, d'une manière analogue,

$$p = -\frac{a}{m},\ q = +\frac{b}{m},\ r = -\frac{c}{m},\ s = -\frac{d}{m},\ t = +\frac{f}{m}$$

On voit donc que :

Pour diviser un polynome par un monome, il faut d'abord, en faisant abstraction des signes, diviser successivement chaque terme du dividende par le diviseur, puis maintenir ou changer les divers signes du dividende selon que le diviseur est positif ou négatif.

33. *Division des polynomes.* — Revenons un instant sur la propriété (n° 26), et considérons une multiplication ordonnée *dans le cas où l'un des facteurs est,* DANS L'AUTRE, *le dénominateur de certains termes, dont aucun ne contient la lettre ordonnatrice avec un exposant égal à la* SOMME ALGÉBRIQUE *des degrés du premier terme du multiplicande et du premier terme du multiplicateur.*

Soit ainsi, suivant ordonnance *décroissante*, l'opération

$$\left(\frac{3}{2}a^2 - \frac{5}{4}a + \frac{33}{8} + \frac{\frac{75}{8}}{2a-3}\right) \quad (2a-3)$$

Dans ce cas de multiplication, le seul produit partiel monome irréductible est *nécessairement*

$$\left(\frac{3}{2}a^2\right)\ (2a)$$

tandis que le produit de puissance la plus petite de a est, ou peut être *altéré* par suite de

$$\left(\frac{\frac{75}{8}}{2a-3}\right)\ (2a-3)$$

Une remarque analogue est à faire lorsqu'on adopte l'ordonnance croissante, comme pour l'opération

$$\left(1 - \frac{10}{3}a + \frac{1}{9}a^2 + \frac{\frac{25}{9}a^3}{-3+2a}\right) \quad (-3+2a)$$

34. La *valeur* d'un produit étant évidemment indépendante

de l'ordonnance adoptée dans la multiplication, faisons comprendre, qu'en se plaçant à un point de vue complètement général, *la* FORME *du quotient de deux polynomes peut être profondément modifiée par le* RENVERSEMENT *d'ordonnance de ces polynomes.*

Soit donc le même quotient, soumis à des ordonnances opposées.

$$q = \frac{5a^3 - 7a^2 + 12a - 3}{2a - 3}$$

$$q' = \frac{-3 + 12a - 7a^2 + 5a^3}{-3 + 2a}$$

En supposant que q et q' sont dans le cas spécial de multiplication, signalé au numéro précédent, on admet

Pour q , $\quad 5a^3 = (2a) \times$ 1er *terme de* q

Pour q' , $\quad -3 = (-3) \times$ 1er *terme de* q'

Aucune de ces deux relations n'est la conséquence de l'autre : en principe, elles existent *séparément* et en vertu d'*hypothèses également admissibles;* de telle sorte que rien ne peut permettre de dire que le premier terme de q se trouvera dans q', ni de prévoir l'identité qui se présente quelquefois entre q et q'.

Il est donc clair qu'en général *les quotients* que l'on obtiendra par des ordonnances inverses, *seront de formes différentes.*

35. Sans admettre l'ordre ascendant plutôt que l'ordre descendant, soient actuellement les deux polynomes P et D, *ordonnés de la même manière* par rapport à la même lettre commune x.

$$\mathrm{P} = \textit{Dividende} = \mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m'} + \mathrm{C}x^{m''} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{D} = \textit{Diviseur} = ax^n + bx^{n'} + cx^{n''} + \ldots\ldots\ldots$$

Il s'agit de trouver un polynome Q appelé quotient, qui, multiplié par le diviseur, donne le dividende pour produit.

Le polynome Q qui, sous la forme la plus complète, renferme une partie fractionnaire dont le numérateur satisfait à la condition (n° 33), peut toujours être supposé ordonné, quant à x, dans le même ordre que P et D ; représentons-le par

$$Q = \textit{Quotient} = A'x^p + B'x^{p'} + C'x^{p''} + \ldots\ldots$$

Dès lors, nous savons que dans ce cas, comme au n° 26, le premier terme de P est le produit du premier terme de D par le premier terme de Q, c'est-à-dire que

$$A'x^p \,.\, ax^n = Ax^m$$

D'où l'on déduit

$$A'x^p = \frac{Ax^m}{ax^n}$$

On voit donc que *le premier terme du quotient s'obtient en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.*

Le dividende étant la somme des produits partiels du diviseur par chacun des termes du quotient, et par la fraction *dont le type général a été défini* et qui peut affecter Q, on pourra effectuer le produit

$$D \,.\, A'x^p$$

du diviseur par le premier terme, actuellement *déterminé*, du quotient; ce produit étant ensuite retranché de P on obtiendra *un reste* P′ *qui n'est autre chose que la somme des produits partiels du diviseur par les diverses parties encore inconnues du quotient.*

Ce reste constitue donc un nouveau dividende sur lequel nous aurons à raisonner comme sur le polynome P, de telle façon qu'en divisant le premier terme de P′ par le premier terme de D, on aura le second terme du quotient demandé.

De ce qui précède on déduit la règle suivante :

Pour diviser deux polynomes, ordonnez-les de la même manière par rapport à une même lettre commune. Divisez le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; le résultat sera le premier terme du quotient. Retranchez du dividende le produit du diviseur par ce terme, en maintenant l'ordonnance du reste, par rapport à la lettre ordonnatrice choisie pour les polynomes proposés. Divisez le premier terme du reste par le premier terme du diviseur; vous obtiendrez le second terme du quotient. Retranchez du premier reste le produit du diviseur par le second terme du quotient, et divisez le premier terme du nouveau reste par le premier terme du diviseur; vous obtiendrez le troisième terme du quotient. Ainsi de suite.

Convenons de considérer comme *dernier terme du quotient celui dont la lettre ordonnatrice a pour degré la différence algébrique, pour cette même lettre, de l'exposant du dernier terme du diviseur à l'exposant du dernier terme du dividende :* il est clair, qu'en général, la division pourrait cependant se continuer au-delà de ce *dernier terme conventionnel;* mais on introduirait ainsi dans le quotient des termes dont les degrés, ajoutés à ceux du diviseur, ne seraient pas renfermés dans le dividende, et cette introduction, qui n'aurait souvent aucune utilité immédiate, transformerait le quotient en une série illimitée.

Le dernier terme du quotient donne ainsi lieu à un reste R, égal nécessairement au produit du diviseur par la fraction complémentaire du quotient; cette fraction est donc $\frac{R}{D}$.

Si R est *nul*, le diviseur n'entre pas dans le quotient comme dénominateur; dès lors, l'ordonnance commune, faite dans un sens ou dans l'autre, est sans influence sur la forme du quotient, attendu que la propriété (n° 26) reçoit son entière application, tant pour le premier que pour le dernier terme du dividende.

36. On a l'habitude de dire qu'*une division algébrique est ou n'est pas possible.* Cherchons à donner à cette expression *inutile et nullement nécessaire*, le seul sens que la théorie, exposée précédemment, puisse accepter.

Nous avons défini (n° 35) ce que l'on entend par *dernier terme d'un quotient :* dans le cas où le reste, fourni par ce dernier terme, n'est pas nul, on a dit jusqu'à présent que *la division est impossible ;* mais il vaut mieux dire plus simplement, avec rigueur et sans être plus long, que *zéro* n'est pas le *dernier reste.*

Il est une autre erreur que nous voulons relever ici, et dont tous les auteurs se sont rendus coupables : d'après les errements ordinaires, on prétend que la division

$$\frac{x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 23x^2 + 27x - 20}{x^3 - 3x^2 + 5x}$$

est IMPOSSIBLE, parce que le dernier terme 20 du dividende n'est pas divisible par le dernier terme $5x$ du diviseur. Ce-

pendant cette division, *très-possible*, donne

$$x^2 - 2x + 3 - 4x^{-1}$$

pour quotient et *zéro* pour reste. Cet exemple, choisi parmi tant d'autres, prouve combien il est indispensable de donner à la propriété (n° 26) toute la généralité et toute l'extension *nécessaires*, en y considérant les coefficients et les exposants de la lettre ordonnatrice, comme pouvant être *quelconques*, entiers, fractionnaires, positifs ou négatifs.

Nous avons déjà dit qu'une quantité algébrique est *entière*, lorsqu'étant d'ailleurs rationnelle, elle ne contient aucun dénominateur numérique ou littéral : à ce point de vue, on dit quelquefois qu'une quantité entière est ou n'est pas divisible par une autre, selon que le quotient de la première par la seconde est ou n'est pas une quantité entière; nous dirons plus correctement qu'une quantité entière est ou n'est pas *multiple* d'une autre, et cette expression aura l'avantage de pouvoir s'appliquer au cas où les termes de la division sont fractionnaires.

DEUXIÈME PARTIE.

ROTATION ANALYTIQUE

OU

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES.

I.

VRAIE SIGNIFICATION DU SYMBOLE $\sqrt{-1}$.

Deux modes généraux essentiels de génération des grandeurs; par translation, et par rotation. — Décomposition d'un mouvement angulaire quelconque en trois mouvements consécutifs, dont deux par translation successive et un par rotation normale. — Signe i, appelé improprement signe d'imaginarité; sa signification concrète. — Généralité spontanée et immédiate du signe $i=\sqrt{-1}$. — Symboles imaginaires de divers ordres ou de divers degrés; sens concret à attacher aux degrés pairs ou impairs de ces symboles.

37. Lorsque, pour concevoir la génération des grandeurs, on considère un point qui se meut, on reconnaît sans peine que ce point est SANS CESSE *soumis à deux influences ou à deux forces*, dont les actions, DÉTERMINÉES ET CONTINUES, s'exercent ainsi A CHAQUE INSTANT, et font décrire, par la combinaison de leurs effets, le lieu réellement parcouru, c'est-à-dire la *trajectoire* du point.

Dans ce mouvement, et à un instant quelconque, si les forces qui sollicitent le point continuaient leur action, en *persistant* dans la détermination qui leur est alors *particulière*, il

est clair que la trajectoire serait une *ligne droite*, c'est-à-dire le type d'un seul déplacement ou d'une seule direction conservée invariablement ; et c'est même, en vertu d'une semblable hypothèse implicite, que nous avons été amené à formuler, dans la première partie, ce grand principe propre à la TRANSLATION d'un point :

Sur une droite indéfinie, et à partir d'une origine fixe quelconque, toutes les longueurs qui sont comptées dans un sens sont qualifiées du signe +, tandis que toutes celles qui sont comptées dans le sens contraire, sont qualifiées par le signe —.

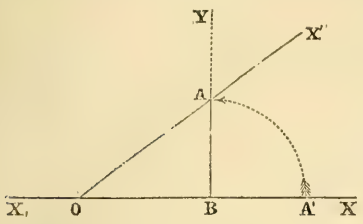
Mais ce n'est pas ainsi que les choses se passent en général, car le plus souvent les forces qui concourent au mouvement varient à chaque instant, suivant des lois *connues ou données* : il s'en suit que, pour passer de l'une à l'autre de deux positions consécutives, le point générateur doit, dans une direction déterminée passant par la première, et en vertu d'une force de translation, avancer d'une certaine quantité, tandis que *simultanément* il se meut d'une quantité angulaire *convenable*, en abandonnant la direction que la translation lui avait d'abord imposée.

Ce mouvement *angulaire* doit évidemment être regardé comme une ROTATION exécutée par le point mobile autour de chaque position qu'il acquiert.

L'étude approfondie des trajectoires curvilignes, ou des lignes courbes, étant du ressort de la Géométrie, nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet, car il nous suffisait maintenant de constater qu'un point qui se meut est *simultanément* et *continuement* soumis à des effets de translation et de rotation : l'uniformité et la variation de ces actions, de nature si différentes, donnent lieu à toutes les espèces et à toutes les variétés de courbes possibles, tant planes que gauches.

38. Après avoir indiqué précédemment les *conventions de signes* qui appartiennent à la représentation analytique de la *génération par translation*, il est nécessaire de rechercher par quel *caractère* ou par quel *signe* on devra distinguer dans le calcul les éléments engendrés par *rotation* : en d'autres termes, il *s'agit actuellement de trouver le symbole analytique de la rotation*, et de compléter ainsi la correspondance immédiate qui doit, ou qui du moins devrait toujours, exister entre le concret et l'abstrait.

Considérons en général les droites OX et OX′ dont la première est l'axe de translation, avec origine O : c'est autour du point O que la rotation s'exécute et fournit, par exemple, la droite OX′, tandis que sur OX, l'on évalue les espaces parcourus par translation.



Menons la perpendiculaire quelconque AB à OX.

Il est évident que pour déterminer graphiquement le point A, il suffit de connaître OB et AB, en ayant soin toutefois de porter AB perpendiculairement à OB; on en conclut que la détermination *analytique* de ce point exige la représentation analytique des quantités OB et AB engendrées par *translation*, la première sur OX, la seconde suivant la *perpendiculaire* à cet axe.

Le passage, par voie angulaire, de la direction OX à la direction OX′ peut toujours être conçu comme produit successivement,

1° Par la description linéaire, selon OX à partir de O, d'une longueur arbitraire OB.

2° Par la description linéaire, suivant OX à partir du point B, d'une longueur

$$BA' = BA$$

dont la grandeur dépend à la fois de BO et de l'inclinaison des droites OX et OX′

3° Par la rotation de BA′ autour de B comme centre; ce dernier mouvement s'arrêtant lorsque le point A′ se trouve sur la perpendiculaire BY à OX.

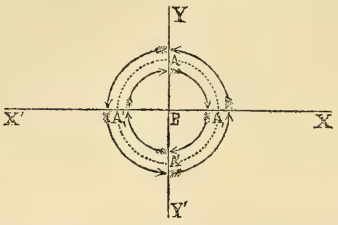
Ces trois mouvements doivent d'ailleurs se succéder dans l'ordre où ils viennent d'être indiqués.

Il est donc permis de conclure que :

La rotation angulaire quelconque se transforme en trois mouvements consécutifs, dont les deux premiers ont lieu par translation, et dont le dernier, qui s'accomplit par rotation, transporte perpendiculairement à l'axe, la longueur engendrée par le second mouvement.

39. Ce troisième mouvement, vulgairement appelé *quart de*

révolution, sera désormais désigné sous le nom de *mouvement de perpendicularité* :



Nous avons donc à étudier analytiquement le passage de l'une à l'autre des *directions perpendiculaires* XX′ et YY′.

Remarquons d'abord que la perpendiculaire AB, menée à XX′ par un point quelconque A de YY′, passe par l'origine B de rotation; il en résulte la disparition du premier des trois mouvements que nous avons reconnus et définis généralement, pour le cas d'une rotation quelconque.

Quant à la longueur produite par le second mouvement de translation, il est clair qu'elle est égale à AB; prenons donc

$$BA_1 = BA$$

Et représentons BA_1 par $+a$. Puisque, suivant XX′, la translation *effective* n'existe plus, et que la modification de BA_1, à l'aide des signes + et —, est impossible pour distinguer les longueurs *égales* BA_1 et BA, examinons si la *voie factorielle* ne peut pas symboliser avec la perpendicularité de ces directions.

Désignons par i le facteur de $BA = +a$, nécessaire à cette transformation, qui donne ainsi

$$(+a)\ i = OB \qquad (1)$$

Or si l'on voulait, de la même manière, passer de BY à BX′, on ferait

$$BA_1' = BA_1 = -a$$

Et l'on aurait

$$(OB)\ i = -a \qquad (2)$$

La multiplication, membre à membre, des égalités (1) et (2) conduit à

$$i^2 = -1 \qquad (A)$$

40. *Forme de* i; *signification de* (A). — La signification, complète et si importante, de cette dernière relation étant restée inconnue jusqu'aujourd'hui, il est indispensable de la mettre en évidence, afin qu'étant ainsi établie *à priori*, elle puisse servir de *base* au calcul d'une classe spéciale d'expressions lit-

térales, dont l'introduction est due à la considération du mode de génération concrète par rotation.

Remarquons qu'en multipliant (1) par (2), et en écrivant

$$i \,.\, i = i^2$$

nous avons *de fait*, établi cette convention :

L'exposant s'applique à un signe, ou à un symbole, comme si ce signe était une quantité.

Est-ce à dire par là qu'il est permis de regarder i^2, et en général i^p, comme une puissance? Non certes, car cela serait aussi ABSURDE que d'admettre les différentes puissances des signes + et —; et s'il n'est personne capable, pensons-nous, d'introduire dans le calcul la p^e puissance du signe — par exemple, il ne se trouvera aucune intelligence qui puisse concevoir la signification de la p^e *puissance d'un autre* SIGNE i : en effet, les opérations fondamentales s'exécutent sur des nombres, ou si l'on veut sur des rapports, et leur application aux signes de génération, *considérés* en eux-mêmes et *isolément*, ne présente aucun sens, et ne serait qu'une extravagance!

D'ailleurs i n'est pas, et ne peut pas être, une quantité; car, s'il en était ainsi, sa présence comme *facteur* modifierait dans (1) la valeur de a, ce qui est impossible, puisque les valeurs absolues de BA_1 et de BA sont égales.

D'un autre côté si i avait quelque valeur, positive ou négative, et pouvait ainsi être autre chose qu'un *signe nouveau et nécessaire*, sa seconde puissance serait positive : la formule (A), dès lors inadmissible, INTERDIRAIT la considération et l'emploi de quantités dont il serait impossible d'admettre les combinaisons régulières.

i^2 n'ayant donc la *forme* d'une puissance que par suite d'une *simple* CONVENTION, il est évident, qu'en s'appuyant sur cette *forme*, on peut retourner à la *forme* de i, par le signe contraire de l'élévation au carré, c'est-à-dire par le signe $\sqrt{\ }$ d'extraction de racine carrée; et, dès ce moment, le même retour pouvant avoir lieu, par rapport à (—1) qui, *comme signe*, est l'équivalent de i^2, on aura

$$i = \sqrt{-1} \qquad (C)$$

Tel est donc le signe nouveau, qui devrait être appelé *signe*

de perpendicularité ou *signe normal*, et qui improprement a reçu jusqu'aujourd'hui le nom de *symbole d'imaginarité.*

L'erreur dans laquelle on est resté avait porté des savants du premier ordre à dire que $\sqrt{-1}$ dénonçait l'impossibilité, et à placer, en dehors du domaine *réel*, les fonctions où $\sqrt{-1}$ se trouvait; ces savants, en méconnaissant ainsi l'origine et le sens du symbole $\sqrt{-1}$, introduisaient dans les calculs des fonctions qu'ils regardaient comme *chimériques.* Vainement et sans cesse on a objecté,

Mais si les quantités imaginaires sont chimériques et absurdes, comment est-il possible d'en faire un instrument CERTAIN *de calcul et d'investigation; et comment concevoir qu'en les soumettant,* SANS DÉMONSTRATION, *aux règles du calcul ordinaire, on parvienne souvent, et dans des cas toujours déterminés, à rentrer dans le domaine réel.*

On répondait avec un sérieux inconcevable :

« *Les expressions imaginaires sont des quantités vraiment* » *chimériques, absurdes en elles-mêmes; mais elles sont néan-* » *moins susceptibles de jouer un rôle dans les calculs algé-* » *briques, et même de manière à donner des résultats réels;* » *en effet, une expression imaginaire, multipliée par elle-même,* » *produit une expression réelle, etc., etc.* »

Il n'est pas besoin de faire remarquer ce qu'une pareille réponse a de valeur; elle montre assez, par son insuffisance, que le signe $\sqrt{-1}$ n'avait pas jusqu'alors reçu sa vraie signification.

41. Pour donner au symbole $\sqrt{-1}$ toute la généralité que l'on doit y rencontrer, pour faire en sorte qu'il distingue la rotation qui s'opère dans un sens ou dans l'autre, on le soumet à la grande loi de Descartes et l'on pose

$$i = +\sqrt{-1} \text{ et } i = -\sqrt{-1}, \text{ ou encore } i = \pm\sqrt{-1}$$

De cette manière $+\sqrt{-1}$ caractérise le mouvement angulaire de *droite à gauche*, tandis que $-\sqrt{-1}$ s'applique à celui qui s'accomplit de *gauche* à *droite.*

Conformément à la correspondance des oppositions de signes et de direction, nous pouvons conclure que la formule (A) est la traduction algébrique de cette vérité :

Deux mouvements de perpendicularité, consécutifs et de même direction, introduisent le renversement du sens primitif de translation.

De plus, pour considérer un plus grand nombre de *mouvements normaux*, et en supposant que $BA' = BA_1$, on pourrait, par un raisonnement analogue à celui qui a été employé (n° 39), poser

$$(BA_1)\ i = BA$$
$$(BA\ )\ i = BA_1'$$
$$(BA_1')\ i = BA'$$
$$(BA')\ i = BA_1$$

D'où par multiplication, membre à membre,

$$i^4 = 1 \qquad (B)$$

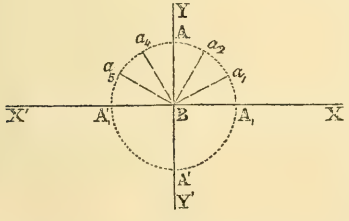
De la même manière on conçoit que l'on aurait en général, n étant un nombre entier quelconque,

$$i^{2n\ (2n+1)} = -1 \qquad (A')$$
$$i^{4n} = +1 \qquad (B')$$

Ces dernières formules symboliques, dans lesquelles i a la même signification que dans (A) prouvent analytiquement que :

Le sens primitif de translation est changé ou est maintenu, selon que l'on fait intervenir des mouvements de perpendicularité, en nombres simplement ou doublement pairs.

42. En établissant, sur l'axe de translation, le renversement de direction comme étant le résultat de deux mouvements normaux consécutifs, nous avons voulu saisir *analytiquement* le fait de la perpendicularité concrète; mais nous avons ainsi particularisé la rotation que nous allons considérer un peu plus généralement, en recourant à un nombre *pair* $2n$ de rotations uniformes, égales et consécutives de BA_1, autour de l'origine B. Désignons par ϱ le *signe* factoriel qui, permettant de tenir compte à la fois de la position et de la grandeur, fournit successivement :



$$\begin{aligned} \mathrm{B}\,a_1 &= (+a\quad)\,\varrho \\ \mathrm{B}\,a_2 &= (\mathrm{B}\,a_1\quad)\,\varrho \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{B}\,a_n = \mathrm{B}\,\mathrm{A} = (\mathrm{B}\,a_{n-1})\,\varrho$$

$$\vdots$$

$$-a = \mathrm{B}\,a_{2n} = \mathrm{B}\mathrm{A}'_1 = (\mathrm{B}\,a_{2n-1})\,\varrho$$

En multipliant membre à membre ces diverses égalités, il viendra, après simplifications,

$$-a = (+a)\,\varrho^{2n}$$

D'où

$$\varrho^{2n} = -1 \qquad (\mathrm{A}_1)$$

Et pour passer de cette relation à

$$\varrho = \sqrt[2n]{-1} \qquad (\mathrm{C}_1)$$

il faudrait raisonner comme nous l'avons fait précédemment pour déduire C de A.

Remarquons que dans la multiplication qui fournit (A_1) on a

$$\varrho^m = \varrho^n\,\varrho^n = -1 \quad ou \quad (\varrho^n)^2 = -1$$

D'où

$$\varrho^n = \sqrt{-1}\,, \quad et \quad \varrho = \sqrt[n]{\sqrt{-1}} \qquad \mathrm{C}_2$$

Cette dernière formule prouve qu'il y a des imaginaires qui correspondent à tous les degrés pairs, *et que la moitié de ce degré est le nombre de mouvements angulaires nécessaires à la détermination de la perpendicularité.*

Ainsi se trouve établie *à priori*, et indépendamment de toute spéculation et de tout artifice de calcul, la vraie signification des imaginaires *à indices quelconques* de la forme

$$\sqrt[2n]{-1}$$

42. Pour passer de $+ a$ à $- a$, nous n'avons employé un nombre pair $2n$ de rotations que dans le seul but d'obtenir et de définir analytiquement la perpendicularité.

Si l'on recourait à un nombre impair $2p + 1$ de rotations successives, on aurait encore, de la même manière que précédemment,

$$\varrho^{2p+1} = -1 \quad et \quad \varrho = \sqrt[2p+1]{-1}$$

Et dans ces formules, qui sont *symboliques* aux mêmes titres que les précédentes, on ne pourrait, en aucune façon, regarder -1 comme une quantité dont on aurait à extraire la racine.

On ne considère pas la rotation impaire, à cause de son peu d'utilité et de l'impossibilité où elle se trouve de fournir la notion analytique de perpendicularité.

Observation. Il est clair que si l'on employait un nombre impair $2p + 1$, de rotations angulaires, égales et successives, pour passer de $+ a$ à $- a$, on obtiendrait

$$\theta = \sqrt[2p+1]{-1}$$

Et dès-lors θ, en conservant toujours le caractère propre de symbole, ne pourrait plus fournir la rotation normale: c'est à cette forme que se rattachent,

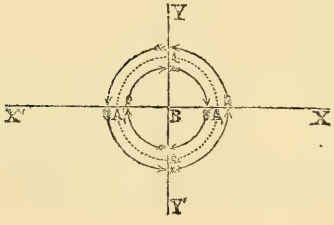
$$\sqrt[3]{-1}\ ,\ \sqrt[5]{-1}\ ,\ \sqrt[7]{-1}\ ,\ldots\ldots\ldots$$

II.

DE L'EXPRESSION $\sqrt{-1}$

—

Combinaison, établie *à priori*, entre les signes de translation et de rotation. — Établissement A PRIORI, abstrait et concrèt, des quatre règles fondamentales relatives aux quantités de la forme $a\sqrt{-1}$. — Reproduction périodique de $+1$, $+\sqrt{-1}$, -1 et $-\sqrt{-1}$ comme équivalents respectifs de $(\sqrt{-1})^{4n}$, $(\sqrt{-1})^{4n+1}$, $(\sqrt{-1})^{4n+2}$, $(\sqrt{-1})^{4n+3}$. — Surfaces positives, surfaces négatives. — Carré de $a\sqrt{-1}$; passage de l'une à l'autre des formes $\sqrt{-a^2}$ et $a\sqrt{-1}$.



43. *Combinaison à priori des signes de translation et de rotation.* La rotation de chaque unité, soit positive soit négative, se représentant analytiquement par le *symbole factoriel* $\pm\sqrt{-1}$, il est clair que l'on aura :

(1). . . . . $AB = (+a)\ (+\sqrt{-1})$ } *Rotation de droite*
(2). . . . . $A'B = (-a)\ (+\sqrt{-1})$ } *à gauche.*

(3). . . . . $A'B = (+a)\ (-\sqrt{-1})$ } *Rotation de gauche*
(4). . . . . $AB = (-a)\ (-\sqrt{-1})$ } *à droite.*

On est *convenu* d'écrire, avec plus de simplicité, les expressions (1) et (2) sous la forme.

$$AB = (+a)\sqrt{-1} \qquad (1)$$

$$A'B = (-a)\sqrt{-1} \qquad (2)$$

Il serait même plus rigoureux de ne pas regarder ces dernières formules comme résultant d'une convention nouvelle : en effet la rotation perpendiculaire introduit *de fait* un nou-

vel axe de translation, perpendiculaire au premier sur lequel s'exécute et s'évalue la translation effective; et il est clair que sur ce second axe YY', il faut distinguer, à partir du premier, deux sens opposés par rapport à XX'; il suit alors de là que BA et BA' sont de directions contraires sur YY' et que leurs représentations analytiques devront être de signes différents.

Les expressions (3) et (4), tenant lieu des grandeurs A'B et AB, doivent se confondre respectivement avec (2) et (1), ou avec (2') et (1'), dont elles ne peuvent différer que par la forme. De là découle le fait analytique suivant,

$$\begin{aligned}(+a)\ (+\sqrt{-1}) &= +a\sqrt{-1}\\ (-a)\ (+\sqrt{-1}) &= -a\sqrt{-1}\\ (+a)\ (-\sqrt{-1}) &= -a\sqrt{-1}\\ (-a)\ (-\sqrt{-1}) &= +a\sqrt{-1}\end{aligned}$$

qui traduit ainsi à l'évidence et *à priori*, ce principe important.

Les signes de translation et de rotation se combinent factoriellement d'après les lois qui, relatives à la multiplication, constituent la règle des signes.

44. Remarque. On pourra donc toujours, dans une quantité de la forme $\pm m\sqrt{-1}$, admettre que $+\sqrt{-1}$ étant le signe de la rotation, s'effectuant ainsi de droite à gauche, le signe $\pm$ appartient à m : c'est là un moyen que nous employerons souvent pour établir des points de concordance entre diverses quantités imaginaires.

La quantité m est appelée le *coefficient* d'imaginarité.

45. *Addition et soustraction des quantités de la forme* $a\sqrt{-1}$

Soit l'opération

$$m\sqrt{-1} - p\sqrt{-1} + q\sqrt{-1}$$

Les signes qui précèdent les lettres m, p et q pouvant, d'après la remarque que nous venons de faire, être regardés comme *propres à ces lettres*, et dès-lors le sens de rotation étant le même pour tous les additifs, la question sera ramenée, sur l'axe transitoire YY', correspondant à l'origine B fixe pour ces divers additifs, à considérer l'opération

$$m - p + q$$

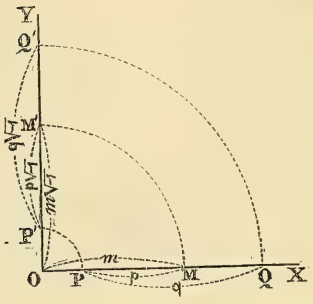
Le résultat cherché est donc

$$m\sqrt{-1} - p\sqrt{-1} + q\sqrt{-1} = (m - p + q)\sqrt{-1}$$

Disons donc en règle :

Pour additionner ou pour soustraire les quantités de la forme $a\sqrt{-1}$, *il faut opérer sur les coefficients, et qualifier factoriellement le résultat ainsi obtenu du signe* $\sqrt{-1}$.

46. Présentons cette règle sous une forme plus matérielle, s'il nous est permis de nous exprimer ainsi.



Soient OX l'axe de translation, et OY l'axe *normal* : sur OX construisons

$$OQ = OM - PM + PQ$$

en prenant

$$OM = m \ , \ PM = p \ , \ PQ = q$$

Ensuite reportons OQ sur OY par un arc de cercle décrit du point O comme centre avec OQ pour rayon, et nous obtiendrons ainsi OQ'.

Faisons voir que OQ' qui, par une seule rotation normale, a évidemment ainsi pour valeur,

$$OQ' = (m - p + q)\sqrt{-1} \qquad (1)$$

est aussi le résultat des trois rotations normales

$$(+m)\sqrt{-1} \ , \ (-p)\sqrt{-1} \ , \ (+q)\sqrt{-1}$$

En effet la première de ces rotations transporte le point M en M', la seconde le point P en P', et enfin la troisième le point Q en Q'; or il est clair que

$$OQ' = OM' - MP + PQ \qquad (2)$$

D'ailleurs

$$m\sqrt{-1} = OQ' \qquad (3)$$
$$-p\sqrt{-1} = MP \qquad (4)$$
$$q\sqrt{-1} = PQ \qquad (5)$$

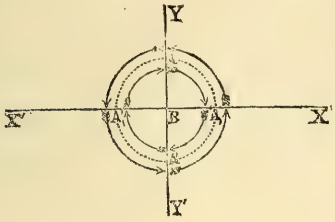
L'addition, membre à membre, des égalités (1), (2), (3), (4), (5) donne :

$$m\sqrt{-1} - p\sqrt{-1} + q\sqrt{-1} = (m - p + q)\sqrt{-1}$$

ce qui établit la règle déjà trouvée analytiquement.

47. *Multiplication des quantités de la forme* $a\sqrt{-1}$.

Pour plus de simplicité, considérons d'abord le cas où $a=1$, en voyant dans $\sqrt{-1}$ l'expression analytique de l'unité à laquelle on a fait subir *un quart de révolution.*



Dans la figure ci-jointe, déjà expliquée (n° 39), on peut supposer que

$$BA_1 = BA = BA'_1 = BA' = 1$$

et l'on aura, en employant le signe rotatif normal, ou d'imaginarité,

$$(G)\begin{cases} BA_1 = 1 \\ BA = BA_1\sqrt{-1} \\ BA'_1 = BA\sqrt{-1} \end{cases}(G')\begin{cases} BA'_1 = -1 \\ BA' = BA'_1\sqrt{-1} \\ BA_1 = BA'\sqrt{-1} \end{cases}(G'')\begin{cases} BA_1 = 1 \\ BA = BA_1\sqrt{-1} \\ BA'_1 = BA\sqrt{-1} \\ BA' = BA'_1\sqrt{-1} \\ BA_1 = BA'\sqrt{-1} \end{cases}$$

Multipliant successivement les deux premières, puis les trois premières égalités de chacun des groupes (G) et (G') et faisant des réductions évidentes, il viendra :

$$\left.\begin{matrix} A\,B = \sqrt{-1} \\ -1 = A'_1 B = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \end{matrix}\right\}(g) \qquad \left.\begin{matrix} A'\,B = -\sqrt{-1} \\ +1 = A_1 B = (-\sqrt{-1})\,(\sqrt{-1}) \end{matrix}\right\}(g')$$

En multipliant d'une manière analogue les deux, puis les trois, les quatre et enfin toutes les égalités du groupe (G''), on obtient,

$$\left.\begin{matrix} A\,B = (\sqrt{-1}) \\ A'_1 B = (\sqrt{-1})^2 \\ A'\,B = (\sqrt{-1})^3 \\ A_1 B = (\sqrt{-1})^4 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (G_1)$$

Le rapprochement des relations (g), (g') et (G_1) prouve que

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} &= \sqrt{-1} \\ (\sqrt{-1})^2 &= -1 \\ (\sqrt{-1})^3 &= -\sqrt{-1} \\ (\sqrt{-1})^4 &= +1 \end{aligned}$$

En continuant à raisonner de même, et n désignant un nombre entier quelconque, ou

$$(\sqrt{-1})^{4n} = +1$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$$

Ces formules établissent ces règles :

1° *La forme d'une puissance quelconque de* $\sqrt{-1}$ *est* $+1$ *ou* -1, *selon que son degré est doublement ou simplement pair;*

2° *La forme d'une puissance quelconque de* $\sqrt{-1}$ *est* $+\sqrt{-1}$ *ou* $-\sqrt{-1}$, *selon que son degré est supérieur ou inférieur de* 1 *à un multiple de* 4.

48. Actuellement si l'on demande le produit

$$P = (a\sqrt{-1})\ (b\sqrt{-1})$$

on dira qu'il faut opérer sur le multiplicande, comme on a dû opérer sur l'unité pour avoir le multiplicateur; dès-lors, comme pour former $b\sqrt{-1}$ on doit imprimer à chaque unité de b un quart de révolution, il sera nécessaire, pour avoir P, d'imposer à $a\sqrt{-1}$ autant de mouvements de perpendicularité que la quantité b contient d'unités; l'un quelconque de ces mouvements a pour représentation analytique.

$$a\sqrt{-1} \ . \ \sqrt{-1}$$

Il renverse (n° 41) le sens de translation de a, pour fournir ainsi $-a$, par suite de deux mouvements normaux consécutifs; de sorte que le résultat

$$a\sqrt{-1} \ . \ \sqrt{-1} = -a$$

doit être pris b fois, ce qui donne,

$$P = ab\sqrt{-1} \ . \ \sqrt{-1} = -ab$$

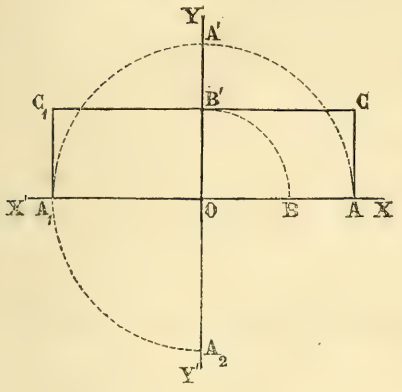
Si l'on remarque que le signe $-$ qui affecte ab résulte aussi de $(\sqrt{-1})^2$, on aura cette règle relative à un nombre quelconque de facteurs;

Le produit d'un nombre quelconque k *d'imaginaires de la forme* $a\sqrt{-1}$ *s'obtient en faisant le produit de leurs coefficients et en tenant compte,* conformément aux lois du numéro précédent, *du nombre* k *de signes d'imaginarité.*

49. A un point de vue *explicitement concret*, nous dirons que le multiplicateur $b\sqrt{-1}$ signifie que l'unité a été prise b fois normalement, et que par suite, pour exécuter l'opération

$$a\sqrt{-1} \cdot b\sqrt{-1}$$

comme il faut opérer de la même manière sur le multiplicande, il faudra d'abord imprimer à



$$0A' = 0A\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$$

un *quart de révolution*, ce qui donne

$$0A_1 = 0A'\sqrt{-1} = 0A\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -0A = -a$$

Ensuite ce résultat $(-a)$ devant être considéré b fois par addition, on obtient

$$a\sqrt{-1} \cdot b\sqrt{-1} = -ab.$$

Telle est donc la surface du rectangle $OB'A_1C_1$, qui est ainsi l'*opposé* du rectangle $OB'AC$ dont la surface est égale à ab : on comprend, par ces *simples* mots, la signification *réelle* que les signes $+$ et $-$ ont, *dès qu'ils s'appliquent aux surfaces ;* à tel titre, par exemple ici, que les surfaces $(+ab)$ et $(-ab)$ ont des *hauteurs communes et des bases égales, mais de directions opposées.*

Il n'est pas sans importance, croyons-nous, de faire remarquer que jusqu'ici l'on regardait comme un symbole d'*impossibilité* et d'*absurdité*, une expression superficielle *négative*, numérique ou littérale : il n'en est cependant nullement ainsi, et le signe $(-)$ est, quant aux surfaces, la *conséquence* immédiate de la signification rationnelle du symbole normal $\sqrt{-1}$.

En effet la surface $(+ab)$ correspond au produit

$$(-a\sqrt{-1})\ (+b\sqrt{-1})$$

dans lequel le multiplicande $-a\sqrt{-1}$, qui est égal à OA_2, devient $+a$ par suite d'un mouvement normal de rotation.

50. Le carré de $a\sqrt{-1}$, serait d'après cette règle

$$(a\sqrt{-1})^2 = -a^2$$

Retournant, par l'extraction des racines, aux données de l'opération, on obtiendra

$$\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1}$$

Et l'on voit que *toute quantité, engagée dans le signe d'imaginarité, peut en être expulsée par une extraction de racine carrée.*

Réciproquement :

Tout coefficient d'une imaginaire rentre sous le signe $\sqrt{\ }$ *par l'élévation au carré.*

On fait un fréquent usage des transformations qu'autorisent ces deux propriétés.

51. *Division des quantités de la forme* $m\sqrt{-1}$

Soit q le quotient inconnu de la division.

$$a\sqrt{-1} : b\sqrt{-1}$$

dont les termes $a\sqrt{-1}$ et $b\sqrt{-1}$ représentent respectivement a et b *unités normales*, comptées sur *la même* perpendiculaire à l'axe de translation.

Il est clair que l'opération proposée donne identiquement le même résultat que la division des quantités ordinaires a et b, et qu'ainsi

$$q = \frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = \frac{a}{b}$$

On dira donc :

Le quotient de deux imaginaires de la forme $a\sqrt{-1}$ *est égal à celui de leurs coefficients.*

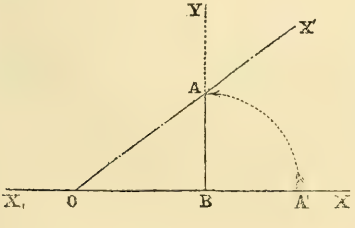
La multiplication *concrète* des quantités de la forme $m\sqrt{-1}$ ayant été établie (n° 49), il est inutile de présenter de la même manière la division des quantités imaginaires de cette forme.

III.

DE L'EXPRESSION $a \pm b\sqrt{-1}$

Quantités imaginaires complètes telles que $a + b\sqrt{-1}$; leur signification concrète. — Etablissement à priori, abstrait et concret, des quatre premières règles sur les imaginaires complètes. — Conditions d'égalités de deux imaginaires. — *Module,* ou *Norme* de Gauss. — Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression $a + b\sqrt{-1}$ soit nulle, et réciproquement. — Module d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient. — Module d'une puissance, d'une racine. — Deux manières de décomposer en deux carrés le produit de deux nombres, dont chacun est la somme de deux carrés. — Forme modulaire des quantités imaginaires. — Relation fondamentale entre les carrés faits sur les trois côtés d'un triangle rectangle. — Démonstration concrète de cette propriété que *le module de la somme ou de la différence de deux expressions imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules de ces quantités.* — Multiplication et division modulaire. — Formules de *Moivre.* — Les quantités $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ et $\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$ sont inverses l'une de l'autre. — Deux theorèmes fondamentaux sur la convergence des séries réelles. — Séries imaginaires; caractère modulaire de leur convergence. — Extension du théorème de *Maclaurin* au cas de l'imaginarité. — Développements de a^x, e^x, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$. — Base népérienne, sa valeur. — Loi exponentielle imaginaire. — Formules de Jean BERNOULLY. — Logarithmes imaginaires; logarithmes népériens imaginaires des quantités quelconques, des nombres positifs et des nombres négatifs. — Logarithmes imaginaires à base quelconque. — Passage logarithmique d'un système A à un autre système A'.

52. Il nous reste à nous occuper de la rotation angulaire pour un angle quelconque α.



Il est clair, d'après ce qui précède, qu'en tenant compte des directions OB et AB, perpendiculaires l'une à l'autre, l'expression

$$OB + AB\sqrt{-1}$$

constitue, par rapport à OX, la

détermination analytique de la direction OX′, définie géométriquement d'ailleurs par la simultanéité des longueurs perpendiculaires OB et AB.

Pour étudier plus spécialement la détermination de l'inclinaison de OX′ sur OX, considérons la *distance* OA dont l'extrémité a OB et AB pour éléments géométriques perpendiculaires :

Cette longueur OA, comptée sur OX′, est liée à la même distance que l'on mesurerait sur OX, à l'aide d'un signe factoriel que nous représenterons par θ; cette liaison doit être factorielle, attendu qu'elle ne peut être établie par l'un des signes + ou —, qui ne feraient que conserver ou renverser la direction de translation; on a donc ici

$$OA \cdot \theta = OB + AB\sqrt{-1}, \quad d'où \quad \theta = \frac{OB}{OA} + \frac{AB}{OA}\sqrt{-1}$$

θ peut être appelé le *coefficient de direction*, de OA par rapport à OX : ainsi se présentent d'elles-mêmes les lignes trigonométriques, avec leur correspondance analytique complète, et l'on voit s'introduire naturellement, et comme fait de génération, la notion de *direction*.

En général les quantités reçues dans le calcul, sous le nom *si impropre* d'imaginaires, ont donc la forme

$$a + b\sqrt{-1}$$

a et b étant des rapports tels, par exemple, que $\frac{OB}{OA}$ et $\frac{AB}{OA}$

Disons encore une fois que :

Si les quantités imaginaires constituent une catégorie spéciale, c'est parce que *leur existence* provient d'un mode incontestable et *indispensable*, suivant lequel la génération des grandeurs s'accomplit et se développe avec continuité.

Et si jusqu'à ce jour, l'on a maintenu *l'irrationnalité de la théorie* jusqu'à regarder ces quantités comme *impossibles*, comme *imaginaires*, comme appartenant en un mot à un monde *irréalisable*, c'est, qu'aveuglé par la routine, on n'a pas examiné les deux phases nécessaires, et essentiellement différentes, que présente l'étude de la formation des grandeurs.

Ces quantités, que nous proposerions volontiers de nommer *directrices*, afin de rappeler la signification de θ, trouvée

plus haut, sont tout aussi *réelles* que les quantités positives et négatives ; leur introduction dans l'analyse est non-seulement *utile*, mais elle est aussi d'une *indispensable nécessité*.

53. *La direction* ou, comme nous le verrons (n° 72), *l'argument, d'une imaginaire peut-être augmenté ou diminué d'un nombre entier quelconque de circonférences.*

L'imaginaire $x = a + b\sqrt{-1}$ indiquant (n° 52) la direction de la droite OA qui a subi, autour de O et à partir de OX, une rotation angulaire égale à $\widehat{AOX}$, reste encore la même lorsque ce mouvement vient a être augmenté ou diminué d'un nombre entier quelconque de circonférences.

π étant le rapport de la circonférence au diamètre, 2π exprime la longueur de la circonférence dont le rayon est égal à 1 ; par suite, α étant entier, l'argument θ d'une imaginaire peut être changé en $\theta \pm 2\alpha\pi$.

54. *Opérations fondamentales sur les quantités imaginaires.*

Le calcul soumet cette nouvelle espèce de grandeurs aux règles ordinaires déjà établies, modifiées cependant en tenant compte des lois démontrées *à priori* (n^{os} 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51).

L'addition et la soustraction des quantités imaginaires de la forme $p \pm q\sqrt{-1}$, s'exécute en opérant d'une part sur les quantités p, et d'autre part sur les quantités q, en faisant abstraction de l'imaginarité ; de telle sorte que, P et Q étant les résultats ainsi obtenus, on ait

$$P + Q\sqrt{-1}$$

En effet, la simultanéité des divers additifs, tels que $p + q\sqrt{-1}$ signifie, quant au point de vue concret, que l'on doit considérer à la fois :

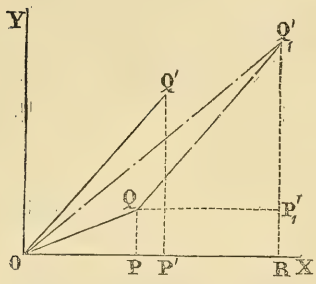
1° *Les diverses translations élémentaires* p ; d'où l'on déduit

$$P = \text{somme } \textit{algébrique} \text{ des quantités } p.$$

2° *Les nouvelles quantités normales à l'axe de translation.* Or, comme il est évident que q indique, perpendiculairement à l'axe fixe, l'éloignement du point générateur, il est clair que, des actions normales exercées sur ce point, il résultera une position dont la distance à l'axe sera telle, que

$$Q = \text{somme } \textit{algébrique} \text{ des quantités } q.$$

Sous une forme géométrique, considérons, sans que nos raisonnements fassent entrer en ligne de compte le nombre des additifs, les deux imaginaires



$$p + q\sqrt{-1}\Big\}\ \textit{pour les-quelles}\ \begin{cases} OP = p, O\,P' = p' \\ PQ = q, P'Q' = q' \end{cases}$$
$$p' + q'\sqrt{-1}\Big\}$$

Les générations individuelles de chacune des quantités à additionner, devant nécessairement ici se succéder, il faudra, au lieu de O, donner le point Q pour *origine* à l'imaginaire $p' + q'\sqrt{-1}$; et c'est ce que l'on fera en menant d'abord à OX par Q la parallèle $QP'_1 = OP'$; puis à oy, par P'_1, on mène $P'_1Q'_1$ parallèle et égale à $P'Q'$. Le point générateur, qui se trouvait d'abord en O, sera donc maintenant en Q'_1, dont l'imaginaire correspondante est évidemment

$$(p + p') + (q + q')\sqrt{-1}$$

55. Quant à la soustraction et s'il fallait revenir de cette dernière expression à la quantité primitive $p + q\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, exécuter l'opération

$$(p + p') + (q + q')\sqrt{-1} - (p' + q'\sqrt{-1})$$

il faudrait abaisser de Q'_1 la perpendiculaire Q'_1K sur OX, prendre ensuite $Q'_1P'_1 = q'$; puis mener par P'_1 la parallèle P'_1Q à OX, et faire $P'_1Q = p'$: la ligne OQ, pour laquelle on a le reste $p + q\sqrt{-1}$, résoudrait la question proposée.

56. Quant au *produit de deux facteurs* imaginaires tels que

$$a + b\sqrt{-1} \text{ et } a' + b'\sqrt{-1}$$

conformément à la définition de l'opération on aura à faire, sur le multiplicande les mêmes opérations qui, en modifiant l'unité, donnent le multiplicateur. Dans $a' + b'\sqrt{-1}$, nous avons distingué :

1° La translation de a' unités ;

2° La translation de b' unités ;

3° La rotation normale de ces b' unités, à partir de l'origine de la première d'entr'elles.

Nous devons donc prendre,

1° a' fois le multiplicande par translation, suivant sa direction *propre;* c'est ce qui donne

$$aa' + a'b\sqrt{-1} \qquad (1)$$

2° b' fois le multiplicande par translation en conservant la direction, et l'on a

$$ab' + bb'\sqrt{-1} \qquad (2)$$

3° Le résultat (2), de cette dernière opération, dans une direction qui lui soit perpendiculaire; on doit donc multiplier par $\sqrt{-1}$ et l'on obtient

$$ab'\sqrt{-1} - bb' \qquad (2')$$

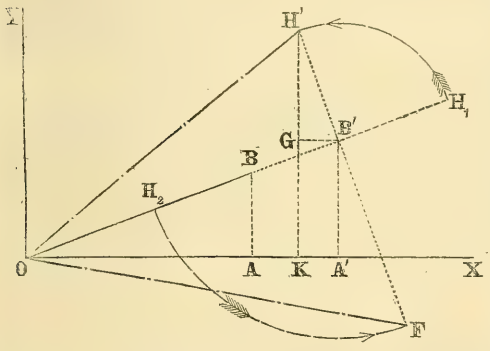
Le produit cherché est enfin

$$aa' - bb' + (a'b + ab')\sqrt{-1}$$

Il est bon de remarquer que le produit de deux ou de plusieurs expressions imaginaires reste le même, dans quelqu'ordre que l'on multiplie les différents facteurs.

57. Etudions maintenant, au point de vue *concret*, l'opération

$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})$



Le multiplicande donnant la direction de la droite OB par exemple, il faudra d'abord 1° effectuer a' fois la translation de $a+b\sqrt{-1}$, ou de OB, suivant OX': c'est ainsi que l'on obtient le point B'. 2° il faut encore effectuer b' fois cette translation, toujours sur OX', mais à partir du point B' et dans un sens convenable, selon le signe du terme $b'\sqrt{-1}$; cela donne le point H_1, si b' est positif. 3° Enfin il faut, de droite à gauche, effectuer la rotation normale de $B'H_1$, de manière à obtenir le point H', dont l'imaginaire est

$$aa' - bb' + (a'b + ab')\sqrt{-1}$$

Il va sans dire que, si b' était négatif, et égal par exemple

à $B'H_2$, la rotation normale fournirait le point F, ainsi que l'*imaginaire* DIRECTRICE

$$aa' + bb' + (a'b - ab')\sqrt{-1}$$

58. Théorème I. — *Le produit d'un nombre quelconque d'imaginaires de la forme* $p + q\sqrt{-1}$, p *et* q *étant des quantités entières, fractionnaires, positives ou négatives, est une imaginaire de même forme.*

Démonstration. — Soient en effet les facteurs.

$$a_1 + b_1\sqrt{-1} \quad , \quad a_2 + b_2\sqrt{-1} \quad , \quad a_3 + b_3\sqrt{-1}, \ \ldots\ldots$$

En multipliant les deux premières on obtient un produit qui, d'après ce que l'on vient de voir dans le numéro précédent, a la forme

$$m_2 + n_2\sqrt{-1}$$

En multipliant ce résultat par le troisième facteur imaginaire, il viendra un nouveau produit de même forme,

$$(m_2 + n_2\sqrt{-1})(a_3 + b_3\sqrt{-1}) = m_3 + n_3\sqrt{-1}$$

On continuerait à opérer de la sorte, jusqu'à ce qu'ayant multiplié par le dernier facteur, on ait obtenu le produit demandé, qui est encore une expression de même forme que chacun des facteurs.

59. La division des quantités imaginaires ne présente dèslors aucune difficulté et se traite absolument de la même manière que la division des polynomes ordinaires : on aura soin d'ordonner par rapport à la même lettre commune le dividende et le diviseur, sans mettre comme on pourrait croire peut-être le signe $\sqrt{-1}$ en facteur commun.

Exemple :

$$\begin{array}{l|l|l|l}
10a^4 - 13 & a^3b\sqrt{-1} - 10\ a^2b\sqrt{-1} + 3 & a^2b^2 - 13 & ab^2 - 3 \quad b^3\sqrt{-1} \\
-10 \quad -2 & & & \\
\hline
\quad -15 & a^3b\sqrt{-1} & & \\
\quad +15 & & & \\
\hline
 & -3 & & \\
 & -10 & a^2b\sqrt{-1} & \\
 & +10 & & \\
\hline
 & & -2 & \\
 & & -15 & ab^2 \\
 & & +15 & \\
\hline
 & & & +3 \\
 & & & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
5a + b\sqrt{-1} \\
\hline
2a^3 - 3a^2b\sqrt{-1} - 2ab\sqrt{-1} - 3b^2 \\
\textit{ou} \\
2a^3 - 3b^2 - ab(3a+2)\sqrt{-1}
\end{array}$$

On pourrait nommer *paramètre* la quantité qui, dans une imaginaire, est indépendante de $\sqrt{-1}$ et *coefficient*, la quantité dont $\sqrt{-1}$ est le facteur.

60. Théorème II. — *Lorsque deux quantités imaginaires sont égales, il y a égalité : 1° entre les coefficients, 2° entre les paramètres.*

Démonstration. — Soit l'expression,

$$a + b\sqrt{-1} = a' + b'\sqrt{-1}$$

et l'identité

$$-a' - b\sqrt{-1} = -a' - b\sqrt{-1}$$

Par addition, membre à membre, il vient :

$$a - a' = (b' - b)\sqrt{-1}$$

ce qui signifie que

$$a = a' \qquad et \qquad b = b'$$

car c'est dans ce seul cas qu'une quantité $a - a'$ comptée sur l'axe de translation peut être égale, ou *plutôt identique*, à une autre quantité $(b - b')\sqrt{-1}$, perpendiculaire à cet axe.

Du reste, sans recourir à la formule, on peut remarquer que si deux imaginaires, rapportées à des axes différents de translation, sont égales, il faut et il suffit que l'on puisse opérer leur superposition ; et c'est précisément ce qui ne peut avoir lieu que si, d'une part, les coefficients sont égaux, et que d'autre part les paramètres le sont également.

61. Nous prouverons, dans la suite, que toutes les expressions imaginaires que l'on peut rencontrer reviennent, quel qu'en soit le degré, à des imaginaires de la forme

$$p + q\sqrt{-1}$$

qui pour cette raison, portent quelquefois le nom d'*imaginaires du second degré.*

Des imaginaires

$$p + q\sqrt{-1} \quad et \quad p - q\sqrt{-1}$$

sont *conjuguées* quand, elles ne diffèrent que par le signe du coefficient de $\sqrt{-1}$

Les imaginaires conjuguées jouissent évidemment de la propriété d'avoir une somme $2p$, et un produit $p^2 + q^2$, dans lesquels le signe $\sqrt{-1}$ n'existe plus.

La valeur absolue, ou prise positivement, de la racine carrée de la quantité $p^2 + q^2$, c'est-à-dire *de la somme des carrés du paramètre et du coefficient*, est ce que l'on nomme le *module* ou, d'après Gauss, le *norme* de *chacune* des expres-

sions $p + q\sqrt{-1}$ et $p - q\sqrt{-1}$; et le *théorème* II fait apercevoir à l'instant que,

L'égalité de deux expressions imaginaires entraîne l'égalité de leurs modules, sans que toutefois la réciproque soit vraie.

62. THÉORÈME III. — *Pour qu'une expression imaginaire soit nulle, il faut et il suffit que son module soit nul; la réciproque est vraie.*

Démonstration. — 1° Si l'on a

$$p + q\sqrt{-1} = 0$$

il faut que l'on ait simultanément,

$$p = 0 \qquad et \qquad q = 0$$

d'où l'on déduit que le module est *nul.*

2° Si le module est *nul,* on a donc

$$p^2 + q^2 = 0$$

et par conséquent

$$p = 0 \qquad et \qquad q = 0$$

d'où

$$p + q\sqrt{-1} = 0$$

63. THÉORÈME IV. — *Le module de la somme ou de la différence de deux expressions imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules de ces quantités.*

Démonstration. — Soient les imaginaires

$$a + b\sqrt{-1} \qquad et \qquad a' + b'\sqrt{-1}$$

dont les modules respectifs sont donnés par

$$m^2 = a^2 + b^2 \qquad et \qquad m'^2 = a'^2 + b'^2 \qquad (1)$$

1° En considérant d'abord la somme des expressions proposées, et en en représentant le module par s, on aurait :

$$s^2 = (a + a')^2 + (b + b')^2$$

mais par addition des relations (1) on a :

$$m^2 + m'^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2$$

En ajoutant et en soustrayant successivement $2mm'$ aux deux membres de cette dernière égalité, il vient, si l'on suppose $m > m'$,

$$(m - m')^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - 2mm'$$
$$(m + m')^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + 2mm'$$

d'où encore, par une transformation facile à saisir,

$$(m-m')^2 = (a+a')^2 + (b+b')^2 - 2(mm'+aa'+bb')$$
$$= s^2 - 2(mm'+aa'+bb') \qquad (2)$$
$$(m+m')^2 = (a+a')^2 + (b+b')^2 + 2(mm'-aa'-bb')$$
$$= s^2 + 2(mm'-aa'-bb') \qquad (3)$$

mais de

$$m^2m'^2 = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = a^2a'^2+b^2b'^2+a'^2b^2+a^2b'^2$$

On déduit évidemment, par addition et soustraction de $2aa'bb'$, dans le second membre,

$$m^2m'^2 = (aa'+bb')^2+a^2b'^2-aa'bb'-aa'bb'+a'^2b^2$$

d'où, par dégagements de facteurs communs,

$$m^2m'^2 = (aa'+bb')^2+ab'(ab'-a'b)-a'b(ab-a'b)$$

ou bien

$$m^2m'^2 = (aa'+bb')^2+(ab'-a'b)^2$$

On voit donc que

$$mm' > aa'+bb'$$

Et les relations (2) et (3) montrent dès lors que

$$\left.\begin{array}{l}(m-m')^2 > s^2\\ (m+m')^2 < s^2\end{array}\right\} \text{ d'où } \begin{array}{l}m-m' < s\\ m+m' > s\end{array} \qquad c.q.f.d.$$

64. Théorème V. — *Le module du produit de deux facteurs imaginaires est égal au produit des modules des facteurs.*

Démonstration. — Soient les facteurs

$$a+b\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad a'+b'\sqrt{-1}$$

dont les modules sont

$$m = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{et} \qquad m' = \sqrt{a'^2+b'^2}$$

et dont le produit, qui est

$$\mathrm{P} = aa'-bb'+(ab'+a'b)\sqrt{-1}$$

a pour module p, donné par,

$$p^2 = (aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2 = a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2$$

d'où, par dégagements de facteurs communs,

$$p^2 = a^2(a'^2+b'^2)+b^2(a'^2+b'^2) = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$$

et enfin

$$p = mm \qquad c.q.f.d.$$

65. COROLLAIRE I. — *Le module du produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires est égal au produit des modules des facteurs.*

Supposons, en effet, que cela soit vrai pour un nombre quelconque n de facteurs, dont le produit P_n ait la forme $A + B\sqrt{-1}$, et dont le module soit p_n. En représentant par $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ les modules des facteurs, on suppose donc que

$$p_n^2 = A^2 + B^2 = m_1^2\, m_2^2\, m_3^2 \ldots . m_n^2 \qquad (1)$$

Mais si dans P_n on introduit le nouveau facteur imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, il viendra

$$P_{n+1} = A\alpha - B\beta + (A\beta + B\alpha)\sqrt{-1}$$

Le module p_{n+1} de P_{n+1} est ainsi

$$p_{n+1}^2 = (A\alpha - B\beta)^2 + (A\beta + B\alpha)^2 = (A^2 + B^2)(\alpha^2 + \beta^2) \qquad (2)$$

Le produit, membre à membre, des expressions modulaires (1) et (2) donne, après simplifications, extractions de racines carrées, et si l'on remarque que $\alpha^2 + \beta^2$ est le module m_{n+1} du $(n+1)^{\text{ème}}$ facteur introduit

$$p_{n+1} = m_1\, m_2\, m_3 \ldots\ldots m_n\, m_{n+1} \qquad (3)$$

On voit donc que si la propriété, qu'il s'agit d'établir, est vraie pour n facteurs, elle est par cela même *vraie pour* $n+1$ facteurs : or elle est démontrée pour $n=2$, donc la loi existe pour $n=3$, puis de *proche en proche*, et ainsi de suite pour n ayant une valeur quelconque.

66. COROLLAIRE II. — *Pour qu'un produit de facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit nul.*

En effet, pour qu'un produit de plusieurs facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit (n° 62) que son module soit nul; et réciproquement. Or ce module, qui est le produit des modules des facteurs, ne peut être nul que si l'un quelconque au moins de ses modules, réels nécessairement, n'est nul lui-même; alors (n° 62) le facteur imaginaire correspondant à ce module est nul.

67. COROLLAIRE III. — *Le module de la puissance* $n^{ième}$ *d'une quantité imaginaire est la* $n^{ième}$ *puissance du module de cette quantité.*

En effet, dans la démonstration du corollaire précédent, il suffit de supposer qu'il y a égalité entre les divers facteurs.

68. Corollaire IV. — *Le module de la racine* r^ième *d'une quantité imaginaire est la racine* r^ième *du module de cette quantité.*

En effet, de

$$x = \sqrt[r]{a+b\sqrt{-1}}$$

on déduit

$$x^r = a+b\sqrt{-1}$$

Et si m est le module de la quantité imaginaire donnée, tandis que X est celui de x, on aura

$$X^r = m, \quad d'où \quad X = \sqrt[r]{m} \qquad c.q.f.d.$$

69. Corollaire V. — *Le produit de deux nombres, qui sont chacun la somme de deux carrés, est aussi la somme de deux carrés.*

L'identité

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = (aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2 \qquad (4)$$

à laquelle l'on a eu recours (n° 64) est la traduction analytique de cette propriété.

70. Corollaire VI. — *Il y a toujours* deux *manières de décomposer en deux carrés le produit de deux nombres, dont chacun est la somme de deux carrés.*

Car si dans l'égalité que nous venons de rappeler, on *permute* les lettres a' et b', ce qui ne change pas la valeur du produit $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$, il viendra aussi

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = (ab'-a'b)^2+(aa'+bb')^2 \qquad (5)$$

71. Corollaire VII. — *Le produit des deux facteurs*

$$a^2+nb^2 \qquad et \qquad a'^2+nb'^2$$

peut être exprimé de deux manières différentes sous la forme

$$A^2+nB^2$$

Dans la démonstration du *théorème* V (n° 64) les quan-

tités b et b' sont quelconques, et l'on peut ainsi, dans les formules (4) et (5), se permettre de changer

$$b \quad en \quad b\sqrt{n}$$
$$b' \quad en \quad b'\sqrt{n}$$

On obtiendra ainsi

$$(a^2+nb^2)(a'^2+nb'^2)=(aa'-nbb')^2+n(ab'+a'b)^2$$
$$(a^2+nb^2)(a'^2+nb'^2)=(aa'+nbb')^2+n(ab'-a'b)^2 \quad c.q.f.d.$$

72. *Forme modulaire des quantités imaginaires.* Les expressions imaginaires peuvent se mettre sous une forme particulière qui simplifie singulièrement les calculs auxquels elles donnent lieu.

L'expression imaginaire

$$x = a + b\sqrt{-1}$$

étant donnée, en désignant par m le module, et par r le rapport de b à a, on peut écrire,

$$a^2 + b^2 = m^2 \tag{1}$$

$$\frac{b}{a} = r \tag{2}$$

Et, en représentant par F et f les facteurs, qui multipliés par m reproduiraient respectivement a et b, c'est-à-dire en posant

$$a = m\,\mathrm{F} \tag{3}$$

$$b = m\,f \tag{4}$$

il viendrait, par substitution de (3) et (4) dans (1),

$$\mathrm{F}^2 + f^2 = 1 \tag{5}$$

La division de (3) par (4) donne, conformément à (2) et après élévation au carré,

$$\frac{\mathrm{F}^2}{f^2} = r^2 \tag{6}$$

La valeur de F^2, tirée de (6) étant introduite dans (5), donne aisément

$$f^2 = \frac{1}{r^2+1} \tag{7}$$

et par suite, toujours à l'aide de (5),

$$F^2 = \frac{r^2}{r^2 + 1} \tag{8}$$

r peut être une quantité quelconque, et, comme on sait par la trigonométrie, que la tangente d'un angle peut passer, ainsi que cet angle, par *toutes les valeurs possibles*, on pourra poser, en désignant par θ un certain angle convenable, qui désormais portera le nom d'*argument*,

$$r = \text{tang } \theta$$

On aura ainsi

$$f^2 = \frac{1}{1 + \text{tang}^2\theta} \quad et \quad F^2 = \frac{\text{tang}^2\theta}{1 + \text{tang}^2\theta}$$

Dès lors on voit que (Trigonométrie)

$$f^2 = \cos^2\theta \quad et \quad F^2 = \sin^2\theta$$

par suite

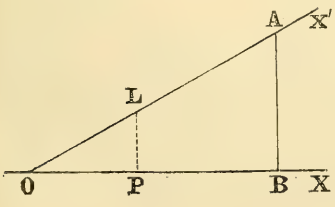
$$\left.\begin{aligned} a &= \pm m.\ \cos\ \theta \\ b &= \pm m.\ \sin\ \theta \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Et l'on aura soin de prendre pour argument θ, celui qui, ayant $\frac{b}{a}$ pour tangente, a son cosinus de même signe que b.

L'expression imaginaire proposée prendra donc la forme générale

$$x = m\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta) \tag{10}$$

73. Quelles que soient les valeurs respectives de a et de b, c'est-à-dire quelle que soit l'inclinaison de la droite OX′ sur OX, on peut prendre sur OX une longueur OL = 1 : soient P la projection de L sur OX, et θ le *coefficient d'inclinaison de* OX′, par rapport à OX.



Supposons que m étant le module d'une imaginaire donnée, on ait fait

$$OA = OL.\ m = m.$$

Relativement à OA, on a donc

$$AO.\,\theta = BO + AB\sqrt{-1}$$

d'où

$$\theta.\,LO = \frac{BO}{m} + \frac{AB}{m}\sqrt{-1} \qquad (1)$$

Considérant spécialement cette imaginaire nous dirions que si l'on voulait *construire* son produit par m, il faudrait nécessairement opérer sur ses éléments OP et LP ou $\frac{BO}{m}$ et $\frac{AB}{m}$, de la même manière que pour passer de la longueur inclinée $OL = 1$, à la longueur inclinée $OA = m.\,OL$; on *voit* donc que

$$\left.\begin{array}{l} BO = PO.\,m \\ AB = LP.\,m \end{array}\right\} \quad d'où \quad \overline{BO}^2 + \overline{AB}^2 = m^2\left(\overline{PO}^2 + \overline{LP}^2\right) \qquad (2)$$

Mais les éléments F et f (n° 72), qui sont représentés par PO et LP ne sont rien autre chose que *les réductions à l'unité de longueur inclinée* des quantités BO et AB : or, dans ce cas, la transformation modulaire établissant que $F^2 + f^2 = 1$, montre qu'ici l'on a

$$\overline{PO}^2 + \overline{LP}^2 = 1 = \overline{LO}^2 \qquad (3)$$

La combinaison de (2) et (3) donne

$$\overline{BO}^2 + \overline{AB}^2 = m^2.\,\overline{LO}^2 = (m.\,LO)^2$$

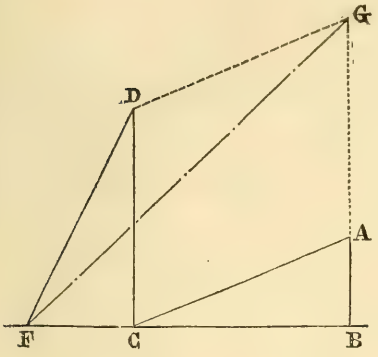
Et enfin, comme $AO = m.\,LO$,

$$\overline{BO}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AO}^2$$

On reconnaît dans ce résultat la relation qui existe entre les carrés faits sur les trois côtés d'un triangle rectangle.

Dans un autre travail nous ferons voir comment la théorie des imaginaires traite avec facilité et promptitude toutes les questions de Géométrie, et comment, en particulier, elle conduit à la théorie complète de la *Polygonométrie plane*.

74. Démontrons, à l'aide de la propriété si connue du carré de l'hypothénuse, que (n° 65) *le module de la somme ou de la différence de deux expressions imaginaires est compris entre la somme et la différence des modules de ces quantités.*



Soient les deux types

$$a + b\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad a' + b'\sqrt{-1}$$

pour lesquels on fait,

$$BC = a \quad , \quad AB = b \quad , \quad AC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$CF = a' \quad , \quad CD = b' \quad , \quad DF = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

Prolongeons AB d'une quantité $AG = CD$, et traçons les droites DG et FG ; la ligne DG est évidemment égale à AC, et l'on a dans le triangle DFG,

$$DF - DG < FG < DF + DG$$

Si l'on remplace les quantités DF, DG, FG en fonction de a, b, a' et b' il viendra :

$$\sqrt{a'^2+b'^2} - \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2} < \sqrt{a'^2+b'^2} + \sqrt{a^2+b^2}$$

c.q.f.d.

75. *Multiplication modulaire.* — Soit à multiplier les deux imaginaires

$$x = m\ (\cos\theta + \sqrt{-1}\ \sin\theta)$$
$$x' = m'\ (\cos\theta' + \sqrt{-1}\ \sin\theta')$$

En effectuant le produit, suivant la règle déjà établie, on trouve

$$xx' = mm'\ [\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \sqrt{-1}\ (\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)]$$

Et comme on sait, par la trigonométrie, que

$$\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta$$
$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$$

On obtiendra,

$$xx' = mm' \left[\cos(\theta+\theta') + \sqrt{-1}\,\sin(\theta+\theta')\right]$$

ce qui fait voir que *pour multiplier deux expressions imaginaires, on doit multiplier les modules et ajouter les arguments.*

76. Corollaire I. — *Pour multiplier un nombre quelconque d'expressions imaginaires, il suffit de multiplier les modules et d'ajouter les arguments.*

77. Corollaire II. — *Pour élever une expression imaginaire à une puissance de degré* n, *il suffit d'élever le module à cette puissance, et de multiplier l'argument par le degré* n.

En général on aurait donc, *n* étant *entier* et quelconque,

$$x^n = m^n \left[\cos n\theta + \sqrt{-1}\,\sin n\theta\right]$$
$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1}\,\sin n\theta$$

Telle est la belle formule du géomètre français Moivre.

Il suffirait en effet de poser dans le produit d'un nombre quelconque d'imaginaires,

$$x = x' = x'' = x''' \ldots\ldots$$
$$m = m' = m'' = m''' \ldots\ldots$$
$$\theta = \theta' = \theta'' = \theta''' \ldots\ldots$$

78. *Division modulaire.* — Soit la division

$$\frac{x}{x'} = \frac{m\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)}{m'\,(\cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta')}$$

En multipliant, d'après la règle qui vient d'être trouvée (n° 75), les deux termes de cette fraction par l'imaginaire $\cos\theta' - \sqrt{-1}\,\sin\theta'$, il viendra, en remarquant que $\sin^2\theta' + \cos^2\theta' = 1$,

$$\frac{x}{x'} = \frac{m}{m'}\left[\cos(\theta-\theta') + \sqrt{-1}\,\sin(\theta-\theta')\right]$$

C'est-à-dire que, *pour diviser deux expressions imaginaires, il faut diviser les modules et retrancher les arguments.*

79. Corollaire. — On a

$$\frac{1}{\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta} = \cos\theta - \sqrt{-1}\,\sin\theta$$

En effet, si l'on multiplie le dividende et le diviseur par $\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$, il viendra

$$\frac{1}{\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta} = \frac{\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \qquad (1)$$

Mais on a vu (n° 72) si l'expression imaginaire diviseur dont l'argument est θ, est primitivement

$$x = a + b\sqrt{-1}$$

l'on a, m étant le module,

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \pm\frac{a}{m}\\ \sin\theta &= \pm\frac{b}{m}\end{aligned}\right\} \quad d'où \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = a^2 + b^2 = 1$$

Le dénominateur du second membre de (1) est donc égal à 1, et par suite l'on a

$$\frac{1}{\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta} = \cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$$

c'est-à-dire que $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ et $\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$ sont *inverses* l'une de l'autre.

80. Il reste à fixer la signification des expressions

$$\begin{aligned} a^x \ , \qquad & \sin x\\ \log x \ , \qquad & \operatorname{arc\,sin} x\end{aligned}$$

lorsque la variable x est *imaginaire*. Ces fonctions étaient, pour x *réel*, inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire données par des opérations inverses.

Il est nécessaire de présenter succinctement quelques propriétés analytiques fondamentales appartenant à la convergence des séries.

Soit la série

$$t_0 \ , \quad t_1 \ , \quad t_2 \ \ldots\ldots \ t_n \qquad (1)$$

et A la plus grande des limites réelles vers lesquelles converge $\sqrt[n]{t_n}$ lorsque n croît indéfiniment.

81. Théorème VI. — *Cette série est convergente si* $A < 1$.

Démonstration. — En donnant à n toutes les valeurs entières successives depuis 0, on aura, par définition de A,

$$t_0 < 1 \ , \quad t_1 < A \ , \quad t_2 < A^2 \ \ldots\ldots \ t_n < A^n$$

Et par suite

$$\sum^{n} t_n < \sum_{0}^{n} A^n$$

d'où, en vertu de la formule sommatoire d'une progression factorielle,

$$\sum_{0}^{n} t_n < \frac{1-A^{n+1}}{1-A}$$

Or si A est plus grand que 1, le second membre de cette égalité croît sans cesse, tandis que si $A < 1$, la quantité $\frac{1-A^{n+1}}{1-A}$ converge vers la fraction $\frac{1}{1-A}$: la série (1) est donc convergente dans le cas où $A < 1$.

82. THÉORÈME VII. — *La série* (1) *est encore convergente si la plus grande valeur du rapport* $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ *est moindre que* 1, *lorsque* n *croît indéfiniment.*

Démonstration. — D'après cette condition, et en donnant à x toutes les valeurs entières successives, à partir de 0, on aura, en désignant par r ce rapport

$$\frac{t_1}{t_0} < r\,, \quad \frac{t_2}{t_1} < r\,, \quad \frac{t_3}{t_2} < r\,, \quad \ldots\ldots \frac{t_n}{t_{n-1}} < r$$

d'où

$$\begin{aligned} t_1 &< t_0\ r \\ t_2 &< t_1\ r \\ t_3 &< t_2\ r \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ t_n &< t_{n-1} r \end{aligned}$$

Multipliant ces inégalités, membre à membre, d'abord les deux premières, puis les trois premières, les quatre premières, et ainsi de suite, il viendra :

$$\begin{aligned} t_1 &< t_0\ r \\ t_2 &< t_0\ r^2 \\ t_3 &< t_0\ r^3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ t_n &< t_0\ r^n \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_0^n t_n < \sum_0^n t_0 r^n \qquad ou \qquad \sum_0^n t_n < t_0 \sum_0^n r^n$$

Effectuant la somme de la progression factorielle, on obtient

$$\sum_0^n t_n < t_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Le second membre de cette inégalité convergeant vers la limite finie $\frac{1}{1-r}$, si $r < 1$ lorsque n croît indéfiniment, on voit que la série proposée est convergente dans le même cas.

83. Séries imaginaires. — Considérons actuellement la série, à termes imaginaires,

$$t_0 \ , \ t_1 \ , \ t_2 \ , \ t_3 \ \ldots\ldots \ t_n \qquad (1)$$

On sait (n° 62) que, pour qu'une expression imaginaire converge vers zéro, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de son module.

La convergence de (1) exige donc simultanément que

1° Les modules de ses divers termes décroissent à mesure que n augmente.

2° La somme de tous ses termes, à partir d'un certain terme, décroisse en-dessous de toute limite, à mesure que n augmente.

Cette dernière condition ne sera satisfaite que si *le module de cette somme va sans cesse en décroissant ;* mais nous savons que (n° 63) le module de la somme de plusieurs types imaginaires est moindre que la somme des modules de ces types ; donc, si cette dernière somme converge vers une limite finie, c'est-à-dire *si la somme des modules des termes de* (1) *forme une série convergente, la série imaginaire* (1) *est elle-même convergente.*

84. Les traités d'analyse différentielle ne justifient point l'application qu'ils font, au cas de l'imaginarité des variables, de certains développements qui n'ont été obtenus que pour des valeurs réelles des mêmes éléments.

Cette lacune regrettable se fait principalement remarquer pour les séries de Taylor et de Maclaurin.

Pour satisfaire aux besoins de cette dissertation nous établirons seulement ici que,

Théorème VIII. — *La formule de Maclaurin subsiste pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable ; et nous signalerons le cas où elle deviendrait illusoire.*

Démonstration. — Soit la fonction

$$y = \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \sqrt{-1}\, f(x) \qquad (1)$$

Aux fonctions $\mathrm{F}(x)$ et $f(x)$, par hypothèses continues, on pourra appliquer la formule de Maclaurin, pourvue de son TERME-LIMITE, et l'on aura, μ' et μ'' étant moindres que 1,

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + x\,\mathrm{F}'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{[n-1]}\,\mathrm{F}^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{[n]}\,\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x)$$

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{[n-1]}\,f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{[n]}\,f^{(n)}(\mu'' x)$$

Donc

$$\left.\begin{aligned} y = \varphi x = {} & [\mathrm{F}(0) + \sqrt{-1}\, f(0)] + x\,[\mathrm{F}'(0) + \sqrt{-1}\, f'(0)] \\ & + \frac{x^2}{1.2}[\quad 0) + \sqrt{-1}\, f''(0)] + \cdots \\ \cdots + \frac{x^{n-1}}{[n-1]} & [\mathrm{F}^{(n-1)}(0) + \sqrt{-1}\, f^{(n-1)}(0)] \\ & + \frac{x^n}{[n]}\,[\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x) + \sqrt{-1}\, f^{(n)}(\mu'' x)] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Mais il est évident que la composition (1) de y donne en général, n étant l'ordre d'une dérivation quelconque,

$$\varphi^{(n)}(x) = \mathrm{F}^{(n)}(x) + \sqrt{-1}\, f^{(n)}(x)$$

Par suite l'expression (2) revient à :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x^{n-1}}{[n-1]}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{[n]}\,[\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x) + \sqrt{-1}\, f^{(n)}(\mu'' x)] \qquad (3)$$

Si des valeurs, continuement et indéfiniment croissantes de n, font converger vers zéro chacune des expressions

$$\frac{x^n}{[n]}\,\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x) \qquad \text{et} \qquad \frac{x^n}{[n]}\,f^{(n)}(\mu'' x)$$

il est évident que l'expression

$$\frac{x^n}{[n]}\,[\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x) + \sqrt{-1}\, f^{(n)}(\mu'' x)]$$

tendra aussi vers zéro ; or, c'est ce qui se présentera toutes les fois que $\mathrm{F}^{(n)}(\mu' x)$ et $f^{(n)}(\mu'' x)$ conservent des valeurs finies.

Dans de pareilles conditions on a donc, x *étant* encore réel, et n illimité,

$$\varphi x = \varphi(0) + \sum_1^n \frac{x^n}{[n]} \varphi^{(n)}(0)$$

C'est là, comme on voit, la formule de *Maclaurin*.

85. Supposons actuellement le cas où x est imaginaire et de la forme

$$x = m(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

le module m et l'argument θ étant des quantités réelles, et soit la fonction

$$y = \varphi(x) = \varphi[m(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)] \qquad (1)$$

que l'on peut écrire, en représentant par $\mathrm{F}(m)$ et $f(m)$ des fonctions réelles de m,

$$y = \varphi(x) = \mathrm{F}(m) + \sqrt{-1}\, f(m) \qquad (2)$$

Supposons que la fonction y et ses dérivées, d'ordre au plus égal à n, soient continues pour toute valeur imaginaire de x, dont le module m est compris entre o et k; $\mathrm{F}(m)$ et $f(m)$ resteront continues entre ces mêmes limites, et l'on aura comme dans le paragraphe précédent :

$$\mathrm{F}(m) = \mathrm{F}(0) + \frac{m}{1}\mathrm{F}'(0) + \frac{m^2}{1.2}\mathrm{F}''(0) + \cdots\cdots + \frac{m^{n-1}}{[n-1]}\mathrm{F}^{(n-1)}(0) + \frac{m^n}{[n]}\mathrm{F}^{(n)}(\mu' m)$$

$$f(m) = f(0) + \frac{m}{1}f'(0) + \frac{m^2}{1.2}f''(0) + \cdots\cdots + \frac{m^{n-1}}{[n-1]}f^{(n-1)}(0) + \frac{m^n}{[n]}f^{(n)}(\mu'' m)$$

et par suite

$$y = \left\{ \begin{array}{l} [\mathrm{F}(0) + \sqrt{-1}\, f(0)] + \dfrac{m}{1}[\mathrm{F}'(0) + \sqrt{-1}\, f'(0)] \\ \qquad + \dfrac{m^2}{1.2}[\mathrm{F}''(0) + \sqrt{-1}\, f''(0)] + \cdots\cdots \\ \cdots\cdots + \dfrac{m^{n-1}}{[n-1]}[\mathrm{F}^{(n-1)}(0) + \sqrt{-1}\, f^{(n-1)}(0)] \\ \qquad + \dfrac{m^n}{[n]}[\mathrm{F}^{(n)}(0) + \sqrt{-1}\, f^{(n)}(0)] \end{array} \right\} \qquad (3)$$

Mais de la relation

$$\varphi\,[m\,(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)]=\mathrm{F}(m)+\sqrt{-1}\,f(m)$$

on déduit, en prenant les dérivées de l'ordre (i) des deux membres, par rapport à m,

$$[\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta]^i\,\varphi^{(i)}\,[m\,(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)]$$
$$=\mathrm{F}^{(i)}(m)+\sqrt{-1}\,f^{(i)}(m)$$

Cette expression, existant par hypothèse pour toute valeur de m comprise entre o et k, il viendra, en y faisant $m=o$,

$$[\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta]^i\,\varphi^{(i)}(0)=\mathrm{F}^{(i)}(0)+\sqrt{-1}\,f^{(i)}(0)\qquad(4)$$

Cette dernière égalité, vraie depuis $i=o$, jusqu'à $i=n$ inclusivement, permet de modifier la composition de (3) ainsi qu'il suit :

$$\varphi\,[m(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)]=\varphi(0)+\frac{m(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)}{1}\,\varphi'(0)$$
$$+\frac{m^2(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)^2}{1.2}\,\varphi''(0)+\cdots\cdot$$
$$\cdots\cdot+\frac{m^{n-1}(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)^{n-1}}{[n-1]}\,\varphi^{(n-1)}(0)$$
$$+\frac{m^n}{[n]}\,[\mathrm{F}^{(n)}(\mu'm)+\sqrt{-1}\,f^{(n)}(\mu''m)]$$

ou bien évidemment,

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\,\varphi'(0)+\cdots\cdot$$
$$\cdots\cdot+\frac{x^{n-1}}{[n-1]}\,\varphi^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{[n]}\cdot\frac{\mathrm{F}^{(n)}(\mu'm)+\sqrt{-1}\,f^{(n)}(\mu''m)}{(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\sin\theta)^n}$$

Le nombre n de termes croissant donc indéfiniment, il est clair qu'aussi longtemps que les fonctions

$$\mathrm{F}^{(n)}(\mu'm)\qquad et\qquad f^{(n)}(\mu''m)$$

conserveront des *valeurs* FINIES, la fonction proposée pourra se développer suivant la loi

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\,\varphi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\,\varphi''(0)+\cdots\cdots$$

On peut donc affirmer que

Les développements fournis par la formule de Maclaurin, pour des valeurs réelles de la variable, sont encore vrais lorsque cette variable reçoit des valeurs imaginaires quelconques.

86. Ainsi l'on a encore, pour x imaginaire,

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\log a + \frac{x^2 \log^2 a}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}\log^3 a + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots$$

$$\text{arc sin } x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{3.3x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{3.3.5.5x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$

Observation. — Dans e^x si l'on pose $x = 1$, il vient

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots$$

On sait que e *est la base des logarithmes népériens;* sa valeur fournie par cette suite numérique est

$$e = 2{,}71828182845904523536028 7.....$$

87. *La loi fondamentale exponentielle imaginaire*

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

est la conséquence immédiate de l'existence du développement de a^x, dans lequel x étant quelconque on peut changer x en y et x en $x+y$, ce qui donnera

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\log a + \frac{x^2}{1.2}\log^2 a + \frac{x^3}{1.2.3}\log^3 a + \cdots$$

$$a^y = 1 + \frac{y}{1}\log a + \frac{y^2}{1.2}\log^2 a + \frac{y^3}{1.2.3}\log^3 a + \cdots$$

$$a^{x+y} = 1 + \frac{x+y}{1}\log a + \frac{(x+y)^2}{1.2}\log^2 a + \frac{(x+y)^3}{1.2.3}\log^3 a + \cdots$$

Sous une forme plus explicite on a donc,

$$a^{x\sqrt{-1}} \cdot a^{y\sqrt{-1}} = a^{(x+y)\sqrt{-1}}$$

$$e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}$$

88. Corollaire. — La série de Maclaurin donnant

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

que x soit réel ou imaginaire, nous sommes autorisés actuellement à y changer x en $\theta\sqrt{-1}$ et en $-\theta\sqrt{-1}$; on obtiendrait alors

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\theta^2}{1.2} + \dfrac{\theta^4}{1.2.3.4} - \dfrac{\theta^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots \\ + \left(\theta - \dfrac{\theta^3}{1.2.3} + \dfrac{\theta^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\right)\sqrt{-1} \end{cases}$$

$$e^{-\theta\sqrt{-1}} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\theta^2}{1.2} + \dfrac{\theta^4}{1.2.3.4} - \dfrac{\theta^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots \\ - \left(\theta - \dfrac{\theta^3}{1.2.3} + \dfrac{\theta^5}{1.2.3.4.5} - \cdots\right)\sqrt{-1} \end{cases}$$

En vertu des développements en séries (n° 86) de sin x et de cos x, on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} e^{\theta\sqrt{-1}} &= \cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta \\ e^{-\theta\sqrt{-1}} &= \cos\theta - \sqrt{-1}\,\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Par l'addition et par la soustraction de ces relations, membre à membre, on obtient

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} - e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Telles sont les formules de Jean Bernouilli, données pour la première fois par Euler, son élève.

89. Théorème IX. — *Toute expression imaginaire* $a+b\sqrt{-1}$ *peut prendre la forme* $e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$.

Démonstration. — Par transformation trigonométrique dont l'argument est γ, et dont m est le module, posons

$$m(\cos\gamma + \sqrt{-1}\,\sin\gamma) = a + b\sqrt{-1} \qquad (1)$$

ce qui entraîne nécessairement les égalités

$$m = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sin\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

dont l'une quelconque des deux dernières fournit la valeur de γ.

On a (n^{os} 87 et 88)

$$e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = e^{\alpha}.e^{\beta\sqrt{-1}} = e^{\alpha}(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\alpha) \qquad (2)$$

Si l'on peut identifier les formes (1) et (2), il faut donc que

$$e^{\alpha}\cos\beta = m\cos\gamma$$

$$e^{\alpha}\sin\beta = m\sin\gamma$$

D'où l'on déduit aisément

$$(e^{\alpha})^2 = m^2 \quad , \qquad et \qquad e^{\alpha} = +\sqrt{a^2+b^2}$$

Le signe + doit *seul* affecter la racine carrée de a^2+b^2, attendu que cette racine doit être essentiellement positive.

En passant aux logarithmes, et en adoptant *log* comme caractéristique logarithmique *népérienne*, il viendra donc

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2) \qquad (3)$$

Comme $e^{\alpha} = m^2$, il s'en suit que

$$\cos\beta = \cos\gamma \quad , \qquad et \qquad \sin\beta = \sin\gamma$$

Par suite, si n désigne un nombre entier quelconque, positif ou négatif, on a

$$\beta = 2n\pi+\gamma \qquad (4)$$

Et enfin, conformément à (3) et à (4),

$$a+b\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)+(2n\pi+\gamma)\sqrt{-1}} \qquad (C)$$

c.q.f.d.

90. *Logarithmes imaginaires.* — La décomposition d'un type imaginaire, exécutée conformément à la loi précédente, conduit à dire que, *dans le système népérien le logarithme de* $a+b\sqrt{-1}$ *est l'exposant de* e *dans la formule* (C), (n° 89); on écrit conséquemment

$$\log(a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2)+(2n\pi+\gamma)\sqrt{-1} \qquad (D)$$

n pouvant recevoir toutes les valeurs entières positives et négatives, le logarithme de $a+b\sqrt{-1}$ a un nombre illimité de valeurs.

91. Si l'on suppose $b=0$, *a pouvant être positif ou négatif*, il vient en désignant par

$$\log(a) = \tfrac{1}{2}\log(a)^2 + (2n\pi+\gamma)\sqrt{-1}$$

Particularisons ces deux cas et soit d'abord

1° *a positif;* les formules (n° 89) qui déterminent la valeur de γ, apprennent que $\gamma=0$; donc, en désignant par k le nouveau nombre a, essentiellement positif,

$$\log(k) = \log k + 2n\pi\sqrt{-1}$$

les parenthèses entre lesquelles le nombre k se trouve enfermé indiquent que le logarithme doit pouvoir recevoir toutes les déterminations possibles, parmi lesquelles il n'y en a qu'une seule qui soit réelle, et que l'on obtient en faisant $n=0$

2° Soit a *négatif* et égal à $-h$, et les formules

$$\sin\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad et \quad \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

donnant $\gamma=\pi$, on obtient

$$\log(-h) = \log h + (2n+1)\pi\sqrt{-1}$$

ce qui prouve qu'une quantité négative n'a pas de logarithme réel.

En faisant $h=k=1$, on trouve

$$\log(+1) = 2n\,.\,\pi\sqrt{-1}$$
$$\log(-1) = (2n+1)\pi\sqrt{-1}$$

92. Les développements de A^x et de e^x prouvent que

$$e^{x\log A} = A^x \qquad (1)$$

Et disons que toute expression imaginaire $a+\beta\sqrt{-1}$ propre à vérifier l'égalité,

$$A^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = a+b\sqrt{-1} \qquad (2)$$

est le *logarithme imaginaire*, pris dans le système dont la base est A, de $a+b\sqrt{-1}$.

Dans (1) changeons x en $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et il viendra

$$e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\log A} = a+b\sqrt{-1} \qquad (3)$$

Les logarithmes népériens des deux membres de (3) donnent

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})\log A = \log(a+b\sqrt{-1})$$

D'où

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \frac{\log(a + b\sqrt{-1})}{\log A}$$

Adoptant la notation $\log_A$ pour désigner le logarithme pris dans le système A, d'un nombre quelconque, on aura

$$\log_A(a + b\sqrt{-1}) = \frac{\log(a + b\sqrt{-1})}{\log A} \qquad (4)$$

D'où l'on conclut :

Le logarithme, dans un système A, *d'une quantité quelconque est le quotient du logarithme népérien de cette quantité par le logarithme népérien de la base A.*

93. Pour des systèmes dont les bases sont A et A′ on aurait donc, par l'intermédiaire du système *népérien*,

$$\log_A(a+b\sqrt{-1}) = \frac{\log(a+b\sqrt{-1})}{\log A}$$

$$\log_{A'}(a+b\sqrt{-1}) = \frac{\log(a+b\sqrt{-1})}{\log A'}$$

D'où, par division membre à membre,

$$\log_{A'}(a+b\sqrt{-1}) = \frac{\log A}{\log A'}\log(a+b\sqrt{-1})$$

On déterminera donc le rapport des logarithmes népériens des deux bases, en prenant pour dividende le logarithme de l'ancienne base, *et l'on multipliera ce rapport par le logarithme, pris dans l'ancien système, de la quantité* $a + b\sqrt{-1}$.

TROISIÈME PARTIE.

I.

DÉFINITION DE L'ALGÈBRE; CARACTÈRE ESSENTIEL DE CETTE SCIENCE.

Définition de l'Algèbre. — Deux grandes divisions de la science générale de l'étendue. — Échelle unique continue des quantités tant positives que négatives. — Considérations sur les vices que présentent la plupart des traités d'Algèbre par l'adoption *imprudente* de postulatums et de nombreuses conventions littérales, indépendantes les unes des autres. — Correspondance immédiate, quant aux deux modes de génération de la grandeur, entre le concret et l'abstrait.

94. Les deux parties précédentes ayant établi, d'une manière *complète*, la signification des quantités algébriques, il est permis actuellement de dire :

L'Algèbre est la science des nombres dont l'expression analytique caractérise le mode et le sens de génération.

Cette définition donne à cette partie des sciences mathématiques l'acception la plus large; elle explique et justifie la qualification, si souvent critiquée,

d'*Arithmétique universelle*

que Newton avait donnée à l'Algèbre : si l'Arithmétique est, en effet, la science des nombres considérés d'une manière absolue, c'est-à-dire abstraction faite de toute espèce de génération, l'Algèbre est la science des nombres qui, pris dans le sens le plus général et le plus complet, déterminent et rappellent, par des *signes conventionnels*, le mode suivant lequel la grandeur a été formée.

Cette branche fondamentale se sépare ainsi très-nettement des

deux grandes subdivisions de la *science générale de l'Etendue*, savoir :

1° La *Géométrie* qui étudie les modifications diverses que peuvent produire les générations par translation et par rotation ; il est clair toutefois que les propriétés que l'on découvre sont obtenues en *particularisant* le développement linéaire ou angulaire.

2° La *Géométrie* Algorithmique qui isole chaque condition d'une question, et donne à ses solutions le caractère de la généralité la plus étendue, en appelant à son aide une réduction convenable du concret à l'abstrait.

95. La dénomination de *Géométrie analytique* est des plus vicieuses, en ce que très-souvent, elle n'est qu'un *contre-sens*, très-apparent en présence de l'emploi qu'on en fait pour distinguer des procédés de calculs ou de démonstrations obtenues à l'aide des signes algébriques.

La *méthode synthétique* est celle où par voie de composition, ou de déduction continue, on établit une vérité élémentaire pour passer à d'autres plus complexes, qui ne sont que des transformations et des modifications successives de la première, pour finir ainsi par démontrer la proposition qui était l'objet des recherches.

La *méthode analytique* procédant, au contraire, par décomposition, détermine les relations qui découlent des éléments généraux d'une question ; elle examine ensuite comment ces relations se modifient, en vertu de certains états particuliers, supposés ou donnés, de ces mêmes éléments ; elle rencontre ainsi la vérité cherchée et souvent en voit surgir beaucoup d'autres de grande importance. On comprend, d'après cela, que l'on peut très-bien faire de l'*analyse* avec des *figures géométriques*, et de la *synthèse* avec des *figures algébriques ;* et souvent il arrive que des démonstrations *décorées* du nom d'*analytiques* sont au contraire, des démonstrations synthétiques.

96. On est donc parfois très-loin de la Géométrie dite analytique, alors que l'on a recours aux spéculations algébriques ; sans nous étendre davantage ici sur ce sujet, nous dirons cependant qu'il existe une Géométrie qui, sans abandonner le *cachet de la synthèse la plus absolue*, introduit les signes dans l'expression de ses calculs et de ses résultats : M. Chasles, en effet, dans son *Traité de Géométrie supérieure* établit et maintient la distinction *essentielle* entre les voies synthétique et analytique ; il fait usage des signes de l'Algèbre sans dévier de la synthèse. A cet égard nous dirons seulement qu'il reste, en *Géométrie générale*, à séparer d'une manière *absolue* la partie *ana-*

lytique proprement dite de la partie synthétique ; la Géométrie *élémentaire* recevra, sans doute, un certain développement, devenu indispensable dans l'état actuel de la science, mais la géométrie *algorithmique*, dégagée ainsi d'une foule d'entraves, étrangères à son esprit, développera des théories qu'elle a trop longtemps déjà abandonnée à l'*Analyse des calculs transcendants*.

Cet ordre d'idées domine l'exposition des traités que nous publierons, très-prochainement, sur la Géométrie élémentaire et sur la Géométrie algorithmique.

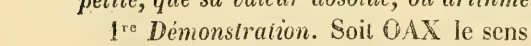
97. La considération *nécessaire* des directions opposées suivant lesquelles la translation agit dans la formation des grandeurs, a introduit, comme nous l'avons vu, les notations propres aux quantités positives et aux quantités négatives.

Il arrive sans cesse que l'Algèbre emploie des quantités qui, sous l'influence des variables dont elles dépendent, passent d'une manière *continue*, du positif au négatif.

La continuité exige alors que la quantité, qui subit ces fluctuations, passe par l'origine de translation, en cessant d'exister à cet instant ; et c'est pour caractériser analytiquement ce résultat que l'on emploie le *signe* 0 *auquel il faut par conséquent se garder d'appliquer la signification et le nom de nombre*.

Théorème.— *Une quantité négative est relativement d'autant plus petite, que sa valeur absolue, ou arithmétique, est plus grande.*

1re *Démonstration*. Soit OAX le sens positif de translation, à origine O, et supposons que l'on veuille transporter cette origine en A : soient deux points quelconque P et P′ situés entre O et A, et posons



$$AO = n\,,\quad AP = \alpha\,,\quad PP' = i$$

n, α et i exprimant les longueurs des droites AO, AP et PP′ en fonction d'une unité linéaire *quelconque* on a évidemment,

$$\begin{aligned} OP' &< OP \\ OA - AP' &< OA - AP \\ OA - (AP + PP') &< OA - AP \end{aligned}$$

ou encore

$$n - (\alpha + i) < n - \alpha$$

que l'on peut d'ailleurs écrire, en se fondant sur la règle d'addition,

$$n + [-(\alpha + i)] < n + [-\alpha]$$

Et pour satisfaire à cette inégalité, il faut que

$$-(\alpha + i) < -\alpha \qquad (1)$$

Cette dernière relation, qui établit le théorème proposé, subsiste encore lorsque l'on suppose α nul, puisqu'au lieu de $OP' < OP$, on a $OP' < OA$; par suite on voit (zéro ne pouvant être affecté d'aucun signe) que $-i < o$.

2me *Démonstration.* Considérant les nombres négatifs comme restes d'une soustraction $a - b$ dans laquelle le diminueur est plus grand que le diminuende, et supposant que a étant *constant*, b soit au contraire variable, il est clair que *plus le diminueur b augmente, plus le reste diminuera* ; pour $b > a$ on peut donner au reste la forme *explicite* d'une quantité négative, en écrivant

$$reste = -(b - a)$$

Dès lors il devient évident que, ce reste décroissant lorsque b augmente, *tout nombre négatif est d'autant plus grand que sa valeur* ABSOLUE *numérique est moindre.*

3me *Démonstration.* Au point de vue philosophique on peut dire:

La formation ou la composition des grandeurs étant dénotée par le signe +, la déformation, dénoncée par le signe —, sera d'autant plus grande et plus puissante qu'il y aura d'éléments, d'unités sur lesquelles la décomposition aura porté.

La quantité $-(\alpha + i)$ indique donc une déformation plus complète que la quantité $-(\alpha)$; et comme *la grandeur* DIMINUE *à mesure que la décomposition agit sur un plus grand nombre d'unités,* la relation (1) devient manifeste.

98. Les quantités négatives entières forment donc, en vertu de (1) et (2) la suite croissante

$$-n, -(n-1), -(n-2) \ldots\ldots\ldots, -3, -2, -1$$

Et il est bon de remarquer que 0 est la *limite* supérieure de cette suite, mais que *cette limite ne peut jamais être atteinte.*

De sorte que les quantités positives et négatives fournissent l'échelle suivante continue et graduelle, dans laquelle 0 est la LIMITE *inférieure* des premières et la LIMITE *supérieure* des dernières :

$$-(n+1), -n, \ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 \ldots\ldots +n, +(n+1)$$

99. Par diverses démonstrations directes du théorème précédent nous permettons d'éviter, selon les divers points de vue auxquels on peut se placer, l'écueil contre lequel sont venus se briser les auteurs des meilleurs traités d'Algèbre : MM. Lefébure de Fourcy, Mayer et Choquet, J. Bertrand multiplient les conventions sans nécessité, et

exposent souvent ainsi l'élève à beaucoup de dangers, dont le moindre est quelquefois le dégoût, toujours l'obscurité et le doute.

Malgré notre profonde estime pour ces savants traités, qu'il nous soit permis de signaler quelques passages afin de montrer combien est réel le reproche que nous venons de formuler.

M. Lefébure s'exprime ainsi : (*Leçons d'Algèbre*, 6me édit., p. 10).

« Parce que les valeurs négatives viennent à la suite des nombres « positifs décroissants 3, 2, 1, 0, on convient de les regarder comme « plus petits que zéro ; et parce que les quantités négatives qui ont « une valeur absolue plus considérable viennent après celles qui « ont une valeur absolument moindre, on les regarde aussi comme « plus petites que ces dernières, etc. »

Dans le *Traité élémentaire d'Algèbre* de MM. Mayer et Choquet, on lit à la page 20 de la cinquième édition,

« Si d'un nombre tel que 10, par exemple, on retranche succes- « sivement les nombres 1, 2, 3, 4. . . . . 10, on obtiendra d'a- « bord des restes positifs de plus en plus petits, puis on parviendra « à un reste nul ; et en continuant à soustraire du même nombre 10 « les nombres 11, 12, 13, 14, ... on produira les quantités « négatives—1,—2,—3, ... On dit par cette raison, que *les « quantités négatives* DOIVENT ÊTRE REGARDÉES *comme étant plus petites « que zéro, et d'autant plus petites que leurs valeurs sont plus gran- « des*. Ce n'est là, du reste, qu'une convention, ou plutôt une forme « de langage dont l'utilité sera appréciée par la suite.

Chez M. Bertrand, (*Algèbre*, page 9), on trouve :

« La forme des résultats précédents peut se simplifier à l'aide « d'une *convention* très-utile en Algèbre, qui consiste à regarder « tous les termes d'un polynome comme *ajoutés* les uns aux autres, « en nommant *nombres négatifs* ceux qui sont précédés du signe —. « Par exemple, on regardera la différence $a - b$ comme résultat « de l'addition de a avec $-b$,

$$a - b = a + (-b) \qquad (1)$$

« L'expression isolée $(-b)$ n'acquiert pour cela aucune signifi- « cation, seulement on dit ajouter $-b$ au lieu de dire retrancher b. « On convient de même que retrancher $-b$ signifie ajouter b.

$$a - (-b) = a + b$$

« Il serait absurde de chercher à démontrer les formules (1) et (2): « les définitions ne se démontrent pas.

Nous reconnaissons que le moyen imaginé par M. *Bertrand* est

simple et facile, mais il faut bien avouer aussi qu'aucune explication des règles d'addition et de soustraction, ne pourrait être moins satisfaisante.

En principe général, et au point de vue rigoureusement scientifique, nous déclarons que les *conventions* et les *postulatums* constituent un vice de doctrine: des *notations* sont souvent nécessaires, mais ces notations, qui ne sont pas du genre des *conventions* de MM. Lefébure, Mayer, Choquet, Bertrand, ne peuvent porter sur la NATURE DES GRANDEURS ; et des conventions ne doivent d'ailleurs être reçues que si elles sont sans influence sur les résultats.

C'est précisément contre ce dernier principe rigoureux que pèchent les conventions additives et soustractives de M. Bertrand.

Nous pourrions encore incriminer bien d'autres manières de voir de ce savant, entr'autres son établissement, *conventionnel* encore, de la règle des signes dans la multiplication, puis sa théorie des imaginaires ; mais nous avons voulu en relevant ici quelques erreurs graves, faire aussi comprendre par quelques citations, combien il est dangereux d'admettre aveuglément certaines productions dues à des hommes qui, à juste titre, font autorité dans la science.

Avec un ensemble de pareilles conventions, dont les opposées seraient il faut bien l'avouer tout aussi admissibles, que deviendrait l'exactitude et la rigueur mathématique ? En général on peut dire qu'*une science est mal établie dès que l'on doit recourir à un échafaudage de conventions indépendantes les unes des autres, et pouvant modifier la nature ou la valeur des résultats.*

100. Le fécond *principe des signes* de Descartes a donné à l'analyse supérieure une généralité et une puissance inconnues auparavant. — Mais Descartes a-t-il signalé la cause philosophique primitive de sa nouvelle loi, et a-t-il vu dans cette loi, transmise par lui comme *simple convention*, autre chose que la *consécration* du FAIT de la simultanéité des oppositions de directions et de signes dans l'ordre concret et dans l'ordre abstrait ?

Nous croyons pouvoir répondre NÉGATIVEMENT à ces questions et dire *qu'une révolution radicale et complète eut changé la constitution philosophique du vaste ensemble mathématique, si l'on s'était tout d'abord élevé jusqu'à l'idée* PREMIÈRE *de la génération des grandeurs:* La *Géométrie de position* de Carnot n'eut dès lors pas vu le jour, parce que sa raison d'être disparaissait en présence de la grande généralité qu'eut acquise immédiatement la *Géométrie ordinaire et élémentaire*.

M. Chasles *s'étonne* qu'on n'ait pas avant lui, étendu à la Géométrie pure, l'usage du *principe des signes de* Descartes, et l'on voit ainsi que l'ordre d'idées, où nous sommes placé, est aussi celui qui a inspiré à ce savant sa *Géométrie supérieure* avec laquelle s'ouvre une *Ere scientifique nouvelle;* seulement nous allons plus loin que M. Chasles et nous déclarons qu'il ne suffit pas, dans l'ordre concret de tenir compte d'un seul mode de génération, qu'il faut encore *introduire explicitement le second mode angulaire génératif,* et enfin qu'il est indispensable de donner pour base à l'Algèbre la *correspondance immédiate* dans ces deux modes *entre le concret et l'abstrait.*

Dans un travail précédent (*) nous avons établi cette correspondance pour les Calculs transcendants: la science mathématique se trouve ainsi reliée dans toute son étendue par une seule et unique conception, et permet dès lors dans un ordre quelconque de spéculations, sans conventions ni paradoxes, le passage du concret à l'abstrait.

(*) Voir notre *Dissertation sur les vrais principes des Calculs transcendants.*— Liége. — H. Dessain. — Octobre 1860.

II

DUALITÉ DU SENS DANS LES QUESTIONS D'ALGÈBRE.— SYMBOLES.

Impossibilité de la solution d'un problème. — Questions d'un même genre, dont les directions de quelques éléments sont différentes ; caractère *spécial* de l'équation générale d'un tel ordre de questions. — Signification et vraie valeur des symboles $\frac{0}{a}$, $\frac{a}{0}$; $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\pm 0 . \infty$, $\infty \pm \infty$; $\infty . \infty$; 0^0, ∞^0 ; ∞^∞ ; $1^{\pm\infty}$; $0^{\pm\infty}$. — Limite vers laquelle converge la somme des termes d'une progression factorielle décroissante, à mesure que le nombre des termes devient de plus en plus grand. — Dualité imaginaire ou de rotation.

101. De la signification restreinte incomplète et fausse attribuée jusqu'aujourd'hui aux signes + et —, et lorsque l'inconnue d'une question représente des grandeurs à déterminer, on a cru pouvoir dire que *les solutions négatives n'exprimaient aucune grandeur ;* dès lors on rejetait ces solutions en les considérant comme des *symboles d'impossibilité.*

Des questions de simple arithmétique ont, sans nul doute, donné naissance à l'Algèbre : c'est du reste ce que semblent prouver ces exercices anciens, ou espèces de défis, où l'on proposait de *deviner* des nombres auxquels on avait fait subir mentalement certaines transformations. Les nombres *pensés* étant ainsi essentiellement positifs, on ne trouvait que des *solutions positives ;* et si parfois il s'en produisait qui fussent *négatives* on les proclamait des *racines fausses :* de là cette qualification de symbole d'impossibilité appliquée à ces *fausses solutions,* dont le nom malheureux est encore employé par Descartes, qui avait cependant reconnu le vice d'une semblable dénomination.

Toutefois dans une foule de circonstances, il était évident que cette prétendue impossibilité ne pouvait être soutenue, et l'on était réduit à *discuter* ou plutôt à *interpréter* ces solutions.

102. Il est important de se faire une juste idée de ce que l'on doit entendre par *impossibilité d'une solution.*

Une équation est l'expression analytique des liaisons qui existent entre les données positives ou négatives et les inconnues, et si les racines sont ou doivent être regardées comme inadmissibles, c'est qu'évidemment les *conditions du problème ne sont pas compatibles entr'elles :* on est suffisamment instruit alors et la question doit être abandonnée comme *absurde*, en se gardant, à l'exemple de tous les autres, de faire subir à l'énoncé des modifications plus ou moins profondes dont aucune n'a sa raison d'être, et dont aucune n'est ni utile ni nécessaire.

Les solutions négatives n'ont pas seules le privilége d'être *parfois* un signe d'impossibilité, et les solutions positives ne présentent souvent aussi aucun sens possible: il se peut *à priori*, que les inconnues doivent être ou entières, ou comprises entre certaines limites suffisamment définies et déterminées par l'énoncé ; dès lors si les racines de l'équation, bien que positives ou négatives, ne satisfont pas à ces conditions, la question n'a pas de sens acceptable.

Le plus souvent aucune de ces deux grandes conditions n'exprime l'état des racines : dès lors le signe (+) d'une racine $(+a)$ exprimera que cette solution se compose de a unités, dont la *direction de translation* est précisément celle que l'on avait d'abord *adoptée* hypothétiquement ; tandis que le signe (—) d'une racine $(-a)$ ordonnerait de compter les a unités dans un sens inverse.

103. Théorème I.— *Lorsque deux questions ne diffèrent que par les directions de certains éléments, soient connus, soient inconnus, leurs équations ne diffèrent que par les signes des éléments analytiques correspondants.*

Démonstration. — Une équation doit être considérée comme *expression* d'égalité entre deux quantités ou grandeurs Q et Q′, dont l'énoncé de la question doit toujours, à moins d'incompatibilité, rendre possible l'existence *simultanée ;* quant aux éléments de Q et Q′, ils sont fournis directement par ce même énoncé.

Il est donc clair que, si certains de ces éléments viennent à changer de direction, les changements introduits dans les expressions de Q et de Q′ ne proviendront que des changements de signes des éléments qui, par rapport à la question primitive, ont changé de direction : en effet ces changements peuvent modifier les expressions numériques de Q et de Q′, mais sont évidemment incapables

d'altérer la NATURE CONCRÈTE des GRANDEURS que Q et Q′ représentent.

La nouvelle équation s'obtiendra donc en changeant, dans la première, les signes de tous les éléments dont les directions sont renversées : il faut remarquer que, dans ces modifications, les puissances de degrés pairs conservent leurs signes, tandis que celle de degrés impairs prennent seules des signes différents.

104. COROLLAIRE I. — *Lorsque deux équations ne diffèrent que par les signes d'une ou de plusieurs inconnues, les racines correspondantes,* NUMÉRIQUEMENT *égales deux à deux, ne diffèrent* ALGÉBRIQUEMENT *que par le signe.*

1re *Démonstration.* — Analytiquement cette vérité est facile à mettre en évidence.

Soient les deux équations données,

$$f(x,y) = 0 \qquad (1)$$

$$f(-x,-y) = 0 \qquad (2)$$

qui renferment deux inconnues, et qui existent simultanément ; si l'on change

$$x \quad en \quad -x'$$
$$y \quad en \quad -y'$$

ces deux équations rentreront l'une dans l'autre, puisqu'elles ne diffèreront que par le changement de x en x' et de y en y', par suite si

$$x = \mp a$$

est racine de l'équation (1), on peut affirmer que les valeurs conjuguées

$$x' = \pm a$$

sont racines de l'équation (2), que l'on obtient en changeant dans (1) les signes de x et de y.

2me *Démonstration.* — Cela résulte immédiatement du théorème qui vient d'être établi, car ces inconnues sont aussi des éléments de la question proposée, et puisque l'équation est la traduction analytique des conditions simultanées de cette question, les changements de signes imposés aux inconnues ou à quelques-unes d'entr'elles, répondent à des renversements de direction pour les éléments inconnus correspondants, sans altération de la valeur numérique.

105. Corollaire II. — *Les deux équations*

$$f(x, y, z.....) = 0 \quad et \quad fx(-,-y,-z.....) = 0$$

sont toujours simultanées.

ou en d'autres termes encore :

On obtient encore une équation, si l'on change les signes des diverses inconnues d'une équation donnée.

106. Tout renversement de direction dans quelques-uns des éléments connus ou inconnus d'une question, se traduisant analytiquement par un changement de signe des quantités algébriques correspondantes, il est permis de déduire de ce qui précède, cette propriété générale :

Théorème II.— *L'Équation et la formule-racine, expression immédiate des valeurs d'une inconnue, reçoivent en même temps diverses modifications qui, portant sur les signes, sont sans influence sur la composition analytique.*

Par suite aussi :

Théorème III.— *Si plusieurs questions ne diffèrent que par les directions de certains éléments, les équations qui leur appartiennent ne diffèrent que par les signes des quantités qui représentent ces éléments ; de sorte alors qu'*une seule équation suffit comme solution complète ; *de plus cette équation générale se* particularise *ensuite pour chacune des modifications de la question, en tenant compte, par des changements de signes, des renversements qui seraient survenus dans les directions de certains éléments de la question primitive.*

Dans la mise en équation, on aura donc désormais à distinguer un *sens unitaire* de translation : on introduira ainsi des quantités positives et négatives qui donneront à la solution une *complète généralité* en permettant son appropriation à toute altération qui, dans la question proposée, n'affectera que la direction des éléments.

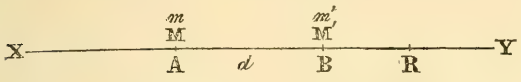
107. Après avoir déterminé *à priori*, comme il vient d'être fait plus haut, la signification rationnelle et immédiate des solutions positives et négatives, mettons en évidence, à l'aide d'un exemple appartenant au domaine ordinaire de l'Enseignement, l'utilité des propriétés générales qui viennent d'être établies.

Problème.— *Deux mobiles* M *et* M′ *se meuvent uniformément sur une droite indéfinie avec des vitesses données* m *et* m′ *; entre les instants où l'un* M *passe par un point* A, *et où l'autre* M′ *passe en un*

certain autre point B *déterminé, il y a une différence de* h *unités de temps. On connaît la distance* d *des points* A *et* B *et l'on demande de déterminer la position du point de rencontre des mobiles dans ce mouvement.*

Remarquons d'abord, quant à la signification du problème, que d'une part l'on n'indique pas dans quel sens les mobiles se meuvent, et que d'autre part, on ne précise nullement quel est celui de ces mobiles qui passe d'abord par le point qui lui est assigné sur la ligne du mouvement ; enfin l'énoncé ne se prononce pas davantage sur la relation d'égalité ou d'inégalité qui existe entre les vitesses m et m'.

Solution.— Le problème qui nous est ainsi présenté est donc un problème général dont la solution ne peut être abordée qu'en *particularisant* ses divers éléments : 1° nous supposerons, par exemple, que $m > m'$ les mobiles se meuvent dans le même sens $x'y$, et que M passe en A avant que M′ ne passe en B.



Soit M′R la distance inconnue x du point B au point R de rencontre qui, dans ce cas, *est situé à droite du point* B.

L'équation doit traduire le fait évident de l'égalité des *temps* employés par M et M′ pour parcourir les distances du point R à des points où ces mobiles se trouvaient antérieurement au même instant. La distance

$$AR = d + x$$

exige pour être parcourue par M, un temps t fourni par la formule,

$$t = \frac{d+x}{m}$$

tandis que le chemin BR est parcouru par M′ en un temps t', donné par,

$$t' = \frac{x}{m'}$$

Une différence de h unités de temps existant, d'après l'énoncé, entre t et t', on obtient l'équation,

$$\frac{d+x}{m} = \frac{x}{m'} + h \ , \quad d'où \quad x = \frac{m'}{m-m'}(d-mh) \qquad (1)$$

qui résout le problème suivant :

Deux mobiles M *et* M′ *se meuvent uniformément et dans le même sens sur une droite indéfinie* XY *avec des vitesses respectives* m *et* m′ *telles que* m *est supérieur à* m′ *: sachant que le passage de* M *en un point donné* A *a lieu* h *unités de temps avant le passage de* M′ *en un autre point* B *donné, dont la distance à* A *est représentée par* d, *on demande en quel point de* XY *se fait la rencontre.*

Selon que $d-mh$ est positif ou négatif, la valeur de x est elle-même positive ou négative : dans le premier cas, le point de rencontre est situé à droite du point B ; dans le second, à gauche (n° 104) de ce même point.

2° Si le passage de M en A se fait h unités de temps après celui de M′ en B, il suffit de changer dans (1) le signe de h ; on obtient

$$\frac{d+x}{m}=\frac{x}{m'}-h, \quad d'où \quad x=\frac{m'}{m-m'}(d+mh) \tag{2}$$

3° Si $m<m'$, les équations (1) et (2) deviennent

$$x=\frac{m'}{m'-m}(mh-d) \tag{1'}$$

$$x=-\frac{m'}{m'-m}(mh+d) \tag{2'}$$

Et l'on conçoit que l'équation (1′) donne un point R, situé à droite ou à gauche de B, selon que mh est plus grand ou plus petit que d ; tandis que (2′), qui est toujours négative, aura un point de rencontre qui est à la gauche de B.

4° Si les mobiles M et M′ se meuvent en sens contraire, leurs vitesses m et m' doivent être de signes différents et les équations (1) et (2) deviennent

$$\frac{d+x}{m}=-\frac{x}{m'}+h, \quad d'où \quad x=\frac{m'}{m+m'}(mh-d) \tag{1$_1$}$$

$$\frac{d+x}{m}=-\frac{x}{m'}-h, \quad d'où \quad x=-\frac{m'}{m+m'}(mh+d) \tag{2$_1$}$$

On comprend que (1$_1$) indique un point situé à droite ou à gauche de B, suivant que mh est supérieur ou inférieur à d ; de plus (2$_1$), ne donnant jamais que des valeurs négatives, montre que la rencontre a lieu à gauche de B.

DES SYMBOLES.

108. En considérant les cas où $m = m'$, on aura

$$x = \frac{m'(d - mh)}{0} \qquad (1_2)$$

$$x = \frac{m'(d + mh)}{0} \qquad (2_2)$$

$$x = \frac{m'(mh - d)}{0} \qquad (1'_2)$$

$$x = -\frac{m'(mh + d)}{0} \qquad (2'_2)$$

En général et lorsque $mh \gtrless d$, ces expressions sont de la forme

$$q = \frac{a}{0} \qquad (\alpha)$$

D'autre part, si $mh = d$ on obtient des quantités fractionnaires dont les deux termes sont simultanément nuls, et dont le type est

$$v = \frac{0}{0} \qquad (\beta)$$

Les expressions (α) et (β), conséquences immédiates et nécessaires de la généralité attribuée à l'équation d'une question, n'offrent par elles-mêmes aucun sens, et leur interprétation est d'une indispensable nécessité : ce sont là les deux premiers *symboles analytiques* dont nous avons à nous occuper.

109. *Des symboles* $\frac{0}{a}, \frac{a}{0}$ et $\frac{0}{0}$. — Considérons une fraction

$$f = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$$

dont les deux termes sont des quantités quelconques, fonctions d'une ou de plusieurs variables; admettons de plus qu'entre P et Q il existe *un plus grand commun diviseur* D, pour lequel

$$\mathrm{P} = p\,\mathrm{D}$$
$$\mathrm{Q} = q\,\mathrm{Q}$$

d'où

$$f = \frac{p\,\mathrm{D}}{q\,\mathrm{D}} = \frac{p}{q}, \qquad et \qquad fq = p$$

La recherche de D est souvent très-pénible et donne lieu à des calculs qui deviennent bien longs pour des fonctions qui ne sont pas même bien compliquées : nous établirons bientôt *un procédé qui permet de trouver immédiatement la valeur* $\frac{p}{q}$ de $\frac{P}{Q}$

Actuellement, remarquons que quelques-uns des facteurs, dont se compose généralement la quantité D, pourraient devenir *simultanément nuls*, par suite de valeurs particulières assignées aux variables; on aurait dès lors,

$$f = \frac{0}{0}$$

tandis qu'en désignant par p' et q' les valeurs, acquises en cet instant par p et q, on devrait avoir

$$f = \frac{p'}{q'}$$

La forme $\frac{0}{0}$ n'est donc évidemment ici rien autre chose qu'un *accident algébrique*, et ne constitue qu'un embarras momentané que l'on éviterait TOUJOURS en réduisant la fraction proposée à sa plus simple expression, inconvénient qu'il s'agira plus tard d'éviter.

Considérons plus spécialement la forme réduite $\frac{p}{q}$ dont la détermination particulière est $\frac{p'}{q'}$,

La fraction $\frac{p'}{q'}$, peut se présenter dans différentes circonstances.

1^er^ CAS. *Le numérateur* p' *est* SEUL *nul*, c'est-à-dire que

$$f = \frac{0}{q'}, \qquad d'où \qquad f \cdot q' = 0$$

Le produit de deux facteurs dont *l'un* q' *est différent de* ZÉRO ne pouvant être nul que si l'autre facteur est nul lui-même, on aura $f = 0$; d'où

$$\frac{0}{q'} = 0 \qquad (A)$$

110. 2me CAS. *Le dénominateur* q′ *est* SEUL *nul*, ce qui donne la forme

$$f = \frac{p'}{0} \quad , \qquad d'où \quad f \,.\, 0 = p'$$

Mais dès que l'un des facteurs d'un produit $f \,.\, 0$ est nul, le produit doit être nul : aucune valeur attribuée à f ne peut, par suite, donner p' pour produit, et l'on est forcé de proclamer l'*impossibilité* du facteur f.

Énonçons donc, à titre de principe :

Toute quantité qui se présente sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est nul, est le symbole de l'IMPOSSIBILITÉ.

Recherchons maintenant la cause de cette impossibilité.

Lorsque, dans une fraction, le numérateur est constant, et que le dénominateur *variable* décroît sans cesse *continuement*, en tendant indéfiniment vers *zéro*, il est clair que la valeur de la fraction croît continuement, et qu'il est aussi impossible d'assigner une *limite* à cet accroissement de valeur de la fraction, qu'il est impossible d'arriver à l'extrême petitesse du dénominateur.

Le quotient que représente cette fraction est donc IMPOSSIBLE *par suite d'accroissement illimité :* il est encore impossible, parce que le dénominateur, qui est le diviseur de la division correspondante, peut être conçu exprimant la valeur des parties égales dans lesquelles doit être partagé le numérateur ; le quotient étant alors la quotité des parties égales, ainsi définies, ce serait une véritable *aberration d'intelligence* que de voir dans ce quotient *un nombre plus grand que tout nombre imaginable.* D'ailleurs il ne faut jamais perdre de vue, sous peine de s'égarer dans les nuages d'une métaphysique *incohérente*, que

Les mathématiques étudient les grandeurs aux seuls points de vue de la valeur, de la forme et de la position, et que toute spéculation mathématique est *interdite* A PRIORI si la comparaison à l'unité conduit à un résultat qu'il est impossible de définir numériquement : toutes les fois qu'une quantité n'est pas susceptible de génération par voie d'addition de ses parties, elle ne peut donner lieu à une évaluation quelconque dont il soit possible de déduire un nombre ; les mathématiques s'arrêtent alors que cesse *forcément* la conception de la mesure des grandeurs.

C'est donc une *hérésie* de s'exprimer ainsi

$$\frac{a}{0} \text{ est un NOMBRE INFINIMENT GRAND.}$$

En effet nous venons de prouver, en partant des idées fondamentales les plus simples que ce *prétendu* nombre n'existe pas.

Que l'on dise $\frac{a}{0}$ est le symbole de l'INFINI, nous voulons bien le tolérer, si, restant complètement en dehors de la *monstrueuse idée* de l'existence de l'infini, on regarde dans cette locution les expressions *infini* et *impossible* comme SYNONYMES.

On est convenu de représenter analytiquement le symbole $\frac{a}{0}$ par le signe ∞, et d'écrire ainsi

$$\frac{a}{0} = \infty$$

111. 3me CAS. — *Le numérateur* P *et le dénominateur* Q *peuvent être* NULS SIMULTANÉMENT, ce qui donne

$$f = \frac{P}{Q} = \frac{0}{0}$$

En général on a

$$f \,.\, Q = P$$

par suite et dans ce cas,

$$f \,.\, 0 = 0$$

Or dès que l'un des facteurs d'un produit $f.0$ est nul, le produit l'est également, quelle que soit du reste la valeur numérique ou algébrique : il est donc clair que f peut recevoir toutes les valeurs imaginables sans que cette dernière égalité cesse d'être satisfaite, et c'est précisément ce qui a fait dire que *l'expression* $f = \frac{0}{0}$ *est le symbole de l'indétermination.*

Toutefois il faudrait se garder de proclamer cette indétermination toutes les fois que, pour une valeur déterminée a de la variable x on aurait à la fois,

$$P_a = 0 \quad et \quad Q_a = 0$$

car il se pourrait que $x = a$ rendit nul le plus grand commun diviseur D entre P et Q, sans donner en même temps (n° 109),

$$p_a = 0 \quad et \quad q_a = 0$$

Si pareille circonstance se présentait, comme il est évident que

$$f = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \frac{p\mathrm{D}}{q\mathrm{D}} = \frac{p}{q}$$

on aurait à simplifier par D la fraction proposée, et à prendre pour vraie valeur cherchée, celle que l'on obtient en faisant $x = a$ dans p et q ; on trouverait ainsi,

$$f = \frac{p_a}{q_a}$$

et l'on comprend que cette fraction peut être *numérique, nulle* ou *infinie.*

112. *Vraie valeur des fonctions qui se présentent sous la forme* $\frac{0}{0}$.

Supposons que P et Q soient des fonctions, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, d'une même variable x, et s'évanouissent en même temps pour $x=a$; supposons de plus, afin que la règle que nous allons trouver ait toute la généralité possible, que les n premières dérivées de même ordre de P et de Q soient aussi et à la fois *nulles* pour cette même valeur particulière a de x.

En représentant par h un accroissement très-petit, qui converge continuement vers zéro, on aura (*), μ étant une quantité plus petite que 1,

$$f = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(a+\mu h)}{\psi^{(n+1)}(a+\mu h)}$$

Faisant maintenant $h = 0$, il vient :

$$f = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(a)}{\psi^{(n+1)}(a)}$$

De là résulte ce théorème :

Le rapport de deux fonctions s'évanouissant en même temps pour une certaine valeur attribuée à la variable, est égal au rapport des valeurs acquises respectivement par les deux premières dérivées de même ordre, qui cessent de s'évanouir à la fois.

Si une seule des dérivées de l'ordre $n+1$ s'évanouit encore, la vraie valeur de la fraction sera l'une des suivantes :

$$f = \frac{0}{\psi^{(n+1)}(a)}$$

$$f' = \frac{\varphi^{(n+1)}(a)}{0}$$

(*) Voyez notre Traité d'Algèbre. (*Calcul des dérivées*, formule de *Taylor*).

On voit donc (n° 109) que f est alors *nul*, et (n° 110) que f' est *impossible* ou *infini*.

Si $n = 0$, ce qui signifie que les dérivées premières $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ ne sont pas nulles chacune pour $x = a$, on aura :

$$f'' = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

115. *Du symbole* $\frac{\infty}{\infty}$. — Si les deux termes de la fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ deviennent *infinis* pour $x = a$, on obtient la nouvelle expression

$$F = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\infty}{\infty}$$

à laquelle on peut donner la forme,

$$F = \frac{\frac{1}{\psi(a)}}{\frac{1}{\varphi(a)}}$$

Et comme $\frac{1}{\varphi a}$ et $\frac{1}{\psi a}$ sont nuls dès l'instant que $\varphi(a)$ et $\psi(a)$ sont infinis, il est clair que le symbole $\frac{\infty}{\infty}$ revient à $\frac{0}{0}$, et qu'en vertu de cette dernière forme, on aura pour vraie valeur de F, par dérivation de ses deux termes :

$$F = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\frac{1}{\psi(a)}}{\frac{1}{\varphi(a)}} = \frac{\frac{\psi'(a)}{\psi^2(a)}}{\frac{\varphi'(a)}{\varphi^2(a)}} = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} \cdot \frac{\varphi^2(a)}{\psi^2(a)}$$

d'où

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

conséquemment la propriété dérivatrice (n° 112) est encore applicable au cas où les deux termes d'une fraction sont simultanément *infinis*.

114. Il pourrait se faire que toutes les dérivées de même rang fussent en même temps ou nulles, ou infinies pour $x = a$; dans ce cas on sera réduit à déterminer par des artifices de décompo-

sition algébrique, le plus grand commun diviseur qui pourrait exister entre les deux termes de la fraction.

Cette circonstance se présente, par exemple, dans

$$f=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

fraction dont les deux termes sont *nuls* pour $x=a$, et dont les dérivées de même ordre de ces termes sont *infinies* pour cette valeur particulière de la variable.

En regardant $x-a$ comme étant la différence de deux carrés, on pourra écrire

$$f=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+2\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})}}{\sqrt{(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})}}$$

Si l'on dégage en numérateur et en dénominateur le facteur $\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$, il viendra :

$$f=\frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+2\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}{\sqrt{(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}}$$

et actuellement si l'on fait $x=a$, on trouve pour vraie valeur,

$$f=\frac{2\sqrt{2\sqrt{a}}}{\sqrt{2a\,.\,2\sqrt{a}}}=\frac{2}{\sqrt{2a}}$$

115. *Du symbole* $0.\infty$. — Si le produit

$$p=\varphi(x)\,.\,\mathrm{F}(x)$$

prend la forme $0.\infty$, par suite de ce que la valeur $x=a$, donne

$$\varphi(a)=0 \quad et \quad \mathrm{F}(a)=\infty$$

on pourra transformer le produit p comme suit,

$$p=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\mathrm{F}(x)}}=\frac{\mathrm{F}(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

et il est clair que la quantité p, considérée sous l'une ou sous l'autre de ces deux dernières formes fractionnaires, revient à l'un ou à l'autre des symboles $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

116. *Du symbole* $\infty \pm \infty$. — Soit la fonction

$$s = \varphi(x) \pm \psi(x)$$

qui fournit

$$s_a = \varphi(a) \pm \psi(a) = \infty \pm \infty$$

Il s'agit de déterminer s_a ; à cet effet transformons comme suit l'expression fonctionnelle s,

$$s = \varphi(x) \pm \psi(x) = \frac{\varphi^2(x) - \psi^2(x)}{\varphi(x) - \psi(x)}$$

Si l'on divise les deux termes de cette fraction par le produit $\varphi^2(x) \cdot \psi^2(x)$ des carrés des fonctions données, il vient

$$s = \varphi(x) \pm \psi(x) = \frac{\dfrac{1}{\psi^2 x} - \dfrac{1}{\varphi^2(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x).\psi^2(x)} - \dfrac{1}{\psi(x).\varphi^2(x)}}$$

L'introduction de $x = a$ conduit dès lors à,

$$s = \varphi(a) \pm \psi(a) = \frac{\dfrac{1}{\psi^2(a)} - \dfrac{1}{\varphi^2(a)}}{\dfrac{1}{\varphi(a).\psi^2 a} - \dfrac{1}{\psi(a).\varphi^2(a)}}$$

et par suite

$$s = \infty \pm \infty = \frac{0}{0}$$

117. *Du symbole* $\infty \cdot \infty$.— Lorsque le produit $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ peut, pour $x = a$, affecter la forme $\infty \cdot \infty$, on trouvera aisément,

$$\varphi(a) \cdot \psi(a) = \infty \cdot \infty = \infty$$

Il suffirait en effet, pour rendre cette vérité évidente, d'écrire

$$\varphi(x) \cdot \psi x = \frac{1}{\dfrac{1}{\varphi(x)} \cdot \dfrac{1}{\psi(x)}}$$

118. *Des symboles* 0^0, ∞^0, ∞^∞ .— Soit l'exponentielle

$$q = \varphi(x)^{\psi(x)}$$

Pour des valeurs particulières de x, on conçoit que cette fonction puisse prendre les formes, 0^0, ∞^0, ∞^∞ : dès lors il devient nécessaire de rechercher les vraies valeurs de ces nouvelles expressions symboliques.

Le passage aux logarithmes fournit aisément, e étant la base népérienne,

$$\log \varphi(x)^{\psi(x)} = \psi(x) \cdot \log \varphi(x)$$

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\psi(x) \cdot \log \varphi(x)}$$

Cette dernière relation ramène la question à *la recherche de la vraie* valeur du produit $\psi(x) \cdot \log \varphi(x)$ de deux fonctions, et comme cette recherche a été faite précédemment, on doit considérer le problème proposé comme étant résolu.

Selon les valeurs nulles ou infinies que peuvent recevoir simultanément $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, on aura donc

$$0^0 = e^{-0 \cdot \infty} \quad \textit{pour} \quad \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ \psi(x) = 0 \end{cases}$$

$$\infty^0 = e^{0 \cdot \infty} \quad \textit{pour} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \infty \\ \psi(x) = 0 \end{cases}$$

$$\infty^\infty = e^{\infty \cdot \infty} \quad \textit{pour} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \infty \\ \psi(x) = \infty \end{cases}$$

Le produit $\infty \cdot \infty$ étant égal à ∞ (n° 117) on voit que $\infty^\infty = \infty$; d'autre part la signification de $0 \cdot \infty$ (n° 116) prouve 0^0 et ∞^0 peuvent avoir des valeurs quelconques, parmi lesquelles on verrait figurer tous les nombres positifs, négatifs ou imaginaires possibles.

119. Remarque. — C'est donc une grave erreur, *commise jusqu'aujourd'hui*, de démontrer que

$$0^0 = 1 \quad \textit{et} \quad \infty^0 = 1$$

c'est-à-dire de prétendre que les symboles 0^0 et ∞^0 n'ont qu'une seule et unique valeur 1.

Bien que la démonstration précédente rende cette erreur manifeste, il est peut-être utile d'ajouter quelques mots sur ce point important.

Des auteurs ont cru, dans a^0, pouvoir considérer a comme un excès : c'est là depuis Euler, l'hypothèse toute gratuite sur laquelle on établit une prétendue démonstration ; or, cette hypothèse ne peut être reçue, *à titre* général, car a, en convergeant vers zéro, peut avoir des formes bien différentes de celles d'un excès.

En un mot,

Le raisonnement d'Euler, reproduit par tant d'auteurs, serait irréprochable, si la fonction $x^{F(x)}$ restait continue lorsque x croît *continuement* par voie négative ou par voie positive ; or il n'en est

pas toujours ainsi, et, dès lors, *c'est une erreur de dire que* 0^0 *est constamment égal à l'unité.*

C'est ce que nous allons mettre en évidence, en partant de cette même fonction. Restant dans la plus complète généralité, soit

$$u = x^{F(x)}$$

$F(x)$ étant nulle pour $x=0$. Passant aux logarithmes, on a

$$\log u = F(x) \,.\, \log x$$

égalité qui montre que, pour $x=0$, si l'on a toujours $0^0=1$, l'on a nécessairement

$$F(x).\log x = 0$$

Voyons si cette relation est toujours vraie, pour toute fonction de x. Soit par exemple la fonction

$$F(x) = \frac{1}{\log^m x}$$

qui, pour $x=0$ (m étant positif et plus petit que 1), satisfait à la condition $F(x)=0$; on aura

$$\log u = \frac{1}{\log^{m-1} x}$$

ou

$$\log u = \log^{1-m} x$$

et l'on voit aisément que le second nombre de cette expression, au lieu de converger vers zéro, *croît indéfiniment.*

Soit en second lieu, (m étant plus grand que 1),

$$F(x) = a^{-\frac{1}{x^m}}$$

et l'expression

$$\left(a^{-\frac{1}{x^m}}\right)^x = a^{-\frac{1}{x^{m-1}}}$$

qui, si l'on suppose x positif et convergeant vers zéro, converge continuement elle-même vers zéro.

On aura à la limite

Pour $m > 1$, $0^0 = 0$

» $m = 1$, $0^0 = a^{-\frac{1}{0^0}}$

» $m < 1$, $0^0 = 1$

Voilà donc une fonction qui donne 0 et 1 pour valeurs du symbole 0^0: mais il se présente ici une remarque d'une grande importance attendu qu'elle prouve l'impossibilité de la seule et unique valeur 1 de a^0.

Pour $m=1$, on a

$$0^0 = a^{-\frac{1}{0^0}}$$

Or si 0^0 était toujours égal à 1, il viendrait

$$1 = a^{-1} = \frac{1}{a} \quad , \qquad et \qquad a = 1$$

conséquence évidemment absurde, puisque l'unité deviendrait égale à une fonction déterminée de la quantité *quelconque* a.

Enfin *et pour ne laisser aucun doute sur cette question*, faisons voir que le symbole 0^0 est une limite qui peut prendre une valeur quelconque dépendant de la fonction primitive dont il dérive.

Considérons l'identité

$$\left(a^{\frac{1}{x}}\right)^x = a$$

dont le premier nombre prend la forme 0^0 lorsque, a étant plus petit que 1, x converge vers zéro; il est évident que pour $x=0$, l'on a

$$0^0 = a$$

ce qui prouve que

0^0 *peut avoir une valeur quelconque*

121. *Du symbole* $1^{\pm\infty}$. — L'exponentielle $\varphi(x)^{\psi(x)}$ qui, comme nous l'avons vu (n° 118), donne

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\psi(x)\log\varphi(y)}$$

se présente sous la forme $1^{\pm\infty}$, lorsque pour $x=a$, on a

$$\varphi(a)=1 \qquad d'où \qquad \log\varphi(a)=0$$

$$\psi a = \pm\infty$$

On aura ainsi

$$\varphi(a)^{\psi(a)} = e^{\psi(a)\log\varphi(a)} = 1^{\pm\infty} = e^{\pm 0\cdot\infty}$$

La question est donc ramenée à trouver (n° 115) la vraie valeur du produit $\psi(x)\,.\,\log\varphi(x)$ de deux fonctions, alors que par suite d'une valeur particulière de x, ce produit se présente sous la forme $\pm 0\,.\,\infty$.

122. *Du symbole* $0^{\pm\infty}$. — La même exponentielle affecte la forme 0^{∞} lorsque

$$\varphi(a)=0 \qquad et \qquad \psi(a)=\infty$$

Dès lors on a

$$\varphi(a)^{\psi(a)} = e^{\psi(a)\log\varphi(a)} = 0^{\infty} = e^{\infty(-\infty)} = \frac{1}{e^{\infty\cdot\infty}}$$

Mais on a vu (n° 117) que $(\infty\,.\,\infty)$ est *infini*, donc :

$$0^{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Enfin, si $\varphi(a)=0$ *et* $\psi(a)=-\infty$, il viendra

$$0^{\infty} = e^{\infty\cdot\infty} = \infty$$

123. *Observation.*— Dans la détermination numérique des valeurs de 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$, et lorsque l'on aura à développer une puissance de e, il faudra faire usage de la formule connue, déjà employée et généralisée (n° 85) pour θ quelconque, réel ou imaginaire,

$$e^{\theta} = 1+\frac{\theta}{1}+\frac{\theta^2}{1.2}+\frac{\theta^3}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{\theta^n}{[n]}$$

124. Progression décroissante illimitée.— On lit dans l'Algèbre de M. L. Lefebure de Fourcy, (page 246, 6me édition. — Paris) :

Si l'on prolonge à l'infini une progression géométrique décroissante, la somme des termes est égale au quotient du premier, divisé par l'unité moins la raison.

Beaucoup d'auteurs se sont cru autorisés à suivre et à répéter cet énoncé qui n'est rien autre chose qu'une *hérésie*, capable à elle seule de fausser le jugement mathématique du jeune élève à qui on développe une semblable doctrine.

C'est ce que très peu de mots feront saisir :

Une série quelconque est une suite de termes, qui se déduisent les uns des autres d'après une loi déterminée et constante, et il est incontestable que proposer de faire la somme des termes d'une série dont le nombre des termes est illimité, est une question qui ne présente aucun sens possible, puisqu'il est évident que cette somme ne peut être formée par l'addition successive d'un nombre *fini*, *déterminé*, et par conséquent seul admissible dans le calcul, d'unités de même espèce. MM. Mayer et Choquet (*Traité élémentaire d'Algèbre*,

5e édition, page 243) semblent aussi méconnaître un tel principe lorsqu'ils disent,

La somme de tous les termes de la progression en nombre INFINI, *d'une progression géométrique décroissante* est RIGOUREUSEMENT ÉGALE à $\frac{a}{1-r}$

En s'exprimant de cette manière on expose l'élève à croire à l'existence de la *somme* ou du *total* d'un nombre illimité de quantités ; et c'est là une erreur grave dont il importe de faire la rectification,

Considérons la série élémentaire suivante, ou progression factorielle générale, à propos de laquelle l'erreur est si souvent reproduite et enseignée,

$$\therefore t_1 , t_2 , t_3 , \ldots\ldots\ldots t_{n-1} , t_n$$

n étant le nombre des termes considérés dont la somme est représentée par S ; la raison étant q et la notation t^i désignant un terme quelconque en faisant passer i par toutes les valeurs entières comprises depuis $i=1$, jusqu'à $i=n$; on sait que

$$S = \frac{t_n q - t_1}{1-q}$$

Les puissances d'un nombre q PLUS PETIT QUE 1 décroissant indéfiniment, on peut, pour plus de facilité, écrire

$$S = \frac{t_1 - t_n q}{1-q} \qquad (1)$$

On appelle LIMITE *d'une quantité, variant d'une manière continue, la valeur dont peuvent s'approcher indéfiniment et d'aussi près qu'on le veut, les divers états particuliers successifs de cette variable :* il est important que cette définition soit bien comprise, et qu'on en fasse saisir l'application à l'expression (1).

Lorsque la raison q de la progression factorielle est moindre que 1, en vertu de la loi de formation

$$t_{i+1} = t_1 q^i$$

il est clair que t_{i+1} et q^i décroissent en même temps, et de telle manière que, *s'il était possible d'obtenir* pour une certaine valeur de n, et comme l'ont prétendu certains auteurs,

$$q^n = 0$$

on aurait, au même moment,

$$t_{n+1} = 0$$

S'il en était ainsi, comme

$$q^n = q^{n-1}.q$$

il faudrait que

$$q^{n-1} = 0$$

On prouverait de la même manière que les diverses puissances de q seraient alors nulles, et l'on parviendrait ainsi de proche en proche à trouver que $q = 0$.

Les termes de la progression factorielle décroissante, *convergent* donc *vers zéro*, ce qui signifie que *zéro* est la *limite* dont la valeur d'un terme diffère de moins en moins et d'aussi peu qu'on le veut, en considérant le rang du terme comme croissant indéfiniment.

Dès lors la somme S des termes tend *continuement* vers une autre limite qu'il importe de connaître, et que l'on obtient aisément en écrivant (1) sous la forme

$$S = \frac{t_1}{1-q} - \frac{q}{1-q}\, t_n$$

EN PASSANT A LA LIMITE, c'est-à-dire en considérant d'une part la limite zéro de laquelle s'approche indéfiniment t_n lorsque n croît SANS LIMITE, et d'autre part la limite vers laquelle converge alors la somme S des termes de la progression, on aura

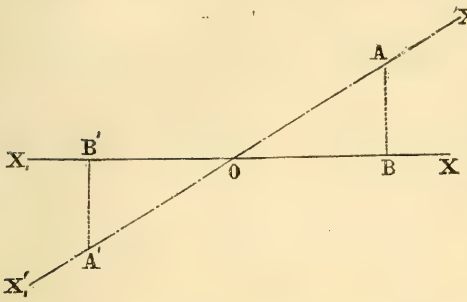
$$\lim S = \frac{t_1}{1-q}$$

On obtient ainsi, avec la plus grande rigueur, cette vérité:

La somme des termes d'une progression décroissante factorielle a pour limite le quotient du premier terme par l'excès de l'unité sur la raison.

Notons bien que CETTE LIMITE, qui est complètement en dehors de la génération sommatoire de la progression, NE PEUT JAMAIS ÊTRE ATTEINTE, puisqu'il faudrait pour cela que $t_n = 0$, ce qui a été démontré être impossible.

125. *Dualité imaginaire.* — Soient 0 l'origine commune de



translation et de rotation, α l'angle des deux directions XOX_1 et $X'OX'_1$; en admettant que OX' soit le sens de translation positive, que $OA = l$, $OB = p$, $AB = q$, nous avons vu (n° 52) que la droite OA est représentée analytiquement en grandeur et position, par $p + q\sqrt{-1}$

Si l'on considère les quantités p et q comme étant des variables, pouvant par conséquent recevoir toutes les valeurs possibles *conjuguées*, satisfaisant à la condition (n° 73),

$$p^2 + q^2 = l^2$$

il est clair que cette expression représentera successivement toutes les directions possibles autour du point 0.

De plus, nous avons vu (n° 44) que le signe du terme $q\sqrt{-1}$ peut être attribué à q en regardant comme constant et uniforme le sens déterminé de rotation, celui de droite à gauche, par exemple.

Dès lors demandons nous quels sont les *caractères de la dualité imaginaire* : remarquons d'abord que si les deux droites OA et OA' sont égales, on a

$$OB' = OB \qquad et \qquad AB = A'B'$$

pour passer de OA à OA', il faudra donc, à l'aide de la rotation, et en représentant par p' et q' les paramètres de la droite OA',

1° La translation de p unités de 0 en B' d'où l'on déduit

$$OB' = p' = -p$$

2° La rotation, à l'aide *d'un* seul mouvement normal, d'une longueur égale à AB; *cette longueur* qui doit prendre la position A'B', *a donc dû s'engendrer par translation dans le sens négatif*, de B' vers X_1 (n° 43) et par suite :

$$A'B' = q' = -q\sqrt{-1}$$

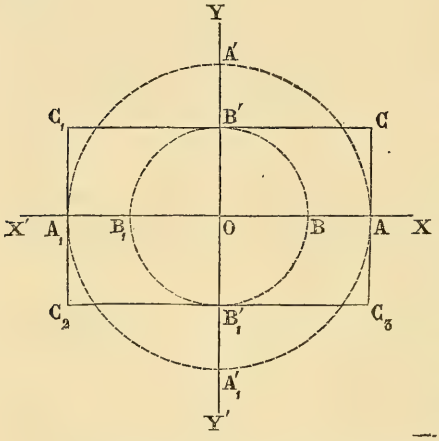
On a ainsi,

$$p' + q'\sqrt{-1} = -p - q\sqrt{-1}$$

Les imaginaires $p+q\sqrt{-1}$ et $-p-q\sqrt{-1}$ sont donc de directions opposées,
d'où l'on déduit :

Le changement de signes des paramètres entraîne l'opposition de directions des imaginaires.

Cette loi est, comme on le voit, l'extension aux imaginaires obliques du principe des signes de Descartes, déja établi pour le cas des imaginaires normales.



126. Lorsque nous traitions (n° 49) de la multiplication des imaginaires de la forme $m\sqrt{-1}$, nous avons établi la signification *réelle* que les signes + et — ont dès qu'ils s'appliquent aux surfaces: en suivant le même mode de démonstration on trouverait que les rectangles

$$OA_1C_2B'_1 \quad ou \quad (+a\sqrt{-1})(-b\sqrt{-1}) = +ab$$
$$OA\,C\,B' \quad ou \quad (-a\sqrt{-1})(+b\sqrt{-1}) = +ab$$

sont opposées au sommet, par rapport à l'origine, et qu'il en est aussi de même des deux autres rectangles

$$OB'C_1A_1 \quad ou \quad (+a\sqrt{-1})(+b\sqrt{-1}) = -ab$$
$$OB'_1C_3A \quad ou \quad (-a\sqrt{-1})(-b\sqrt{-1}) = -ab$$

Dans ces deux groupes de rectangles les dimensions de mêmes noms sont évidemment des signes contraires : on voit de plus qu'il est permis de remplacer les dimensions imaginaires de ces rectangles par des dimensions réelles de la manière suivante,

$$OA_1C_2B' \quad ou \quad (+a\sqrt{-1})(-b\sqrt{-1}) = (-a)(-b)$$
$$OA\,C\,B' \quad ou \quad (+a\sqrt{-1})(-b\sqrt{-1}) = (+a)(+b)$$
$$OB'C_1A_1 \quad ou \quad (+a\sqrt{-1})(+b\sqrt{-1}) = (-a)(+b)$$
$$OB'_1C_3A \quad ou \quad (-a\sqrt{-1})(-b\sqrt{-1}) = (+a)(-b)$$

Le signe $\sqrt{-1}$ disparaît ainsi et le coefficient multiplicateur conserve son signe, tandis que le coefficient multiplicande change de signe.

La même expression superficielle numérique réelle correspond donc toujours à deux rectangles opposés par le sommet, et dont les dimensions égales et de signes contraires sont respectivement dirigées suivant les axes de translation et de rotation.

Nous sommes entrés dans ces quelques détails sur le signe que peut posséder l'expression d'une surface afin de donner 1° à cette quantité algébrique le sens abstrait et concret le plus général possible; 2° à la règle des signes de Descartes son acception complète; 3° le moyen de passer dans une foule de cas du réel à l'imaginaire, et réciproquement.

127. Dans les deux premières parties de ce travail, nous avons exposé le point de vue nouveau qui, selon nous, doit dominer et diriger l'exposition élémentaire et philosophique de l'Algèbre : nous sommes parti de cette idée fondamentale que *les mathématiques étudient la quantité sous le triple aspect de la grandeur, de la position, et de la forme; nous avons successivement procédé à l'évaluation de la quantité à l'aide de son unité, puis à l'étude de sa génération soit par translation, soit par rotation.*

Chaque loi fondamentale, obtenue et établie à priori, se présente ainsi avec la rigueur scientifique que ne peut jamais donner une série de *conventions*, toutes indépendantes les unes des autres, arbitraires d'ailleurs dans leur essence, et en opposition desquelles on pourrait toujours offrir, sans désavantage, des conventions et des notations contraires.

Il reste à faire voir par quelques exemples, comment, jusqu'à quel point et avec quels avantages, le point de vue auquel nous nous sommes placés, se prête aux conceptions géométriques et analytiques en permettant avec rapidité le passage de l'abstrait au concret et réciproquement.

III

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

—

DU POINT ET DE LA LIGNE DROITE.

Équations du point. — Équation de la droite; dualité imaginaire. — Équation d'une droite passant par un point donné. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit situé sur une droite. — Équation d'une droite qui, passant par un point donné, est parallèle à une droite donnée. — Équation d'une droite qui, passant par un point donné, fait avec une droite donnée un angle connu. — Équation d'une droite qui, passant par un point donné, est perpendiculaire à une droite donnée. — Équation d'une droite passant par deux points donnés. — Intersection de deux droites. — Condition de parallélisme de deux droites. — Le rapport des sinus de deux angles d'un triangle est égal au rapport des côtés respectivement opposés à ces angles. — Loi fondamentale de projection linéaire. — Distance d'un point à une droite.

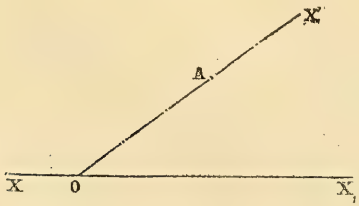
128. Équations du point. — Les équations ou les coordonnées d'un point quelconque sont évidemment les longueurs comptées d'une part sur l'axe de translation, à partir de l'origine, et, d'autre part, perpendiculairement à cet axe à partir de l'extrémité de la première longueur engendrée.

Les coordonnées d'un point sont ainsi, suivant les notations analytiques déjà si souvent définies précédemment,

$$a \quad et \quad b\sqrt{-1}$$

129. Équation générale de la droite. — 1° *Droite passant par l'origine.* — Nous avons fait voir (n° 52) que, si i est le *coefficient de direction* d'une droite, toute quantité de la forme

$$i = a + b\sqrt{-1}$$



représente une certaine longueur, tant en grandeur OA qu'en direction OX', alors que l'on compte la rotation à partir d'un point fixe O pris pour origine et d'un axe OX de translation.

En désignant par m le module $\sqrt{a^2+b^2}$ de cette imaginaire, par θ l'argument ou l'inclinaison de OX′ sur OX, et en se rappelant toujours que m, n'exprimant qu'un seul nombre d'unités de longueur, *est essentiellement positif*, on a donné à l'imaginaire proposée, la forme (n° 72),

$$i = m\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta) \qquad (1)$$

Des deux quantités θ et m, indépendantes l'une de l'autre, et que renferme le second membre de cette équation, la première θ, selon l'état *constant* ou *variable* qui lui est assigné, permet l'étude d'une droite, passant par l'origine O de rotation, et dont la direction serait *déterminée* ou *arbitraire;* la seconde, établit la position des divers points d'une droite OX′ dont l'inclinaison θ sur OX est *particularisée*.

130. La dualité imaginaire exige (n° 125) que le prolongement de la longueur (1) ait pour équation

$$i = -m\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)$$

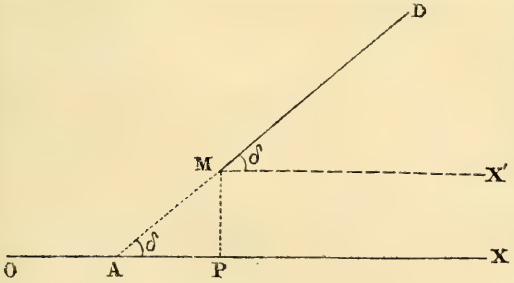
Et il est utile de remarquer, qu'au seul point de vue algébrique, l'équation (2) se déduit de (1) en changeant θ en $\pi + \theta$.

131. 2° *Droite qui ne passe pas par l'origine.* — Si la droite considérée ne passe pas par l'origine ou si l'origine, au lieu d'être en O, point de rencontre de OX′ avec l'axe de translation, se trouve en X, et de telle manière que $OX = l$, il est clair que l'équation du chemin XOA sera,

$$i = l + m\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta) \qquad (2)$$

Et cette équation est l'expression analytique, en grandeur et en direction, de la distance du point X à un point quelconque de OX′, alors que l'on est obligé de passer par le point O de rencontre de la droite et de l'axe de translation.

132. Équation d'une droite passant par un point donné. — Soit le point M donné par ses coordonnées $OP = a$ et $MP = b\sqrt{-1}$, relatives à l'axe OX et à l'origine O. La droite demandée n'étant pas suffisamment *déterminée*, son équation devra renfermer une



arbitraire que nous supposerons être l'angle δ, fait par la droite AMD proposée avec l'axe OX, ou avec la parallèle MX' à cet axe, menée par le point M.

Le coefficient de direction de MD sur MX' sera donc, m étant quelconque,

$$m\,(\cos\delta + \sqrt{-1}\,\sin\delta)$$

Le triangle rectangle AMP apprend que

$$\mathrm{AP} = \frac{\mathrm{MP}\,.\,\sin\mathrm{AMP}}{\sin\mathrm{MAP}} \qquad ou \qquad \mathrm{AP} = \frac{b\cos\delta}{\sin\delta}$$

par suite,

$$\mathrm{OA} = a - b\,\frac{\cos\delta}{\sin\delta}$$

L'équation de la droite AMD sera donc

$$i = a - b\,\frac{\cos\delta}{\sin\delta} + m\,[\cos\delta + \sqrt{-1}\,\sin\delta] \qquad (3)$$

133. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'un point donné appartienne à une droite donnée.* — Soit $(p\,,\ q\sqrt{-1})$ le point donné, et

$$i = l + m\,[\cos\delta\sqrt{-1}\,\sin\delta] \qquad (A)$$

l'équation de la droite donnée. Si l'on imaginait que par le point donné on ait mené une droite, dont l'argument est ϱ et dont l'équation est par suite, comme on vient de le voir,

$$i = p - q\,\frac{\cos\varrho}{\sin\varrho} + m\,[\cos\varrho + \sqrt{-1}\,\sin\varrho] \qquad (B)$$

il est clair que le point où cette droite B coupe l'axe de translation est donné, dans l'équation (B), par la quantité $p - q\,\dfrac{\cos\varrho}{\sin\varrho}$: dès lors, pour que les droites (A) et (B) se confondent, il faut évidemment satisfaire à la première condition,

$$p - q\,\frac{\cos\varrho}{\sin\varrho} = l\ , \qquad d'où \qquad \mathrm{tang}\,\varrho = \frac{q}{p-l} \qquad (C)$$

et ensuite à la seconde condition,

$$\varrho = \delta$$

Il faut donc que l'angle déterminé par l'équation (C) soit précisément égal à l'argument de la droite donnée (A).

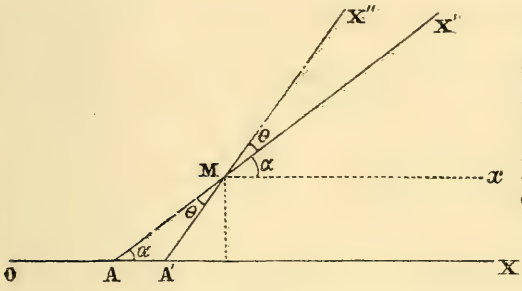
134. Équation d'une droite qui, passant par un point donné, est parallèle a une droite donnée. — Soit l'équation

$$i_1 = \mathrm{L} + m\,[\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta]$$

de la droite donnée. L'équation de toute droite menée par le point donné (a et $b\sqrt{-1}$) a nécessairement la forme (3, n° 132), et il suffira de changer δ en θ pour obtenir l'équation cherchée,

$$i = a - b\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + m\,[\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta] \qquad (4)$$

135. Équation d'une droite qui, passant par un point donné, fait avec une droite donnée un angle connu.



Soient pour l'origine O et l'axe OX, le point M et la droite AMX' donnés respectivement par leurs équations

$$a \quad , \quad b\sqrt{-1}$$

$$i = l + m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha]$$

En prolongeant jusqu'à l'axe de translation les droites MX' et MX'', dont la seconde MX'' doit faire avec MX' l'angle θ donné, on forme un triangle AA'M, qui fournit

$$\widehat{\mathrm{X''A'X}} = \alpha + \theta$$

L'inclinaison de MX'' sur l'axe étant ainsi déterminée, il suffira dans l'équation (3, n° 132) de remplacer δ par $\alpha + \theta$, et l'on obtiendra,

$$i = a - b\,\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)} + m\,[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\,\sin(\alpha+\theta)] \qquad (5)$$

L'argument α est donc augmenté de l'angle θ fait par la droite demandée avec la droite donnée.

136. Équation d'une droite qui, passant par un point donné, est perpendiculaire a une droite donnée. — 1° La droite donnée, *passant par le point donné* (a, $b\sqrt{-1}$), et ayant pour équation (3, n° 132),

$$i = a - b\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha]$$

le coefficient de direction d'une droite qui lui est perpendiculaire s'obtiendra, en vertu de la signification du signe factoriel de perpendicularité, en multipliant par $\sqrt{-1}$ la quantité $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$; de telle sorte que la direction normale aura pour détermination,

$$m\sqrt{-1}\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$

ou, après multiplication,

$$m\,[-\sin\alpha + \sqrt{-1}\cos\alpha]$$

expression dans laquelle la quantité entre crochets se déduit évidemment de $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$, par le changement de α en $\alpha + \frac{\pi}{2}$, dans l'équation de la droite donnée : dès lors,

$$\cos\alpha \quad \textit{devient} \quad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin\alpha \quad \textit{devient} \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

et l'équation demandée est

$$i = a + b\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + m\sqrt{-1}\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha] \qquad (6)$$

2° La droite donnée étant représentée par

$$i = l + m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$

Et le point donné, qui peut en général ne pas appartenir à cette droite, étant défini par p et $q\sqrt{-1}$, l'équation de la perpendiculaire sera

$$i = p + q\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + m\sqrt{-1}\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha] \qquad (7)$$

137. Équation d'une droite passant par deux points donnés. — Soient les deux points donnés

$$a \;,\; b\sqrt{-1}$$
$$a' \;,\; b'\sqrt{-1}$$

La droite demandée devant passer par *chacun* de ces points, il est clair que son équation de la forme (5) fournira les conditions

$$i = a - b\frac{\cos\delta}{\sin\delta} + m\,[\cos\delta + \sqrt{-1}\sin\delta]$$

$$i = a' - b'\frac{\cos\delta}{\sin\delta} + m\,[\cos\delta + \sqrt{-1}\sin\delta]$$

Dans ces équations de condition, qui sont nécessairement simultanées, l'inclinaison δ inconnue est la même et se déterminera en posant

$$a - b\frac{\cos\delta}{\sin\delta} = a' - b'\frac{\cos\delta}{\sin\delta}\ , \qquad d'où \qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{b-b'}{a-a'}$$

d'où

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{b-b'}{a-a'},\ \sin\delta = \pm\frac{b-b'}{\sqrt{\overline{a-a'}^2+\overline{b-b'}^2}},\ \cos\delta = \pm\frac{a-a'}{\sqrt{\overline{a-a'}^2+\overline{b-b'}^2}}$$

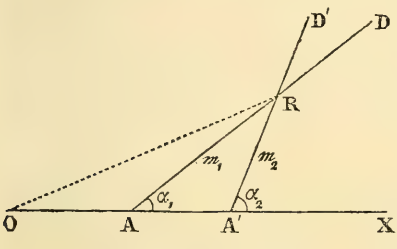
L'équation de la droite passant par deux points donnés pourra donc être considérée sous l'une des deux formes

$$i = \frac{a'b-ab'}{b-b'} + m\left[\cos.\text{arc tang}=\frac{b-b'}{a-a'} + \sqrt{-1}\,\sin.\text{arc tang}=\frac{b-b'}{a-a'}\right] \tag{8}$$

$$i = \frac{a'b-ab'}{b-b'} \pm m\left[\frac{a-a'}{\sqrt{\overline{a-a'}^2+\overline{b-b'}^2}} + \sqrt{-1}\ \frac{b-b'}{\sqrt{\overline{a-a'}^2+\overline{b-b'}^2}}\right] \tag{9}$$

138. Intersection des deux droites. — Soient les deux droites AD, A'D' représentées par les équations

$$i_1 = l_1 + m_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1)$$
$$i_2 = l_2 + m_2(\cos\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin\alpha_2)$$



dans lesquelles O A $= l_1$ et O A' $= l_2$. Le point d'intersection R étant distant des points A et A' des quantités

$$\text{AR} = m_1 \qquad et \qquad \text{A'R} = m_2$$

il est clair que les *directions* i_1 *et* i_2 *sont égales* relativement au point R, c'est-à-dire pour la ligne OR, et qu'ainsi l'on a

$$l_1 + m_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1) = l_2 + m_2(\cos\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin\alpha_2)$$

Le théorème (n° 60) permet de déduire, de cette équation imaginaire, les deux autres réelles,

$$\begin{aligned} l + m_1\cos\alpha_1 &= l_2 + m_2\cos\alpha_2 \\ m_1\sin\alpha_1 &= m_2\sin\alpha_2 \end{aligned}$$

et la résolution de ces deux équations donne immédiatement,

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}(l_2-l_1) \\ m_2 &= \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}(l_2-l_1) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

139. *Condition du parallélisme de deux droites.* — Le point R ne pouvant plus exister, et bien que α_1 et α_2 aient des valeurs déterminées, il faut, m_1 et m_2 étant impossibles, que l'on ait

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \qquad d'où \qquad \alpha_2 = \alpha_1 \qquad c.q.f.d.$$

140. Théorème. — *Dans tout triangle les sinus des angles ont le même rapport que les côtés opposés.*

Démonstration. — Dans le triangle AA'R, (*fig.* du n° 138), on a

$$\widehat{ARA'} = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad et \qquad \widehat{AA'R} = \pi - \alpha_2$$

Les expressions de m_1 et m_2 deviennent dès lors

$$AR = \frac{\sin AA'R}{\sin ARA'} AA' \qquad ou \qquad \frac{\sin AA'R}{\sin ARA'} = \frac{AR}{AA'}$$

$$A'R = \frac{\sin A'AR}{\sin ARA'} AA' \qquad ou \qquad \frac{\sin A'AR}{\sin ARA'} = \frac{A'R}{AA'}$$

c.q.f.d.

141. Théorème. — *La projection d'une droite sur une autre est égale à la longueur projetée multipliée par le* cosinus *de l'angle fait par la droite avec sa projection.*

Démonstration. — Dans les formules (10, n° 138) posons

$$ARA' = \alpha_2 - \alpha_1 = 1^\delta, \quad d'où \quad \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 1 \quad et \quad \sin\alpha_2 = \cos\alpha$$

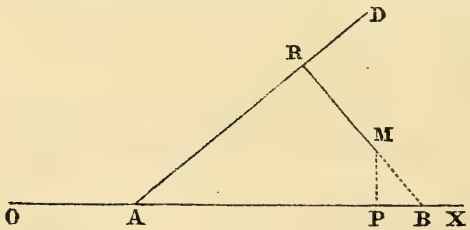
et il viendra,

$$AR = AA' \cdot \cos\alpha \qquad c.q.f.d.$$

142. Distance d'un point a une droite. — Soient le point M, (p, q), et la droite AD dont l'équation est, pour $OA = l$,

$$i = l + m[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$

et dont la droite BR, qui lui est perpendiculaire, a pour équation, d'après (7, n° 136),



$$i = p + q\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + m\sqrt{-1}\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$

Il vient donc

$$BO = p + q\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad d'où \qquad AB = p - l + q\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Mais (n° 141), on a

$$\text{MP} = \text{BM} \cdot \cos \text{MBP} \qquad d'où \qquad \text{BM} = \frac{q}{\cos \alpha}$$

et aussi

$$\text{BR} = \text{AB} \cdot \cos \text{ABR} \qquad d'où \qquad \text{BR} = \text{AB} \cdot \sin \alpha$$

enfin comme

$$\text{MR} = \text{BR} - \text{BM}$$

il vient, après substitution des valeurs de AB, BR, BM qui viennent d'être trouvées,

$$d = \text{MR} = (p - l) \sin \alpha - q \cos \alpha \qquad (11)$$

Afin de déterminer les coordonnées $(x, y\sqrt{-1})$ du point R, représentons AR par m_1 et BR par m_2 : il faudra, par combinaison des équations des droites AD et BR, satisfaire à la relation,

$$l + m_1 \cos \alpha + m_1 \sqrt{-1} \sin \alpha = p + q \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - m_2 \sin \alpha + m_2 \sqrt{-1} \cos \alpha$$

qui donne lieu (n° 60) aux deux équations de condition,

$$l + m_1 \cos \alpha = p + q \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - m_2 \sin \alpha$$

$$m_1 \sin \alpha = m_2 \cos \alpha$$

auxquelles, par rapport aux inconnues m_1 et m_2, il est bon de donner la forme,

$$m_1 \cos \alpha + m_2 \sin \alpha = p - l + q \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$m_1 \sin \alpha - m_2 \cos \alpha = 0$$

La résolution très-simple de ces équations fournit

$$m_1 = \text{AR} = (p - l) \cos \alpha + q \sin \alpha$$

$$m_2 = \text{BR} = (p - l) \sin \alpha + q \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

d'où

$$x = p - [(p - l) \sin \alpha - q \cos \alpha] \sin \alpha$$

$$y = [(p - l) \cos \alpha + q \sin \alpha] \sin \alpha$$

IV

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES PLANES.

Équations modulaire et polaire d'une ligne courbe. — Équation différentielle. — De la tangente; ses définitions dynamique et géométrique. — Signification géométrique de la dérivée polaire. — Équation de la tangente en un point donné d'une courbe. — Équation de la tangente menée par un point extérieur. — Équation de la tangente dont la direction est donnée. — De la normale; équation d'une normale menée par un point de la courbe, par un point extérieur à la courbe, parallèlement à une droite donnée. — Dérivée de l'arc d'une courbe. — Signification géométrique de cette dérivée. — Cercle osculateur. — Rayon de courbure. — Centre de courbure. — Courbure d'une courbe en un point donné. — Développée d'une courbe. — Application des principes précédents à l'étude de quelques courbes.

145. *Équations modulaire et polaire d'une courbe.* — Si dans l'équation modulaire générale

$$i = m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha] \qquad (A)$$

l'on regarde m et α comme étant des variables *simultanées* et qui dépendent l'une de l'autre, il est clair que cette équation, convenant, *pour une même origine* ou PÔLE donné, à une suite continue de points, sera celle d'une certaine courbe.

Cette *simultanéité* peut d'ailleurs être PARTICULARISÉE d'une manière quelconque, et *exige* comme complément indispensable *la détermination analytique de sa loi;* en d'autres termes, il faut connaître ou établir, dans chaque cas, *la relation* qui existe entre la valeur de α correspondant à un point de la courbe, et la distance de ce point au pôle, donné ou choisi dans le plan de la courbe : de là une seconde équation, que nous appellerons *équation polaire*, qui a la forme générale,

$$\alpha = \mathrm{F}\,(m) \qquad (B)$$

dans laquelle m ou le *rayon vecteur* représente la distance d'un point de la courbe à l'origine.

144. *Équation différentielle d'une courbe.* — Pour une fonction continue, mais non linéaire, une loi spéciale régit ainsi les variations des accroissements finis Δm et $\Delta\alpha$ dépendant l'un de l'autre, imposés à m et à α : cette loi, qui persiste même à l'origine de ces accroissements et qui préside par suite à leur *génération simultanée*, reçoit pour ce motif, le nom de *loi de génération* (*) ; elle change à chaque instant et l'on ne pourrait admettre que pour une certaine variation Δm, quelque petite qu'on voulut d'ailleurs la supposer, le rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta m}$ soit constant, puisqu'alors on supposerait que la fonction proposée est linéaire.

Cependant rien n'empêche de concevoir, hypothétiquement bien entendu, mais pour une valeur particulière et arbitraire de m, une autre fonction de la même variable *indépendante* m, dont le rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta m}$ CONSTANT ET INVARIABLE, soit précisément égal à celui qu'assigne, pour *la fonction* $F(\alpha, m) = 0$ *continue et non linéaire*, la loi de génération appliquée à l'origine m des accroissements ; mais, dans le travail auquel nous venons de renvoyer, il a été démontré que, pour un certain intervalle de chaque côté de m, on a, lorsque α reçoit une valeur réelle quelconque,

$$\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta m} = F'(m)$$

On a donc, relativement à la nouvelle fonction dont on représente par $d\alpha$ la variation angulaire,

$$d\alpha = \Delta m . F'(m) \qquad (C)$$

Bien plus, *et sans créer* EXPLICITEMENT cette seconde fonction, il est incontestable que l'*on peut supposer que la loi de génération qui, pour* $F(m)$ varie sans cesse, *persiste dans la détermination particulière qu'elle affecte à l'origine même des accroissements.*

La différentielle $d\alpha$ est alors devenue une vraie différence $\Delta\alpha$, et elle se trouve avoir pour expression la limite vers laquelle converge le second membre de l'équation générale,

$$\Delta\alpha = \Delta m\,[F'(m) + \mu]$$

lorsque Δm décroît indéfiniment.

(*) Voir notre *Dissertation sur les vrais principes des Calculs transcendants.* — Liége. — H. Dessain. — Octobre 1860.

En un mot, si l'on suppose que, pour la valeur de m, la loi de génération, au lieu de varier constamment, persiste dans sa valeur actuelle, l'on obtient la différentielle.

L'équation (C) *est l'équation différentielle de la courbe.*

La traduction en langage ordinaire de la condition exprimée analytiquement par l'équation différentielle se fait toujours immédiatement : dans l'étude des phénomènes soumis à la variation continue de certaines quantités, cette équation exprime ce qui se passe si l'on suppose que les grandeurs qui, jusqu'à un moment donné, ont été variables, deviennent subitement permanentes; et c'est là une hypothèse très-simple et qu'il est toujours permis de faire.

145. *De la tangente.* — Voyons comment l'équation différentielle caractérise la nature intime de la courbe.

D'après ce que nous venons de rappeler et de dire, dans le numéro précédent, $F'(m)$ est constant pendant tout l'intervalle Δm ; on est donc amené à dire que *l'équation différentielle* (C) *caractérise, par les éléments explicites qui la composent, la* direction *d'une certaine droite passant le point défini par* α *et* m.

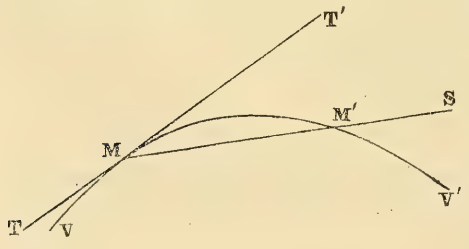
D'ailleurs comme le rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta m}$ est *transitoirement* le même à l'origine m pour la fonction continue, il est évident que le déplacement initial du point générateur s'effectue, à partir du point considéré, d'après une droite dont la direction est fournie en ce point par le $\frac{d\alpha}{\Delta m}$ de l'équation différentielle.

C'est donc selon cette droite, que l'on a nommée *tangente* ou *touchante*, que commence le déplacement du point générateur, et *c'est* aussi *suivant elle que la continuité s'établit et se manifeste.*

On voit que l'on est ainsi forcément conduit à considérer ce qui se passe initialement en chaque point de la courbe, sur la tangente : pour consacrer cette acception nouvelle de l'étude d'une courbe, changeons Δm en dm, et prenons pour équation différentielle,

$$d\alpha = dm \,.\, F'(m)$$

146. Soient actuellement une courbe quelconque VV′ dont, pour deux points M et M′, on connaît l'angle que fait la sécante MM′S avec une droite fixe, arbitraire du reste, située dans le plan de la courbe.



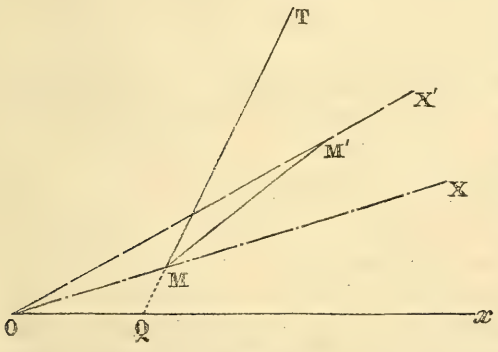
Pour saisir le fait de la continuité, il suffit d'imaginer que la corde MM′ décroît d'une manière CONTINUE et de considérer ensuite le *cas*-LIMITE pour lequel les points M et M′ viennent ainsi à se confondre : ce décroissement se réalise évidemment en faisant tourner la droite MS autour du point M, et l'on obtient dès lors en M une droite, dont la position spéciale toute particulière et caractéristique, n'est déterminée que par les conditions du mouvement acquis par *le seul et unique point* M ; la loi de génération *nécessairement constante*, c'est-à-dire identique en chaque point de cette droite, est donc celle de la courbe elle-même, dans l'hypothèse où la loi générative curviligne deviendrait permanente, à partir du point M.

Il est donc permis de dire :

La tangente est la limite vers laquelle tend une sécante dont l'un des points d'intersection, supposé mobile, se rapproche indéfiniment de l'autre, supposé fixe, jusqu'à ce que ces points se confondent.

Cette définition fondamentale, déduite rationnellement et simplement de la continuité qui se manifeste tangentiellement dans le mouvement curviligne, permet d'établir avec promptitude la théorie élémentaire des courbes.

147. *Signification géométrique de* $\frac{d\alpha}{dm}$. — La dérivée $\frac{d\alpha}{dm}$ a une signification concrète remarquable et simple qui, croyons-nous, n'avait encore été ni reconnue ni établie.



Soient M et M′ deux points d'une courbe, dont l'origine polaire est O et OX l'axe de translation ; le triangle OMM′ fournit aisément

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{\sin OMM'}{\sin OM'M}$$

Désignant par m le rayon recteur OM, par Δm la *différence* de OM à OM′ et par $\Delta\alpha$ la différence des angles M′Ox et MOx, cette égalité prend la forme

$$\frac{m+\Delta m}{m} = \frac{\sin OMM'}{\sin OM'M}$$

d'où

$$\frac{\sin \mathrm{OMM'} - \sin \mathrm{OM'M}}{\Delta m} = \frac{\sin \mathrm{OM'M}}{m}$$

Une transformation factorielle trigonométrique très-connue donne ensuite

$$\frac{2 \sin \frac{\mathrm{OMM'} - \mathrm{OM'M}}{2} \cos \frac{\mathrm{OMM'} + \mathrm{OM'M}}{2}}{\Delta m} = \frac{\sin \mathrm{OM'M}}{m} \qquad (1)$$

Mais il est clair que

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{OM'M'} &= 2^d - \mathrm{M'MX} \\ -\mathrm{OM'M} &= \Delta\alpha - \mathrm{M'MX} \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \quad \frac{\mathrm{OMM'} - \mathrm{OM'M}}{2} = 1^d - \left[\mathrm{M'MX} - \frac{\Delta\alpha}{2}\right]$$

$$\mathrm{OMM'} + \mathrm{OM'M} = 2^d - \Delta\alpha\,, \text{ d'où } \quad \frac{\mathrm{OMM'} + \mathrm{OM'M}}{2} = 1^d - \frac{\Delta\alpha}{2}$$

d'où encore

$$\sin \frac{\mathrm{OMM'} - \mathrm{OM'M}}{2} = \cos\left(\mathrm{M'MX} - \frac{\Delta\alpha}{2}\right)$$

$$\cos \frac{\mathrm{OMM'} + \mathrm{OM'M}}{2} = \sin \frac{\Delta\alpha}{2}$$

A l'aide de ces relations on obtiendra, par substitution dans (1),

$$\frac{2 \sin \frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta m} = \frac{1}{m} \frac{\sin (\mathrm{M'MX} - \Delta\alpha)}{\cos (\mathrm{M'MX} - \frac{\Delta\alpha}{2})}$$

et le passage à la limite fournit immédiatement, en représentant par MT la position vers laquelle tend la sécante MM', à mesure que α converge vers zéro,

$$\frac{d\alpha}{dm} = \frac{1}{m} \cdot \operatorname{tang} \mathrm{TMX} \qquad (2)$$

Disons donc, sous forme de théorème,

La tangente trigonométrique de l'angle fait, avec le rayon vecteur d'un point, par la touchante à la courbe en ce point, a pour expression le produit du rayon vecteur par la dérivée polaire correspondante.

Il est clair que la valeur de cet angle change avec le point considéré, suivant une loi déterminée qui est la conséquence immédiate de la forme de la courbe.

148. Équation de la tangente en un point donné d'une courbe. — Soient $(a\ ,\ b\sqrt{-1})$ le point de contact, α l'angle fait par le rayon vecteur de ce point avec l'axe de translation ; cet angle est fourni par l'équation polaire

$$\alpha_{a,b} = \mathrm{F}(m_{a,b})$$

La tangente fait avec le rayon vecteur du point de contact un angle θ, déterminé par la relation

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{d\,\alpha_{a,b}}{dm_{a,b}}\ m_{a,b}$$

Dès lors l'équation de la tangente sera celle d'une droite (n° 135) qui, en passant par le point $(a\ ,\ b\sqrt{-1})$, est inclinée sur une autre de l'angle donné θ ; cette équation est donc

$$i = a - b\,\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)} + m\,[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\,\sin(\alpha+\theta)\,]$$

149. Équation de la tangente menée par un point extérieur. — Soient $(p\ ,\ q\sqrt{-1})$ le point donné et $(x\ ,\ y\sqrt{-1})$ le point de contact qu'il s'agit de déterminer. L'équation polaire donne

$$\alpha_{x,y} = \mathrm{F}(m_{x,y}) \qquad (1)$$

En représentant toujours par θ l'angle de la tangente avec le rayon vecteur du point de contact, et par t l'angle que cette tangente fait avec l'axe de translation, on a

$$t = \theta + \alpha$$

Mais il est évident que la tangente est ici une droite qui passe (n° 137) par deux points donnés, et qu'ainsi

$$\operatorname{tang} t = \frac{q-y}{p-x}$$

De plus (n° 147), le coefficient directeur tangentiel donne,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}}\ m_{x,y}$$

et d'ailleurs comme

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x}$$

on aura, après substitution dans $t = \theta + \alpha$,

$$\frac{q-y}{p-x} = \frac{m_{x,y}\,\dfrac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}} + \dfrac{y}{x}}{1 - \dfrac{y}{x}\,m_{x,y}\,\dfrac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}}} \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2), ne renfermant que les inconnues x et y, déterminent, on le voit, le point de contact; la tangente, passant dès lors par deux points connus, aura (n° 137) pour équation

$$t = \frac{qx-py}{q-y} + m\left[\cos.\text{arc tang} = \frac{q-y}{p-x} + \sqrt{-1}\,\sin.\text{arc tang} = \frac{q-y}{p-x}\right]$$

150. ÉQUATION D'UNE TANGENTE PARALLÈLE A UNE DROITE DONNÉE. — En donnant à x, y, t, θ, α les mêmes significations que dans la question précédente, on aura encore pour déterminer les quantités x et y, les deux équations simultanées,

$$\alpha_{x,y} = \mathrm{F}(m_{x,y}) \tag{3}$$

$$m_{x,y}\frac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}} = \frac{\text{tang } t - \dfrac{x}{y}}{1 + \dfrac{y}{x}\text{tang } t} \tag{4}$$

La tangente passe ainsi par le point $(x\,,\ y\sqrt{-1})$ en faisant avec l'axe de translation l'angle donné t; son équation est donc (n° 135) :

$$i = x - y\frac{\cos t}{\sin t} + m\,[\cos t + \sqrt{-1}\,\sin t]$$

151. DE LA NORMALE. — On appelle *normale*, la perpendiculaire menée à la tangente par le point de contact. Cherchons d'abord l'équation d'*une normale menée par un point d'une courbe;* soient a et $b\sqrt{-1}$ les équations de ce point, α l'inclinaison du rayon vecteur correspondant sur l'axe, θ l'angle fait par la tangente avec le rayon vecteur; l'équation de la normale sera celle d'une droite passant par un point donné, et perpendiculaire à la tangente, dont l'équation a été trouvée (n° 148); on aura donc, (n° 136, 1°), pour équation de la normale,

$$i = a + b\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} + m\sqrt{-1}\,[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\,\sin(\alpha+\theta)]$$

152. *Normale menée à une courbe par un point quelconque du plan de cette courbe.* — Soient encore $(p\,,\ q\sqrt{-1})$ les équations de ce point, $(x\,,\ y\sqrt{-1})$ les équations du point de contact de la tangente conjuguée à cette normale; soient α l'angle fait avec l'axe par le rayon vecteur du contact, et θ celui de la tangente avec le même rayon vecteur.

Les équations de la tangente en $(x, y\sqrt{-1})$ et de la normale en $(p, q\sqrt{-1})$, seront respectivement (n° 148 et 136, 2°),

$$i = x - y\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)} + m\,[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\theta)] \quad (1)$$

$$i = p + q\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} + m\,[-\sin(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\cos(\alpha+\theta)] \quad (2)$$

Remarquons que, pour le point $(x, y\sqrt{-1})$, l'équation modulaire de la courbe est

$$i = m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha] \quad (3)$$

Les équations (2) et (3), existant simultanément pour le même point et par conséquent pour la même valeur de α, on doit avoir, par identification des seconds membres,

$$p + q\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} = m\,[\sin(\alpha+\theta) + \cos\alpha] \quad (4)$$

$$\cos(\alpha+\theta) = \sin\alpha \quad (5)$$

Ces deux dernières équations permettent de déterminer, avec facilité et promptitude, les valeurs de α et β ; et dès lors l'équation (2) ne renferme plus que l'arbitraire m et caractérise la normale demandée.

Remarque. — Si l'on voulait déterminer les coordonnées du point de contact, il faudrait résoudre les équations suivantes, par rapport à x et à y,

$$\alpha_{x,y} = \mathrm{F}(m_{x,y}) \quad (6)$$

$$\mathrm{tang}\,\theta = m_{x,y} \cdot \frac{d\,\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}} \quad (7)$$

De plus il est clair que le cas où le point est situé sur la courbe n'est qu'un cas particulier de celui qui vient d'être traité.

153. *Normale menée à une courbe, parallèlement à une droite donnée.* — L'équation de la droite donnée étant

$$i = m\,[\cos\mathrm{D} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{D}]$$

l'équation de la normale à la courbe proposée, *en un point* $(x, y\sqrt{-1})$ *qu'il s'agit de déterminer*, est nécessairement celle d'une droite menée par ce point parallèlement à la droite donnée, c'est-à-dire (n° 134) :

$$i = x - y\frac{\cos\mathrm{D}}{\sin\mathrm{D}} + m\,[\cos\mathrm{D} + \sqrt{-1}\sin\mathrm{D}] \quad (1)$$

Le point $(x\ ,\ y\sqrt{-1})$ ayant α pour argument de son rayon vecteur, l'équation polaire sera pour ce point,

$$\alpha_{x,y} = \mathrm{F}(m_{x,y}) \tag{2}$$

Le point $(x\ ,\ y\sqrt{-1})$ étant le point de contact de la tangente conjuguée à la normale demandée, ses coordonnées satisfont à l'équation de condition,

$$\text{tang}\ \theta = m_{x,y}\frac{d\alpha_{x,y}}{dm_{x,y}} \tag{3}$$

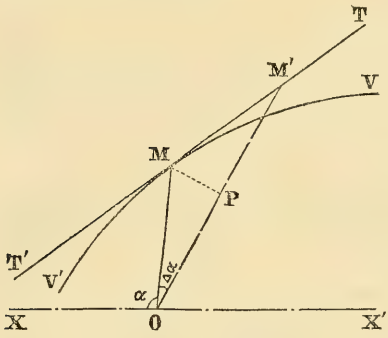
De plus on a évidemment,

$$\mathrm{D} = 1^{\delta} + \alpha + \theta \tag{4}$$

Les équations (2), (3) et (4) déterminent les quantités α, θ et $m_{x,y}$; le point $(x\ ,\ y\sqrt{-1})$, par lequel il faut mener la normale, parallèlement à la droite donnée, est donc déterminé.

154. *Dérivée d'un arc de courbe.* — Soit la courbe plane dont l'équation polaire est

$$\alpha = \mathrm{F}(m)$$



En vertu de la loi de génération, à laquelle la courbe est soumise, *la direction tangentielle varie continûment;* toutefois, et en un point *quelconque* M dont les coordonnées sont α et m, si l'on regarde cette loi comme *permanente*, c'est-à-dire comme persistant dans la détermination qu'elle affecte au point M, la génération linéaire tangentielle s'accomplit de la même manière que pour le parcours curviligne ; en un mot, *c'est suivant la tangente que s'opère à* CHAQUE INSTANT *le déplacement du point décrivant*, et le changement de Δ en d distingue ce qui se passe sur la tangente de ce qui se passe sur la courbe.

Sur la tangente MT, et par rapport à l'angle MOM′, ou au $\Delta\alpha$ dont l'angle $\mathrm{MOX} = \alpha$ varie, représentons par Δs le chemin correspondant décrit par le point M ; si P est la projection de M sur OM′, il vient aisément

$$\overline{\mathrm{MM'}}^2 = \overline{\mathrm{MP}}^2 + \overline{\mathrm{M'P}}^2$$

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2 . \text{tang}^2\ \Delta\alpha$$

$$\overline{\mathrm{M'P}}^2 = \overline{\mathrm{OM'} - \mathrm{OP}}^2$$

En additionnant, membre à membre, et après réductions on a

$$\overline{MM'}^2 = OP^2 \cdot \operatorname{tang}^2 \Delta\alpha + \overline{OM'-OP}^2$$

Mais évidemment,

$$OP = OM \cdot \cos MOP = m \cdot \cos \Delta\alpha$$
$$OM' = m + \Delta m$$

L'expression de $\overline{\Delta s}^2$, ou de $\overline{MM'}^2$ devient donc,

$$\overline{\Delta s}^2 = m^2 \sin^2 \Delta\alpha + [m(1 - \cos \Delta\alpha) + \Delta m]^2$$

Pour considérer, *à la limite*, ce qui se passe soit sur la courbe soit sur la tangente, *à l'instant précis où le point générateur est en* M, il suffit de remplacer la caractéristique Δ par d, en ayant soin de remarquer qu'alors l'arc $d\alpha$ se confond avec son sinus, tandis que le cosinus de cet arc est égal à 1 : on obtient définitivement ainsi

$$\overline{ds}^2 = m^2 \overline{d\alpha}^2 + \overline{dm}^2, \quad ou \quad \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{dm}{d\alpha}\right)^2$$

155. *Signification géométrique de* $\frac{ds}{d\alpha}$. — En désignant par θ l'angle que la tangente fait avec le rayon vecteur, on a établi (n° 147) la relation,

$$\frac{d\alpha}{dm} = \frac{\operatorname{tang} \theta}{m} \quad ou \quad \frac{dm}{d\alpha} = \frac{m}{\operatorname{tang} \theta}$$

Si à $\frac{dm}{d\alpha}$ on substitue cette valeur dans l'expression de la dérivée de l'arc d'une courbe, il vient

$$\frac{ds}{d\alpha} = \pm \frac{m}{\sin \theta}$$

Énonçons donc, sous forme de théorème :

En un point donné la dérivée angulaire de l'arc d'une courbe, est, au signe près, égale au produit du rayon vecteur par l'inverse du sinus de l'angle fait avec ce rayon par la tangente correspondante.

Du reste cette propriété nouvelle remarquable, et qui permet de conduire assez rapidement les calculs de rectification ou de quadrature des courbes planes, résulte immédiatement de l'égalité fractionnaire

$$\frac{OM}{MM'} = \frac{\sin OM'M}{\sin MOM'}$$

dans laquelle on doit faire, *à la limite*,

$$MM' = ds \quad , \quad \widehat{OMM'} = \theta$$

$$\lim \sin MOM' = d\alpha$$

$$\lim OM'M = \lim(2^d - \theta - d\alpha) = 2^d - \theta \quad , \quad et \quad \lim \sin OMM' = \sin \theta$$

156. La combinaison des relations

$$\operatorname{tang} \theta = m \frac{d\alpha}{dm}$$

$$\pm \frac{m}{\sin \theta} = \frac{ds}{d\alpha}$$

donne immédiatement

$$\frac{d\,s}{dm} = \pm \cos \theta$$

157. *Du cercle osculateur.* — La *courbure* résulte de la variation incessante de la direction de la tangente, et nous avons déjà dit que c'est suivant la tangente que la continuité se manifeste.

En désignant par θ l'angle qu'une tangente à la courbe $\alpha = f(m)$ fait avec le rayon vecteur, on a vu (n° 147) que

$$\operatorname{tang} \theta = mf'(m) \qquad ou \qquad \theta = \text{arc tang } mf'(m)$$

La différentiation donne à l'instant

$$d\theta = \frac{f'm + mf''m}{1 + m^2 f'^2 m} \Delta m \tag{1}$$

Mais la différentielle arcuelle nous apprend (n° 154) que

$$ds = \Delta m \sqrt{1 + m^2 f'^2 m} \tag{2}$$

Par division, les relations (1) et (2) fournissent,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{f'm + mf''m}{[1 + m^2 f'^2 m]^{\frac{3}{2}}}$$

Telle est l'équation qui lie les variations dues à la continuité et à la courbure.

Actuellement supposons qu'à l'origine m des accroissements, le rapport $\frac{d\theta}{ds}$ persiste dans la détermination acquise, c'est-à-dire assujétissons ce rapport à conserver cette valeur qui devient ainsi permanente, alors $d\theta$ et ds deviennent respectivement $\Delta\theta$ et Δs, et l'on a :

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{f'm + mf''m}{[1 + m^2 f'^2 m]^{\frac{3}{2}}}$$

L'uniformité se manifeste dès cet instant dans la courbe, puisque le rapport $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$, qui la détermine, est *constant;* et remarquons bien que l'hypothèse de *permanence*, dans laquelle nous nous plaçons ici, n'apporte aucune modification à la courbure au point considéré comme origine, puisque, en vertu de cette hypothèse, cette courbure est maintenue dans la détermination qui lui est propre ou qui la caractérise en ce point.

Posons

$$\varrho = \frac{[1+m^2f'^2m]^{\frac{3}{2}}}{fm+mf''m}$$

Et l'on aura

$$\frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \varrho \qquad ou \qquad \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{\varrho}$$

et puisque $\Delta\theta$ désigne l'accroissement angulaire, qui, comme tel, est mesuré par un arc de cercle dont le rayon est 1, cette dernière égalité signifie que la courbe

$$\Delta s = \varrho.\Delta\theta$$

est une circonférence dont ϱ est le rayon. Cette équation exprime, entr'autres choses que, pour un même angle θ fait par la tangente en un point *quelconque* de ce nouveau lieu géométrique, l'*arc décrit est le même.*

La circonférence particulière, ainsi définie, est appelée Circonférence osculatrice.

Établie sous ce point de vue, cette circonférence a une signification bien nette, et forme un des caractères principaux de la courbe primitive : elle rappelle sans cesse que le changement de direction, *saisi à l'origine même de la variation,* est manifesté par elle, en un quelconque de ses points, de la même manière qu'au point particulier de la courbe proposée; en un mot, elle a en tous ses points même courbure, et cette courbure est celle de la courbe donnée au point considéré.

Disons en passant que le rapport $\frac{1}{\varrho}$, ou l'inverse du rayon d'un cercle, sert de mesure à la courbure de ce cercle.

158. *Rayon et centre de courbure.* — La quantité ϱ, déterminée ci-dessus par l'expression,

$$\varrho = \frac{[1+m^2f'^2m]^{\frac{3}{2}}}{f'm+mf''m}$$

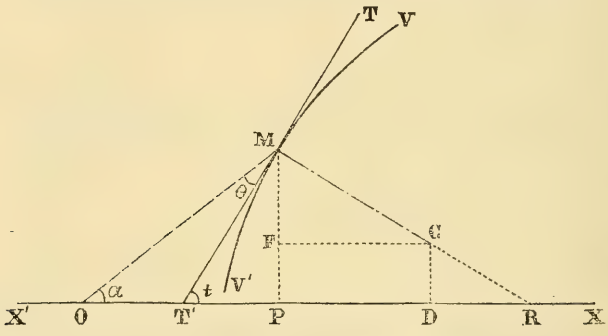
est appelé *rayon osculateur* ou *rayon de courbure*, et le centre de la circonférence osculatrice a reçu le nom de *centre de courbure*.

Afin d'avoir les éléments nécessaires à la détermination de la position du centre de courbure, il est indispensable de prendre pour point de départ la nature intime de la courbure.

Nous avons dit déjà plus d'une fois que la tangente, en un point d'une courbe, est le lieu suivant lequel la continuité s'établit et se manifeste.

La *courbure* résultant de la variation *incessante* de la direction tangentielle, il s'en suit que *si l'on veut qu'en un point donné deux courbes aient* MÊME COURBURE, il faut aussi qu'elles aient même tangente et par suite même normale : la courbe proposée et sa circonférence osculatrice étant précisément dans ce cas d'égale courbure, il est dès lors évident que le centre de courbure est situé sur la normale à la courbe au point considéré.

L'origine étant en O, soit un point M $(a, b\sqrt{-1})$ de la courbe VV' dont le centre de courbure est C et dont le rayon de courbure est ϱ ; soient $(x, y\sqrt{-1})$ les coordonnées du point C, α et t les angles faits par le rayon vecteur OM et la tangente MT au point M avec l'axe de translation ; enfin, du point C menons la parallèle CF à XX'.



L'équation de la normale MR, au point M, est (n° 151)

$$i = a + b\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} + m\sqrt{-1}\,[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\theta)]$$

équation qui montre que

$$\mathrm{OR} = a + b\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} \quad \textit{et} \quad \mathrm{PR} = b\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}$$

On trouvera aussi avec la plus grande facilité que

$$\widehat{\mathrm{MCF}} = \alpha+\theta-1^d \ , \quad \widehat{\mathrm{CMF}} = 2^d-(\alpha+\theta)$$

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CM}.\cos\mathrm{MCF} = \varrho\sin(\alpha+\theta)$$

$$\mathrm{FM} = \mathrm{CM}.\cos\mathrm{CMF} = \varrho\cos(\alpha+\theta)$$

d'où l'on déduit immédiatement,

$$x = a + \varrho \sin(\alpha+\theta)$$
$$y = b - \varrho \cos(\alpha+\theta)$$

159. *De la développée.* — On donne le nom de *développée d'une courbe*, au lieu géométrique des centres de courbure des divers points de cette courbe.

Ce lieu géométrique sera défini analytiquement par le résultat de l'élimination des quantités $a, b, m, \alpha, \varrho, \theta$ entre les sept équations connues et établies précédemment,

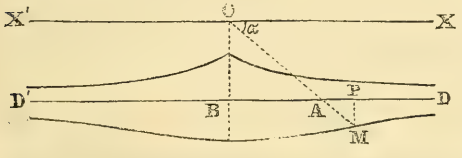
$$\alpha = f(m)$$
$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{b}{a}$$
$$m^2 = a^2 + b^2$$
$$\operatorname{tang}\theta = m.f'm$$
$$\varrho = \frac{[1+m^2f'^2m]^{\frac{3}{2}}}{f'm+mf''m}$$
$$x = a + \varrho \sin(\alpha+\theta)$$
$$y = b - \varrho \cos(\alpha+\theta)$$

160. Il resterait à trouver l'équation polaire de la circonférence osculatrice, mais nous renvoyons ce sujet au chapitre suivant, dans lequel il trouve, relativement aux coniques, sa place très naturelle.

—

APPLICATIONS.

161. De la Conchoïde. — Cette courbe découverte par *Nicomède* à propos du *problème de la duplication du cube*, est le lieu géométrique d'un point dont la distance à une droite donnée est constante, alors que cette distance est comptée sur les diverses droites menées par un même point aussi donné.



Soit la directrice DD′ ainsi donnée et le pôle O, choisissons O pour origine de translation, et XX′ parallèle à DD′ pour axe de translation, et désignons par c la distance AM d'un point M de la courbe à la droite DD′, évaluée sur le rayon vecteur OM $= m$.

Les triangles semblables ABO et AMP donnent immédiatement,

$$\frac{AO}{AM} = \frac{BO}{MP} \qquad d'où \qquad AO \,.\, MP = BO \,.\, AM \qquad (1)$$

Mais évidemment

$$AM \,.\, \sin MAP = MP \qquad (2)$$

Le produit membre à membre de ces deux relations donne,

$$AO \,.\, \sin MAP = BO$$

ou en posant $OB = d$,

$$(m—c) \sin \alpha = d \qquad d'où \qquad \operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{d^2}{(m—c)^2 — d^2} \qquad (3)$$

Telle est l'équation polaire de la conchoïde.

Valeur de f'm. — La dérivation de (3) fournit

$$\frac{d\alpha}{dm} (m—c) \cos \alpha + \sin \alpha = 0$$

d'où

$$f'm = \frac{d\alpha}{dm} = — \frac{\operatorname{tang} \alpha}{m—c} \qquad (4)$$

Valeur de f''m. — Par dérivation de (4) on trouve aisément

$$f''m = — \frac{1}{(m—c)^2 \operatorname{tang} \alpha} \qquad (5)$$

Dérivée arcuelle angulaire. — D'après ce qui a été établi (n° 154), on aura

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{m—c}{\operatorname{tang} \alpha}\right)^2$$

d'où

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \alpha} — c \frac{2m—c}{\operatorname{tang}^2 \alpha} \qquad (6)$$

Angle θ de la tangente avec le rayon vecteur du point de contact. — La propriété (n° 147), apprend que

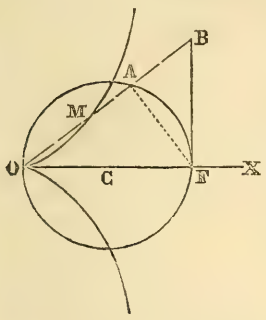
$$\operatorname{tang} \theta = — \frac{m}{m—c} \operatorname{tang} \alpha \qquad (7)$$

Rayon de courbure. — La valeur générale trouvée (n° 157) pour cette grandeur donne,

$$\varrho = — \frac{\operatorname{tang} \alpha}{m—c} \frac{(m—c)^2 + m^2 \operatorname{tang}^2 \alpha}{m + (m—c) \operatorname{tang}^2 \alpha} \qquad (8)$$

162. De la Cissoïde.— Cette courbe est due à *Dioclès*, et sa découverte a été provoquée par le problème de la *recherche des deux moyennes proportionnelles entre deux lignes droites données.*

Soit un point O fixe sur une circonférence donnée de rayon OC = R ; traçons le diamètre du point O, et la tangente BF à l'extrémité de ce diamètre ; ensuite, sur un rayon vecteur OB quelconque passant par l'origine ou le pôle O, prenons la distance OM égale à la partie *extérieure* AB de la sécante ainsi considérée : le lieu géométrique du point M est la courbe appelée *Cissoïde.*



Traçons AF, et la simple loi de projection linéaire, fournit successivement, en désignant par α l'angle variable BOX fait par OB avec l'axe OX de translation, et par m la distance OM, variable aussi,

$$OA = OF \,.\, \cos BOX = 2R \,.\, \cos \alpha$$
$$OB = OA + AB = m + OA$$

d'où par addition, membre à membre,

$$OB = m + 2R \cos \alpha \qquad (1)$$

D'autre part, le triangle BOF donne,

$$OF = OB \,.\, \cos BOX \qquad ou \qquad 2R = OB \,.\, \cos \alpha \qquad (2)$$

Le produit, membre à membre, des relations (1) et (2) est

$$2R = (m + 2R \cos \alpha) \cos \alpha$$

ou, après simplifications,

$$2R \sin^2 \alpha = m \cos \alpha \qquad (3)$$

Telle est l'équation polaire de la Cissoïde.

Valeur de f'm. — La dérivation de (3) fournit

$$f'm = \frac{d\alpha}{dm} = \frac{1}{(m+4R\cos\alpha)\tan\alpha} \qquad (4)$$

Valeur de f''m. — La dérivation de (4) donne

$$f'' = \frac{(m+4R\cos\alpha)^2 \sin\alpha - m \,.\, \cos^3\alpha}{(m+4R\cos\alpha)^3 \sin\alpha \cos^2\alpha} \qquad (5)$$

Dérivée arcuelle angulaire. — La formule $\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{dm}{d\alpha}\right)^2$, conduit à

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = m^2 + (m + 4R\cos\alpha)^2 \tan^2\alpha \qquad (6)$$

Angle θ de la tangente avec le rayon vecteur du point de contact. — D'après la formule trouvée (n° 147), on obtient

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{m}{(m+4R\cos\alpha)\operatorname{tang}\alpha} \qquad (7)$$

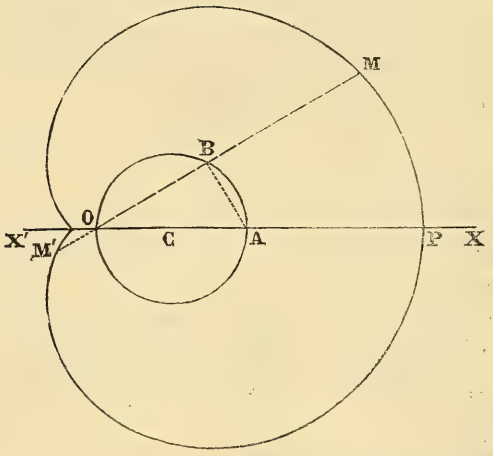
Rayon de courbure. — En employant la formule (n° 157), on aura

$$\rho = \frac{(m+4R\cos\alpha)\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{(m+4R\cos\alpha)\sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha}{(m+4R\cos\alpha)^2(\cos^3\alpha - m\sin\alpha) - m^2\cos^3\alpha} \qquad (8)$$

165. *Limaçon de* PASCAL. — Donnons d'abord la description de cette courbe.

Par un point O d'une circonférence menons la ligne diamétrale OCX que nous choisissons pour axe de translation, et sur laquelle nous prenons un point P, tel que

$$OP > OA$$



Par le pôle O menons diverses sécantes sur lesquelles, à partir de leurs seconds points de rencontre avec la circonférence, nous portons des longueurs égales à

$$AP = p$$

Le lieu géométrique des points M ainsi obtenus est le *limaçon de Pascal*, dont nous allons chercher l'équation.

Tirant la droite AB, le triangle rectangle ABO donne,

$$OB = OA \cdot \cos MOP$$

De plus

$$OM = OB + BM = OB + AP$$

Par suite, si l'on pose $\widehat{MOP} = \alpha$, et $CO = R$, $MO = m$, il viendra

$$OB = 2R\cos\alpha \qquad (1)$$

$$m = OB + p \qquad (2)$$

D'où, par addition membre à membre,

$$m = p + 2\mathrm{R}\cos\alpha \qquad (3)$$

Telle est l'équation polaire très-simple du *limaçon de Pascal.*

Valeur de f'm.

$$f'm = \frac{d\alpha}{dm} = -\frac{1}{2\mathrm{R}\sin\alpha} \qquad (4)$$

Valeur de f''m.

$$f''m = -\frac{\cos\alpha}{4\mathrm{R}^2\sin^3\alpha} = \frac{p-m}{8\mathrm{R}^3\sin^3\alpha} \qquad (5)$$

Dérivée arcuelle angulaire.

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = m^2 + 4\mathrm{R}^2\sin^2\alpha \qquad (6)$$

ou encore, après combinaison avec (3),

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = 4\mathrm{R}^2 - p^2 + 2mp \qquad (7)$$

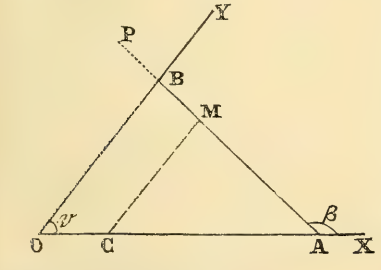
Angle θ de la tangente avec le rayon vecteur du point de contact.

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{m}{2\mathrm{R}\sin\alpha} \qquad (8)$$

Rayon de courbure. — On obtient

$$\rho = -\frac{m^2+4\mathrm{R}^2\sin^3\alpha}{m\cos\alpha+2\mathrm{R}\sin^2\alpha} = -\frac{m^2+[4\mathrm{R}^2-\overline{m-p}^2]\sin\alpha}{2\mathrm{R}+p\cos\alpha} \qquad (9)$$

164. Problème. — *Deux droites et un point étant donnés, par ce point l'on mène des sécantes terminées à ces droites; on demande le lieu géométrique des points qui divisent ces sécantes dans un rapport donné* r, *à partir de l'une des droites données.*



Soient les deux droites OX et OY et le point P donné; choisissons O pour pôle, et OX pour axe de translation et représentons par a, $b\sqrt{-1}$ les équations du point P, et par v l'angle YOX.

Soient aussi M le point qui divise la partie AB de la sécante quelconque AP menée par P, en deux parties telles que

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BM}} = r$$

L'équation de la droite AP sera, en désignant par β l'angle PAX,

$$i = a - b\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + m_1[\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta] \qquad (1)$$

Par conséquent

$$AO = a - b\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

La parallèle à OY, menée par le point M, a pour équation, en posant $OC = d$,

$$i = d + m_2[\cos v + \sqrt{-1}\sin v] \qquad (2)$$

De plus on a évidemment

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AO}{CO}$$

d'où

$$rd = a - b\frac{\cos\beta}{\sin\beta}, \qquad et \qquad d = \frac{a}{r} - \frac{b}{r}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} \qquad (3)$$

Déterminons actuellement les éléments du point M de rencontre des droites CM et AM, et il viendra, après avoir remplacé dans (2) la quantité d par sa valeur (3),

$$a - b\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + m_1[\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta]$$
$$= \frac{a}{r} - \frac{b}{r}\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + m_2[\cos v + \sqrt{-1}\sin v]$$

d'où, en isolant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\frac{a}{r}(r-1) - \frac{b}{r}(r-1)\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + m_1\cos\beta + m_2\cos v = 0 \qquad (4)$$

$$m_1\sin\beta = m_2\sin v \qquad (5)$$

Ces deux dernières équations renferment les trois inconnues m_1, m_2, et β, et peuvent fournir les expressions de m_1 et m_2, qui ne sont qu'au premier degré dans ces équations, en fonction de la troisième β de ces quantités ; on aura ainsi en particulier,

$$m_2 = \varphi(\beta) \qquad (6)$$

et ce sera là l'équation cherchée du lieu géométrique proposé.

Ajoutons encore que si l'on voulait ensuite se servir de l'équation génératrice (2), il faudrait mettre (6) sous la forme,

$$\beta = \varphi(m_2)$$

puis substituer dans (3), et transporter la valeur de d, ainsi obtenue, dans l'équation (2).

La courbe (6) est une parabole sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir dans le chapitre suivant.

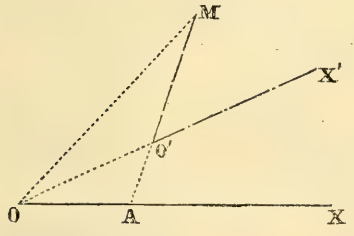
V

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES SECTIONS CONIQUES.

Transformation des coordonnées polaires. — Condition pour qu'un point soit situé sur une courbe. — Intersection d'une droite et d'une courbe. — Coordonnées polaires du milieu de la corde d'intersection. — Lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à une même direction. — Lignes diamétrales, diamètres rectilignes. — Ellipse ; ses sommets, ses axes, ses diamètres conjugués ; sa symétrie droite et oblique. — Équation de la courbe. — Coefficient de direction tangentielle. — Propriété caractéristique tangentielle établie par voie analytique et par voie dynamique. — Rayon et centre de courbure. — Circonférence ; diamètre, tangente, normale. — Hyperbole ; sommets, axes, diamètres conjugués ; sa symétrie. — Équation de la courbe. — Direction tangentielle. — Caractère concret de la tangente. — Rayon et centre de courbe. — Asymptotes. — Parabole, foyer, diamètres conjugués ; tangente ; rayon et centre de courbure.

165. *Transformation des coordonnées polaires.* — Il est souvent nécessaire de changer d'origine et d'axe de translation, et des formules générales deviennent ainsi indispensables.

Soit donc le point M dont les coordonnées m et α sont rapportées à l'axe OX et à l'origine O, et qui doit être considéré par rapport à l'origine O′ et à l'axe O′X′. Nous supposerons d'abord que l'axe O′X′ passe par le point O : en représentant par d l'angle XOX′, par m' et α' les coordonnées polaires nouvelles, il est clair que le triangle OO′M donnera



$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\sin OO'M}{\sin O'OM}$$

d'où l'on déduit

$$m \sin (\alpha - d) = m' \sin \alpha' \qquad (1)$$

Le triangle AOO′ donne aussi, en posant $OO' = l$,

$$\frac{AO'}{OO'} = \frac{\sin XOX'}{\sin OAA'}$$

relation qui fournit, puisque $\widehat{OAA'} = 2^d - (d + \alpha')$,

$$AO' = \frac{l \sin d}{\sin (d+\alpha')}$$

Du triangle AMO on tire

$$\frac{AM}{MO} = \frac{\sin MOX}{\sin MAO}$$

d'où

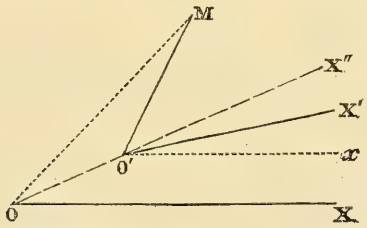
$$AM = \frac{m \sin \alpha}{\sin (d+\alpha')}$$

La soustraction de AO′ hors de AM, conduit à

$$m' \sin (d+\alpha') = m \sin \alpha - l \sin d \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) serviront à déterminer α' et m' en fonction de α et de m.

En second lieu supposons que le nouvel axe O′X′ de translation ne passe pas par la première origine O ; les quantités ρ et k étant les coordonnées du point O′ par rapport à OX, soient $OO' = l$, et $\widehat{O'OX} = \rho$. Ayons recours à un système intermédiaire d'origine O′ et d'axe OO′X″, dans lequel les coordonnées du point M sont désignées par



$$m' = OM \quad , \qquad \widehat{MO'X''} = \alpha''$$

Si par le point O′ on mène O′x parallèle à OX, il viendra, en représentant par d l'angle des axes OX et O′X′,

$$\widehat{X'OX''} = \rho - d$$

D'ailleurs comme l'angle MOX″ donne évidemment,

$$MOX'' = MOX' - X'OX''$$

ou,

$$\alpha'' = \alpha' - \rho + d$$

il viendra, en remplaçant dans (1) et (2), d par ρ et α' par cette valeur de α'',

$$m \sin(\alpha - \rho) = m' \sin(d + \alpha' - \rho) \quad (3)$$

$$m' \sin(d + \alpha') = m \sin\alpha - l \sin\rho \quad (4)$$

166. *Condition pour qu'un point donné soit situé sur une courbe donnée.* — Soit le point $(a, b\sqrt{-1})$ pour lequel, μ étant l'angle du rayon vecteur avec l'axe,

$$\text{tang}\,\mu = \frac{b}{a}, \quad \sin\mu = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\mu = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Il faudra, m et α étant les coordonnées polaires courantes curvilignes, que l'on ait

$$m^2 = a^2 + b^2, \quad \alpha = \mu$$

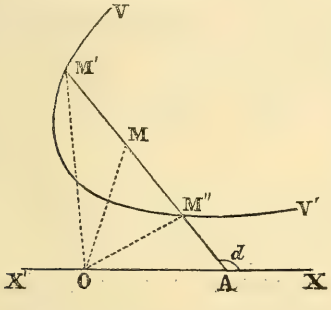
et par suite l'équation polaire

$$\alpha = f(m)$$

devant être satisfaite par les nouvelles valeurs de α et de m, donnera la condition

$$\text{arc}\,[\text{tang} = \frac{b}{a}] = f\sqrt{a^2+b^2}$$

167. *Intersection d'une droite et d'une courbe.* — Sans restreindre la généralité de cette question, supposons que la droite donnée AM, passe par le point A situé sur l'axe de translation, et fasse avec cet axe un angle égal à d : cette droite rencontre la courbe VV′ en des points qu'il s'agit de déterminer.



L'origine étant en O, l'équation de la courbe est

$$i = m_1 [\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha] \quad (1)$$

Si l'on pose AO $= l$, l'équation de la sécante AM sera

$$i = l + m_2 [\cos d + \sqrt{-1}\sin d] \quad (2)$$

L'identification des seconds membres de ces équations donne,

$$l + m_2 \cos d = m_1 \cos\alpha \quad (3)$$

$$m_2 \sin d = m_1 \sin\alpha \quad (4)$$

Et comme le point m_1, α est situé sur la courbe VV′, on a aussi

$$\alpha = f(m_1)$$

Les équations (3), (4) et (5) serviront donc à déterminer les valeurs des trois quantités m_1, m_2, α, en adoptant la marche suivante, la plus simple et la plus méthodique possible.

Si l'on élève au carré les équations (3) et (4), on trouve par addition,

$$m_2^2 + 2l\cos d.m_2 - m_1^2 + l^2 = 0$$

qui devient, après introduction de la valeur de m_1, fournie par (4),

$$m_2^2(\sin^2\alpha - \sin^2 d) + 2l\cos d\sin^2\alpha.m_2 + l^2\sin^2\alpha = 0 \quad (5)$$

équation qui, étant résolue par rapport à m_2, donne aisément

$$m_2 = \frac{l\sin d.\sin(\alpha \mp d)}{\cos^2\alpha - \cos^2 d}$$

d'où

$$m_2' = -\frac{l\sin\alpha}{\sin(d+\alpha)} \quad , \quad m_2'' = \frac{l\sin\alpha}{\sin(d-\alpha)} \qquad (6)$$

Les valeurs correspondantes de m_1 seront dès lors, en vertu de (4),

$$m_1' = \frac{-l\sin d}{\sin(d+\alpha)} \quad , \quad m_1'' = \frac{l\sin d}{\sin(d-\alpha)} \qquad (7)$$

168. *Coordonnées polaires du milieu de la corde d'intersection.* — Désignons par M le milieu de M'M'', et posons

$$MO = p \qquad et \qquad \widehat{MOX} = \Delta$$

Il est clair que

$$AM = \frac{m_2' + m_2''}{2}$$

d'où, en vertu de la composition de l'équation (5) du second degré,

$$AM = -\frac{l\sin^2\alpha\cos d}{\cos^2\alpha - \sin^2 d} = \frac{l\sin^2\alpha\cos d}{\cos^2\alpha - \cos^2 d} \qquad (8)$$

Pour déterminer p et Δ, considérons les équations directives des lignes OP, d'une part, et OAP de l'autre,

$$i = p[\cos\Delta + \sqrt{-1}\sin\Delta] \qquad (9)$$

$$i = l + l\frac{\sin^2\alpha\cos d}{\cos^2\alpha - \cos^2 d}[\cos d + \sqrt{-1}\sin d] \qquad (10)$$

En identifiant les seconds membres, on aura les équations de condition,

$$\frac{p}{l}\cos\Delta = 1 + \frac{\sin^2\alpha\cos^2 d}{\cos^2\alpha - \cos^2 d} \qquad (11)$$

$$\frac{p}{l}\sin\Delta = \frac{\sin^2\alpha\sin d\cos d}{\cos^2\alpha - \cos^2 d} \qquad (12)$$

Par addition des carrés de ces équations, il vient

$$\frac{p^2}{l^2} = 1 + \frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^2 d} + \frac{\sin^4\alpha\cos^2 d}{(\cos^2\alpha - \cos^2 d)^2}$$

d'où, après des réductions faciles à exécuter,

$$p^2 = l^2\left[\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^2 d} + \frac{\sin^2\alpha\cos^2 d}{(\cos^2\alpha - \cos^2 d)^2}\right]\sin^2 d \qquad (13)$$

La division, membre à membre des équations (11) et (12), fournit

$$\operatorname{tang}\Delta = \sin d\cos d\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^2 d + \sin^2\alpha\cos^2 d}$$

ou, toutes réductions faites,

$$\operatorname{tang}\Delta \,.\, \operatorname{tang} d = \operatorname{tang}^2\alpha \qquad (14)$$

Les équations (13) et (14) déterminent p et Δ, si l'on a soin d'y donner à α la valeur fournie par les équations

$$\alpha = f(m_1) \qquad et \qquad m_1 = \mp\frac{l\sin\alpha}{\sin(d \pm \alpha)}$$

169. *Ligne diamétrale.* — Dans toute courbe les milieux des cordes parallèles à la même direction forment une courbe à laquelle on a donné le nom de *courbe diamétrale* ou de *ligne diamétrale de la courbe proposée.*

Il est évident que pour obtenir l'équation de cette nouvelle ligne, il suffit d'éliminer l, m et α entre les équations

$$\alpha = f(m_1)$$

$$m_1 = \mp\frac{l\sin d}{\sin(d \pm \alpha)}$$

$$p^2 = \frac{l^2\sin^2 d}{\cos^2\alpha - \cos^2 d}\left[\cos^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha\cos^2 d}{\cos^2\alpha - \cos^2 d}\right]$$

$$\operatorname{tang}\Delta \,.\, \operatorname{tang} d - \operatorname{tang}^2\alpha = 0$$

On obtient de cette manière la relation,

$$\text{tang}\,\Delta = \varphi(p)$$

qui est l'équation cherchée du lieu des milieux des cordes parallèles à une même direction donnée.

Au point de vue théorique, cette question est évidemment résolue; mais il n'en est pas de même au point de vue pratique : excepté quelques cas simples et peu nombreux, la science ne fournit pas encore les moyens d'obtenir par élimination cette résultante diamétrale, et aussitôt que les courbes sont transcendantes, ou même algébriques, mais d'un degré supérieur au second, la recherche des lignes diamétrales demeure sans importance directe effective.

Cet inconvénient est aussi attaché aux autres systèmes coordonnés que l'on a imaginés, et c'est seulement dans très-peu de cas particuliers que l'on peut employer ces formules générales.

On s'est proposé de trouver si, parmi les lignes diamétrales, il n'y avait pas de *lignes droites*, et la difficulté, presque ou souvent insurmontable de la question générale, a ainsi laissé la plus grande importance à la recherche des *diamètres rectilignes*.

Pour chaque courbe on doit recourir, quant à la détermination de ces diamètres, à des considérations spéciales qui dépendent de la nature et de la forme de la courbe : pour les sections que l'on peut produire dans un cône par un plan sécant, nous aurons soin d'exposer de la manière la plus simple possible, la théorie de ces lignes si remarquables.

—

Ellipse.

170. Cette courbe est engendrée par le mouvement d'un point dont la somme des distances à deux points fixes, appelés *foyers*, est constante; ces distances s'appellent les *rayons vecteurs* du point correspondant.

Représentons par $2a$ la somme ainsi considérée, et par $2c$ la distance des foyers : il est clair que les points de la courbe, situés sur la droite qui unit les foyers, sont éloignés d'une quantité a du milieu de la distance $2c$.

Remarquons en outre que les divers triangles dont les points de la courbe sont un sommet et dont les deux autres sont les foyers, nous permettent d'appliquer cette propriété si connue et si simple,

De tous les triangles de même périmètre et de même base, celui dont la hauteur est la plus grande est le triangle isocèle : cette hauteur sera donc, en la désignant par b, fournie par l'expression

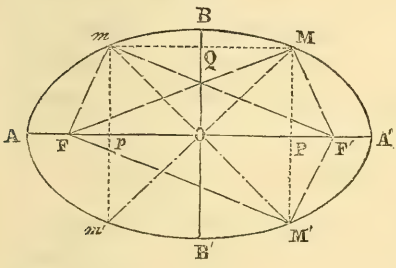
$$b^2 = a^2 - c^2$$

Les quantités a et b sont évidemment les valeurs *maximum* et *minimum* de la distance d'un point de l'ellipse *au milieu de la distance des foyers.*

Les droites qui joignent les deux points appartenant à chacune de ces deux distances s'appellent les *axes* de l'ellipse : le *grand axe* $2a$ passe les foyers, le *petit axe* $2b$ est perpendiculaire sur le premier, qu'il divise en deux parties égales. — Les extrémités de ces axes portent le nom de *sommets* de la courbe.

171. Théorème I. — *L'ellipse est symétrique par rapport à chacun de ses axes.*

Démonstration. — Soient F et F′ les deux foyers et A, A′, B et B′ les quatre sommets.



O étant le milieu de FF′, considérons *en premier lieu* les deux points M et M′, symétriques par rapport à AA′ et pour lesquels on a conséquemment,

$$FM' = FM \quad et \quad F'M' = F'M$$

d'où

$$FM' + F'M' = FM + F'M \qquad (1)$$

Si le point M appartient à la courbe, on a aussi

$$FM + F'M = 2a \qquad (2)$$

La combinaison, par addition, de (1) et (2) donne

$$FM' + F'M' = 2a$$

Le point M′, symétrique de M, est donc sur la courbe.

En second lieu, si le point m est symétrique de M par rapport à BB′, c'est-à-dire si

$$mQ = MQ \quad et \quad Om = OM$$

il s'en suit que

$$Fm = F'M \quad et \quad mF' = MF$$

d'où

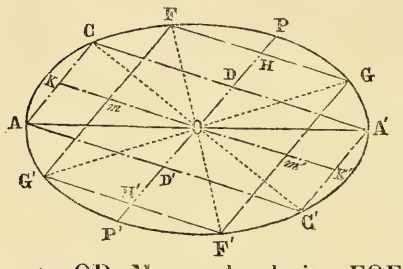
$$Fm + F'm = FM + F'M$$

172. Corollaire. — *Toute corde passant par le milieu de la distance des foyers est divisée par ce point en deux parties égales.*

Pour établir cette loi, il suffit, en considérant par exemple la corde MO*m'*, d'imaginer la corde M'O*m* symétrique de la première par rapport au grand axe AA' ; la symétrie, relative au petit axe BB', rend ensuite cette propriété évidente : le point O a, dès lors, reçu le nom de *centre* de l'ellipse.

173. Théorème II. — *Le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes parallèles à une même direction est une ligne droite passant par le centre.*

Démonstration. — Soit A'C la direction de ces cordes, pour laquelle il s'agit de prouver que la ligne droite OD, menée par le centre O et par le milieu D de A'C, est le lieu géométrique demandé. Soit une autre corde FG parallèle à A'C, dont il faut démontrer que le milieu est le point H où cette corde rencontre OD. Menons les droites FOF', GOG', COC', pour lesquelles on a (n° 172),



$$FO = F'O \ , \quad GO = G'O \ , \quad CO = C'O$$

Après avoir tiré les lignes AC, AC', A'C', FG', F'G et F'G', il est évident que les quadrilatères ACA'C', FGF'G' sont des parallélogrammes, dans le premier desquels la parallèle KOK', menée par le centre O aux côtés A'C et FG, passe nécessairement par les milieux *m* et *m'* des côtés FG' et F'G du second parallélogramme.

Dès lors la droite DOD', qui est d'ailleurs parallèle à AC puisque dans le triangle AA'C, les points D et O sont les milieux respectifs des côtés A'C et AA', est aussi parallèle aux côtés FG' et F'G de la figure FF'GG' : cette droite POP' passe donc par le milieu H de la corde FG.

Ce lieu géométrique est, comme on le voit, un *diamètre* de l'ellipse.

174. Corollaire. — *Le diamètre parallèle à des cordes de même direction est le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles au diamètre qui correspond à cette direction.*

Cette loi, qui devient évidente en présence du parallélisme des droites AC et FG', prouve, par suite du théorème précédent, qu'*il*

y a un nombre illimité de diamètres qui jouissent de cette propriété : *cette réciprocité de fonctions* entre ces deux diamètres leur a fait donner le nom de *diamètres conjugués*.

175. De ce qui précède il ressort, à titre de remarque, que *deux diamètres conjugués* sont respectivement parallèles à des cordes menées par les extrémités du grand axe.

En général, on appelle cordes *supplémentaires celles qui sont menées d'un point de l'ellipse aux extrémités d'un diamètre quelconque.*

176. *Équation polaire de l'ellipse.* — En prenant le centre pour pôle, et la ligne des foyers pour axe de translation, en désignant par $2a$ le grand axe et par α et α' les angles que font avec cet axe les rayons vecteurs correspondants m et $2a-m$, les équations directives des rayons vecteurs d'un point seront, en représentant par $2c$ la distance des foyers,

$$i = -c + m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha]$$
$$i = c + (2a-m)[\cos\alpha' + \sqrt{-1}\,\sin\alpha']$$

L'identification des seconds membres de ces équations donne

$$-c+m[\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\sin\alpha] = c+(2a-m)\,[\cos\alpha'+\sqrt{-1}\,\sin\alpha']$$

d'où

$$-2c+m\,\cos\alpha = (2a-m)\,\cos\alpha'$$
$$m\,\sin\alpha = (2a-m)\,\sin\alpha'$$

Et par addition des carrés,

$$4c^2+m^2-4cm\,\cos\alpha = 4a^2+m^2-4am$$

d'où encore

$$\cos\alpha = \frac{am-(a^2-c^2)}{cm} \qquad (1)$$

ou bien

$$m = \frac{a^2-c^2}{a-c\,\cos\alpha} \qquad (2)$$

par suite

$$\cos\alpha' = \frac{am-(a^2+c^2)}{c(2a-m)}$$

Il est à remarquer que cette dernière relation se déduit immédiatement de (1) par le changement de signe de c et en remplaçant m par $2a-m$; l'une des équations (1) ou (2) suffit donc à la représentation complète de la courbe.

Le second rayon vecteur elliptique sera

$$2a - m = \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha}{a - c\cos\alpha} \qquad (3)$$

Observation. — Si le pôle est placé à l'un des foyers, l'équation de la courbe sera encore la même, seulement il est bon de remarquer que, dans cette équation, α *est l'angle formé par le rayon polaire avec l'axe de translation*, tandis que dans l'équation (1) du paragraphe précédent, α *est l'angle du rayon elliptique avec l'axe de translation.*

177. De l'équation de cette courbe on tire, par dérivation,

$$\frac{d\alpha}{dm} = -\frac{a - c\cos\alpha}{cm\sin\alpha} = -\frac{a^2 - c^2}{cm^2\sin\alpha}$$

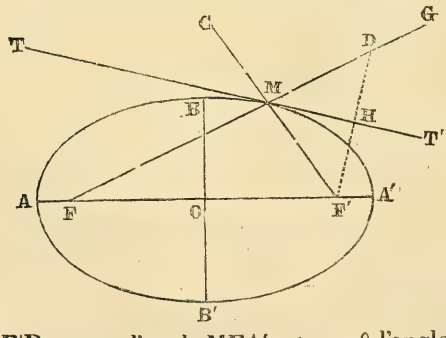
Si l'on désigne par θ l'angle que la tangente au point donné fait avec le rayon vecteur de ce point, on trouvera (n° 147),

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{a - c\cos\alpha}{c\sin\alpha} \qquad (4)$$

Après avoir pris l'un des foyers pour pôle, on pourrait supposer que l'autre foyer devient pôle à son tour : l'équation de la courbe restera évidemment la même, au seul changement près de α en α' et réciproquement.

178. Théorème III. — *La tangente est la bissectrice de l'angle formé par les deux rayons vecteurs du point de contact.*

Démonstration. — Soit le point M, dont les deux rayons vecteurs sont FM et F'M, et dont TMT' est la tangente; du point F' menons, à TT', la perpendiculaire F'HD dont l'intersection avec FMG est le point D.



Supposons que le foyer F soit le pôle de l'ellipse; en représentant par n le module relatif à la droite F'D, par α l'angle MFA', et par θ l'angle FMT', on aura pour équation du rayon vecteur FMD,

$$i = m\left[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\right] \qquad (1)$$

et (n° 151) pour équation de la droite DF', *perpendiculaire* à la tangente,

$$i = 2c + n\sqrt{-1}\,[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\,\sin\theta] \qquad (2)$$

Pour déterminer les modules m et n, du point D d'intersection de ces droites, nous aurons donc, en suivant le procédé déjà si souvent employé dans ce qui précède,

$$m\cos\alpha = 2c - n\sin(\alpha+\theta)$$
$$m\sin\alpha = n\cos(\alpha+\theta)$$

Ces deux équations de condition, aux inconnues m et n, donnent immédiatement par leur résolution,

$$m = 2c\,[\cos\alpha - \sin\alpha\,.\,\operatorname{tang}\theta] \qquad (3)$$

Mais θ étant le coefficient de *direction tangentielle*, c'est-à-dire l'angle fait par la tangente considérée avec le rayon vecteur du point de contact on a (n° 177), relativement à l'ellipse,

$$\sin\alpha\,.\,\operatorname{tang}\theta = \cos\alpha - \frac{a}{c} \qquad (4)$$

La combinaison des relations (3) et (4) donne

$$m = \mathrm{DF} = 2a$$

D'où l'on déduit, d'après la génération de la courbe,

$$\mathrm{DM} = \mathrm{F'M}$$

et dès lors il devient évident que *la tangente* TT' *est la bissectrice de l'angle* CMF.

179. *Autrement.* — Cette même propriété s'établit d'une manière bien plus simple comme nous l'avons déjà fait ailleurs (*).

De la définition de l'ellipse l'on déduit que si l'un des rayons vecteurs augmente, l'autre diminue d'une égale quantité; il s'en suit qu'à chaque instant le point générateur se trouve soumis, suivant les droites qui le joignent aux foyers, à des forces qui l'éloignent de l'un de ces points fixes pour le rapprocher d'autant de l'autre; ces forces de directions contraires, par rapport au grand axe, sont donc d'égale intensité, et la bissectrice de leur angle, représentant en direction la résultante de leurs actions, sera la tangente à l'ellipse. Cette tangente fait donc des angles égaux avec les rayons vecteurs de son point de contact.

(*) Voyez notre *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, n°s 235 et suivants. — Liége, mai 1860. — H. Dessain.

180. *Rayon et centre de courbure.* — On obtiendra, sans peine,

$$f'm = -\frac{a - c\cos\alpha}{cm\sin\alpha}$$

$$f''m = \frac{2ac - [a^2 + c^2 + c^2\sin^2\alpha]\cos\alpha}{c^2 m^2 \sin^3\alpha}$$

et ensuite, à l'aide de la formule (n° 157),

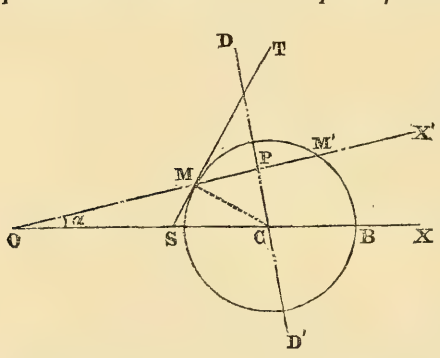
$$\rho = \frac{m}{c}\,\frac{[a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha]^{\frac{3}{2}}}{ac - (a^2 + c^2 - ac\cos\alpha)\cos\alpha}$$

d'où l'on conclut immédiatement (n° 158) les coordonnées du centre de courbure.

—

Circonférence.

181. Cette courbe est *le lieu géométrique* du mouvement *d'un point dont la distance à un point fixe donné est constante.*



Soient C le point fixe donné et M un point quelconque de la courbe, de telle manière que

$$CM = R$$

R étant la distance constante appelée *rayon.*

Par le point C menons arbitrairement la ligne CX que nous choisissons pour axe de translation, et sur laquelle nous prenons le point quelconque O pour pôle ; posons

$$OC = k \qquad \begin{matrix} MO = m \ , & \widehat{MOX} = \alpha \\ CM = R \ , & \widehat{MCX} = \alpha' \end{matrix}$$

Nous aurons pour équations respectives des directions CM et COM,

$$i = m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha]$$
$$i = k + R\,[\cos\alpha' + \sqrt{-1}\,\sin\alpha']$$

En identifiant les seconds membres il viendra,

$$m\cos\alpha = k + R\cos\alpha'$$
$$m\sin\alpha = R\sin\alpha'$$

L'élimination de α', faite comme on l'a déjà vu, nous donne

$$m^2 - 2km\cos\alpha + k^2 - R^2 = 0 \qquad (1)$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{m^2 + k^2 - K^2}{2km} \qquad (2)$$

L'une ou l'autre des équations (1) et (2) représente analytiquement la circonférence.

Il est presqu'inutile de faire remarquer que ces équations accusent la symétrie de la courbe par rapport à OX.

Les deux valeurs de m qui, dans cette équation, répondent à une même valeur de α, fournissent les deux distances OM et OM', c'est-à-dire les deux points M et M' de rencontre de la sécante OX' avec la circonférence.

182. *Tangente.* — L'équation, dont nous nous occupons, donne aisément

$$f'm = \frac{d\alpha}{dm} = \frac{k\cos\alpha - m}{km\sin\alpha}$$

et si l'on désigne encore par θ l'angle OMP fait par la tangente en M avec le rayon polaire OM du point de contact, on aura

$$\text{tang}\,\theta = \frac{k\cos\alpha - m}{k\sin\alpha}$$

183. *Normale.* — Dès lors (n° 151) l'équation de la normale sera

$$i = m\cos\alpha + m\frac{\sin\alpha.\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} + M\sqrt{-1}[\cos(\alpha+\theta) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\theta)]$$

En représentant, pour un instant, par d la distance du pôle ou point où l'axe de translation rencontre la normale, il viendra

$$d = m\left[\cos\alpha + \frac{\sin\alpha.\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}\right]$$

d'où, après quelques réductions évidentes,

$$d[\cos\alpha - \sin\alpha.\,\text{tang}\,\theta] = m$$

qui devient, après avoir remplacé *tang* θ par sa valeur trouvée au numéro précédent,

$$d\left[\cos\alpha - \sin\alpha\,\frac{k\cos\alpha - m}{k\sin\alpha}\right] = m$$

d'où enfin

$$d = k$$

Concluons donc que toutes les normales passent par le centre, c'est-à-dire que *la tangente est perpendiculaire au rayon du contact*.

184. Le pôle O étant quelconque, et la courbe étant évidemment symétrique par rapport à OX, il est clair que *tous les diamètres passent par le centre*. Pour déterminer celui qui correspond à la corde MM', il suffit de remarquer que la distance p du pôle O au milieu P de MM' est donnée, mais en signe contraire, par la moitié du coefficient de m dans l'équation (1, n° 181), et qu'ainsi l'on a

$$p = k \cos \alpha$$

Cette relation prouve que p est la projection de k sur OX', et que *le diamètre cherché est perpendiculaire à la corde d'intersection*.

—

Hyperbole.

185. Cette courbe est engendrée par le mouvement d'un point dont la *différence des distances à deux points fixes*, appelés *foyers*, est *constante*.

Il est incontestable que cette courbe est symétrique tant par rapport à la ligne qui passe les foyers, que par rapport à la perpendiculaire à cette ligne, menée par le milieu de la distance des foyers : on voit donc que cette courbe, indéfinie de chaque côté des foyers, se compose de deux branches symétriques par rapport à deux droites qui sont perpendiculaires l'une à l'autre, dont chacune divise en deux parties égales les cordes qui sont parallèles à l'autre, et qui pour cette raison portent le nom d'*axes principaux* ou simplement d'axes de *l'hyperbole*.

Les points de la courbe, situés sur la ligne focale, ont reçu le nom de *sommets* de la courbe, et ces points sont évidemment les plus rapprochés des foyers.

En suivant pour l'hyperbole le même mode de raisonnement qui a été employé, (n° 172) pour l'ellipse, on démontrera encore que

Théorème IV.— *Toute sécante, passant par le milieu de la droite qui unit les foyers, est divisée par ce point en deux parties égales.*

Cependant il existe des droites qui passent par ce point sans rencontrer la courbe ; ces droites sont comprises dans un angle qu'il sera bientôt nécessaire (n° 190) de déterminer d'une manière particulière.

En conséquence de la propriété qu'énonce ce théorème, le milieu de la distance focale a reçu le nom de *centre* de l'hyperbole.

Théorème V. — *Le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes parallèles à une même direction est une ligne droite qui passe par le centre de l'hyperbole ;* ou encore, *le diamètre parallèle à une direction donnée est le lieu géométrique des milieux des cordes qui sont parallèles au diamètre correspondant à cette direction.*

De là aussi les diamètres conjugués et les cordes supplémentaires de l'hyperbole.

186. *Équation de l'hyperbole.* — Soient $2a$ le grand axe de la courbe, $2c$ la distance des foyers, c étant plus grand que a ; soient encore α l'inclinaison, sur l'axe de translation, du premier rayon d'un point quelconque de l'hyperbole, α' l'inclinaison sur ce même axe du second rayon $2a+m$; admettons que l'origine ou pôle soit le centre, et nous trouverons avec facilité,

$$i = -c + m\,[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]$$
$$i = +c + (2a+m)\,[\cos\alpha' + \sqrt{-1}\sin\alpha']$$

pour équations respectives et directives des deux rayons vecteurs d'un point quelconque.

En identifiant les seconds membres, on obtient

$$-c+m\cos\alpha = +c+(2a+m)\cos\alpha'$$
$$m\sin\alpha = (2a+m)\sin\alpha'$$

L'élimination de α' entre ces deux équations de condition, fournit

$$\cos\alpha = \frac{c^2-a^2-am}{cm} \qquad (1)$$

ou aussi, et selon les besoins,

$$m = \frac{c^2-a^2}{a+c\cos\alpha} \qquad (2)$$

par suite

$$\cos\alpha' = -\frac{c^2+a^2+am}{c(2a+m)} \qquad (3)$$

187. De l'équation (1) ou (2) de cette courbe on tire,

$$\frac{d\alpha}{dm} = \frac{a+c\cos\alpha}{cm\sin\alpha} = \frac{c^2-a^2}{cm^2\sin\alpha} \qquad (4)$$

θ représentant toujours l'angle que la tangente en un point donné d'une courbe fait avec le rayon vecteur de ce point, on aura

$$\text{tang}\,\theta = \frac{a+c\cos\alpha}{c\sin\alpha} = \frac{c^2-a^2}{cm\sin\alpha} \qquad (5)$$

188. THÉORÈME VI. — *La tangente à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par les deux rayons vecteurs du point de contact.*

Cette proposition se démontre de la même manière qu'au (n° 178).

Autrement. — Les rayons vecteurs du point de contact tournent sans cesse, dans la génération de la courbe, autour de leurs foyers respectifs en conservant entr'eux la différence constante $2a$; il s'en suit que le point générateur qui se meut sur ces droites est sollicité à l'éloignement des deux foyers par des *forces égales*, attendu que la différence des chemins parcourus est la même : la résultante de ces actions égales sera donc dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs.

189. *Rayon et centre de courbure.* — Par dérivation, on a,

$$f'm = \frac{a+c\cos\alpha}{cm\sin\alpha}$$

$$f''m = -\frac{2ac+[a^2+c^2+c^2\sin^2\alpha]\cos\alpha}{c^2m^2\sin^3\alpha}$$

Et ensuite, à l'aide de la formule (n° 157),

$$\rho = \frac{m}{c}\,\frac{[a^2+c^2+2ac\cos\alpha]^{\frac{3}{2}}}{ac+(a^2+c^2+ac\cos\alpha)\cos\alpha}$$

Les relations (n° 158) fourniraient ensuite les coordonnées du centre de courbure.

190. ASYMPTOTES. — Lorsqu'une branche de courbe est infinie, une droite qui en approche indéfiniment, sans jamais pouvoir la rencontrer, se nomme *asymptote*.

Ces droites sont donc les tangentes aux derniers points de la courbe en général, et par exemple de l'hyperbole en particulier ; en ces points le rayon vecteur doit donc être *illimité*, d'où l'on déduit en vertu de l'équation (2, n° 186), que

$$a+c\cos\alpha = 0 \quad , \qquad \textit{ou bien} \qquad \cos\alpha = -\frac{a}{c}$$

Cette valeur de α caractérise les asymptotes, dont il est facile de trouver actuellement la construction très-simple, puisque cette relation indique évidemment que les asymptotes sont parallèles aux deux côtés égaux du triangle isocèle, dont $2a$ est la base et dont c, c sont les deux autres côtés.

On sait de plus que θ étant l'angle d'une tangente avec le rayon polaire du contact, on a (n° 187),

$$\text{tang } \theta = \frac{c^2 - a^2}{cm \sin \alpha}$$

Le rayon vecteur m est ∞, donc puisque α a nécessairement une valeur déterminée, connue ici par la relation $a + c \cos \alpha = 0$, on aura aussi

$$\text{tang } \theta = 0$$

relation qui prouve à l'évidence que la tangente considérée, dont l'inclinaison sur l'axe de translation est,

$$\alpha_1 = \text{arc } [\cos = -\frac{a}{c}]$$

se confond avec le rayon vecteur du contact et passe ainsi par le pôle, c'est-à-dire par le centre de la courbe.

Il suffira donc de mener par le centre de l'hyperbole des parallèles aux côtés du triangle rectangle isocèle dont nous venons d'indiquer la construction.

—

Parabole.

191. *Cette courbe est le lieu géométrique des diverses positions d'un point assujetti à rester équidistant d'un point fixe donné, appelé* foyer, *et d'une droite fixe aussi donnée, appelée* directrice.

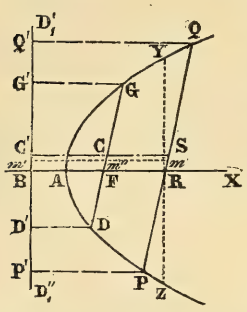
Abaissons du foyer la perpendiculaire sur la directrice, et prenons cette perpendiculaire pour axe de translation ; il est clair que le milieu de la distance de ce point à la directrice appartient à la parabole qui est ainsi une courbe à une branche, symétrique par rapport à cette perpendiculaire focale que l'on appelle *axe de la courbe*, et illimitée tant au dessus qu'au dessous de cet axe.

Par cela seul, on voit que cette courbe est dépourvue de centre puisqu'il est évidemment impossible de trouver dans son plan un point divisant en deux parties égales toutes les cordes qui y passent.

La symétrie de la parabole, par rapport à son axe, signifie en d'autres termes que *l'axe est le lieu géométrique des milieux des cordes qui lui sont perpendiculaires.*

192. Théorème VII. — *La parallèle à l'axe menée par le milieu d'une corde quelconque de la parabole, passe par les milieux de toutes les cordes parallèles à celles-là.*

Démonstration. — Par le foyer F, ou même par tout autre point de l'axe parabolique, menons une corde quelconque DFG, dont le milieu est C, et considérons une parallèle PQ à cette corde ; il faut prouver que si par C l'on mène la parallèle à BX, le point de rencontre de cette ligne avec PQ divise en deux parties égales la corde PQ.



Pour cela supposons qu'il n'en soit pas ainsi, que m soit le milieu de PQ ; $D'_1D''_1$ étant la directrice et le point A étant le milieu de BF, on a par une propriété du trapèze,

$$2mm' = PP'+QQ'$$

et par suite

$$2mm' = PP'+QQ'-2FR \qquad (1)$$

Mais puisque C est le milieu de DG, on a aussi :

$$2CC' = DD'+GG' \qquad (2)$$

Comme il est évident que $CC' > m'm''$, on peut rapprocher les relations (1) et (2) et écrire

$$PP'+QQ'-2FR < DD'+GG'$$

d'où

$$PP'-DD'+QQ'-GG' < 2FR$$

et encore en menant GV et DT, parallèles à la directrice $D'_1D''_1$,

$$PT+QV < 2FR$$

En prolongeant DG jusqu'à PP' et QQ', on obtient :

$$FR-D''T+FR+G''V < 2FR$$

d'où

$$D''T > G''V \qquad (3)$$

Mais les triangles DTD'' et GVG'', rectangles en T et en V, sont semblables et donnent, comme conséquence de (3), la relation suivante :

$$DD'' > GG''$$

ou bien

$$PR-DF > QR-FG$$

et

$$FG-DF > QR-PR \qquad (4)$$

Actuellement cette dernière inégalité permet de conclure que plus les parallèles PQ menées à DG s'éloignent de A, dans la direction AX, plus la différence QR—PR des segments, produits sur ces cordes par l'axe parabolique, sera petite : or, comme la courbe est continue et illimitée, l'on en déduira que cette différence finira par s'annuler, et qu'*alors une certaine corde oblique sur l'axe serait coupée par l'axe en deux parties égales.*

Cette conséquence est évidemment absurde, car si PQ était par exemple cette corde, il faudrait que l'on eut QR = PR ; mais si en R l'on mène la perpendiculaire YRZ à l'axe AX, on sait que RY étant égale à RZ,

$$QR > RY > PR$$

L'égalité de QR et de PR est donc impossible, et conséquemment l'hypothèse, par suite de laquelle le point *s* ne serait pas le milieu de PQ, est pareillement impossible.

La proposition est donc démontrée et met en évidence que,

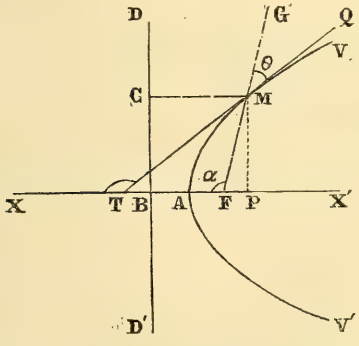
Tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe.

193. Corollaire. — De cette propriété il résulte immédiatement que

La tangente à la parabole, à l'extrémité d'un diamètre, est parallèle aux cordes que le diamètre divise en deux parties égales.

Cette tangente et le diamètre de son point de contact ont reçu le nom de *diamètres conjugués* de la parabole.

194. *Équation polaire de la parabole.* — Soit la parabole VV' rapportée à son foyer F et à son axe de translation AFX perpendiculaire à la directrice DD'.



Posons

$$FM = m, \widehat{MFX} = \alpha, AF = AB = p$$

Du point M menons les perpendiculaires MP et MC à l'axe et à la directrice. Comme on a

$$CM = m \quad et \quad FM = m \sin \alpha$$

les équations des chemins FM et FBCM seront,

$$i = m\,[\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha]$$

$$i = +2p - m + \sqrt{-1}\, m \sin \alpha$$

En identifiant les seconds membres de ces équations, on obtient

$$m(1+\cos\alpha) = 2p \quad , \quad d'où \quad \cos\alpha = 2\frac{m}{p} - 1 \quad (A)$$

Telle est l'équation polaire de la parabole.

195. *Valeurs de* f'm *et* f''m. — On aura avec grande facilité,

$$f'm = \frac{d\alpha}{dm} = \frac{2p}{m^2 \sin\alpha}$$

$$f''m = -\frac{4p}{m^4}\,\frac{m\sin^2\alpha + p\cos\alpha}{\sin^3\alpha}$$

196. *Angle* θ *de la tangente avec le rayon vecteur du point de contact.* — D'après la formule (n° 147), il est clair que

$$\text{tang}\,\theta = +\frac{2p}{m\sin\alpha} \qquad (B)$$

197. *Propriété caractéristique de la tangente.* — De l'équation (A) on tire

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{m\sin\alpha}{2p-m}$$

et par suite

$$\text{tang}\,MFX' = \frac{m\sin\alpha}{m-2p}$$

Cherchons maintenant *tang* 2θ, et nous aurons aisément, à l'aide de la valeur (B) de *tang* θ,

$$\text{tang}\,2\theta = \frac{2\,\text{tang}\,\theta}{1-\text{tang}^2\,\theta} = \frac{4mp\sin\alpha}{m^2\sin^2\alpha - 4p^2}$$

Mais de (A) l'on déduit promptement,

$$\sin^2\alpha = 4\frac{p}{m} - 4\frac{p^2}{m^2}$$

d'où l'on tire par substitution,

$$\text{tang}\,2\theta = \frac{m\sin\alpha}{m-2p}$$

Les expressions des tangentes des angles MFX' et 2θ, permettent donc, eu égard aux limites des angles α et θ, de conclure

$$2\theta = MFX' = 2^d - \alpha$$

Énonçons dès lors cette propriété, si connue,

La tangente à la parabole est la bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et par la perpendiculaire menée de ce point à la directrice.

198. *Autrement.* — Puisqu'un point M de la parabole est équidistant du foyer et de la directrice, c'est que, sur ce point et dans ces directions, agissent des forces *égales*, dont la résultante est ainsi dirigée suivant la bissectrice de l'angle de ces droites ; cette bissectrice est donc la tangente au point M de la courbe.

199. *Rayon et centre de courbure.* — On trouvera avec facilité, au moyen de la formule (n° 157),

$$\rho = -\frac{[m^2 \sin^2\alpha + 4p^2]^{\frac{3}{2}}}{2mp \sin^2\alpha + 4p^2 \cos\alpha}$$

et comme l'équation polaire de la parabole donne,

$$\sin^2\alpha = \frac{4mp - 4p^2}{m^2}$$

il viendra en remplaçant $\sin^2\alpha$ et $\cos\alpha$ par leurs valeurs, en fonction de m et de p,

$$\rho = -2m\sqrt{\frac{m}{p}}$$

les coordonnées du centre de courbure s'en suivent immédiatement (n° 158),

$$x = m\left[\cos\alpha - 2\sqrt{\frac{m}{p}}\sin(\alpha+\theta)\right]$$

$$y = m\left[\sin\alpha + 2\sqrt{\frac{m}{p}}\cos(\alpha+\theta)\right]$$

CONCLUSION.

—

En considérant les deux grands modes de génération de la grandeur, nous sommes parvenus à la vraie théorie des quantités positives, négatives et imaginaires.

Toutes les propriétés du calcul des quantités ordinairement appelées soient réelles, soient imaginaires, ont été établies *à priori :* nous croyons donc avoir résolu d'une manière RATIONNELLE cette importante question.

Notre théorie nouvelle introduisant et rappelant sans cesse, dans les manipulations littérales, la génération spéciale de chaque grandeur, se distingue nettement de tous les autres systèmes, qui ne voient en Algèbre que des opérations *arithmétiques,* généralisées au moyen de lettres et représentées, dans leurs diverses affections et combinaisons, par des signes *conventionnels :* il n'est donc pas étonnant que cette théorie, comme nous l'avons fait voir par plusieurs exemples, permette avec facilité et promptitude le passage du concret à l'abstrait et réciproquement.

D'ailleurs, en fait d'applications, il faut en science savoir recourir à tout système de coordonnées, et employer, dans tel ou tel genre de spéculations, celui qui se prête le plus commodément aux diverses nécessités : toutefois les principes du calcul doivent être établis d'une manière incontestable, et c'est là le but que nous avons cherché à atteindre dans ce travail.

FIN.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

—

Pages.

INTRODUCTION 93

—

PREMIÈRE PARTIE.

TRANSLATION ANALYTIQUE.

CHAPITRE I. Caractère principal de l'Algèbre. — Opposition correspondante des directions et des signes. — Quantités positives, négatives. — Règles des signes 96

CHAPITRE II. *Addition.* — Interversion de l'ordre des termes; règle des signes; termes semblables 104

CHAPITRE III. *Multiplication.* — Règle des signes pour un nombre quelconque de facteurs. — Puissances d'une même lettre. — Produits d'un polynome par un monome positif ou négatif. — Produit de deux polynomes. — Irréductibilité des produits de certains termes des facteurs 107

CHAPITRE IV. *Soustraction.* — Règle des signes. — Soustraction de deux polynomes, démontrée *à priori*, et par décomposition. . . 116

CHAPITRE V. *Division.* — Règle des signes. — Division des puissances d'une même lettre. — Division des monomes et des polynomes. — Restes nuls. — Division impossible. 118

—

SECONDE PARTIE.

ROTATION ANALYTIQUE.

CHAPITRE I. *Vraie signification du symbole* $\sqrt{-1}$. — Deux modes généraux de génération des grandeurs. — Décomposition d'un mouvement angulaire quelconque en trois mouvements consécutifs. — Signification concrète du signe i ou de $\sqrt{-1}$. — Généralité spontanée et immédiate de ce signe. — Symboles imaginaires de divers degrés; sens concret de ces symboles d'ordres différents 127

CHAPITRE II. *De l'expression* $\sqrt{-1}$. — Combinaison, *à priori*, des signes de translation et de rotation. — Établissement, *à priori*, abstrait et concret des règles fondamentales du calcul des quantités de la forme $a\sqrt{-1}$. — Reproduction périodique de $+1$, $+\sqrt{-1}$, -1, et $-\sqrt{-1}$ par voie de puissances consécutives de $\sqrt{-1}$. — Surfaces positives, négatives. — Carré de $a\sqrt{-1}$; passage de l'une à l'autre des formes $\sqrt{-a^2}$ et $a\sqrt{-1}$ 136

CHAPITRE III. *De l'expression* $a \pm b\sqrt{-1}$. — Signification concrète et établissement, *à priori*, des règles fondamentales du calcul des quantités de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$. — Égalité de deux imaginaires. — *Module* ou *Norme*. — Modules d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient; d'une puissance, d'un quotient. — Forme modulaire des quantités imaginaires. — Relation qui existe entre les carrés faits sur les trois côtés d'un triangle rectangle. — Multiplication et division modulaire. — Formules de *Moivre*. — Réciprocité des quantités $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ et $\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$. — Deux caractères généraux de convergence des séries réelles et des séries imaginaires. — Extension du théorème de *Maclaurin*, au cas de l'imaginarité. — Développements de a^x, e^x, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$. — Base népérienne. — Loi exponentielle imaginaire. — Formules de *Jean Bernoully*. — Logarithmes népériens imaginaires des quantités quelconques, des nombres positifs et des nombres négatifs. — Logarithmes imaginaires à base quelconque. — Passage logarithmique d'un système A à un autre système A′. 143

—

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATIONS ANALYTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE I. *Définition et caractère essentiel de l'Algèbre*. — Deux grandes divisions de la science générale de l'étendue. — Échelle continue des quantités, tant positives que négatives. — *Adoption* imprudente et vicieuse de nombreux postulatums et de nombreuses conventions littérales, indépendantes les unes des autres. — Correspondance immédiate, quant aux deux modes de génération de la grandeur, entre le concret et l'abstrait 170

CHAPITRE II. *Dualité du sens dans les questions d'Algèbre ; symboles*. — Impossibilité d'une solution. — Équation *générale* de toutes les questions d'un même genre, telles que les directions de quelques éléments sont seules différentes. — Signification et vraie valeur des symboles $\frac{0}{a}$, $\frac{a}{0}$; $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\pm 0.\infty$, $\infty \pm \infty$; $\infty.\infty$; 0^0, ∞^0 ; ∞^∞ ; $1^{\pm\infty}$; $0^{\pm\infty}$. — Limite vers laquelle converge la somme des termes d'une progression factorielle décroissante, à mesure que le nombre de termes devient de plus en plus grand. — Dualité imaginaire. . . 177

CHAPITRE III. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES. — *Du point et de la ligne droite.* — Équations du point, de la ligne droite en général, d'une ligne droite passant par un point donné et soumise à quelqu'autre condition, d'une ligne droite passant par deux points donnés. — Intersection de deux droites. — Parallélisme de deux droites. — Loi trigonométrique fondamentale du calcul des triangles quelconques. — Loi de projection linéaire. — Distance d'un point à une droite 200

CHAPITRE IV. *Éléments de la théorie générale des courbes planes.* — Équations modulaire, polaire et différentielle d'une courbe plane. — Définitions dynamique et géométrique de la tangente. — Signification géométrique de la dérivée polaire. — Équations de la tangente et de la normale dans les divers cas. — Dérivée de l'arc d'une courbe. — Cercle osculateur. — Rayon et centre de courbure. — Courbure d'une courbe en un point donné. — Applications à quelques courbes spéciales. 208

CHAPITRE V. *Propriétés principales des sections coniques.* — Transformation des coordonnées polaires. — Intersection d'une droite et d'une courbe. — Lignes diamétrales et diamètres rectilignes. — Ellipse. — Circonférence. — Hyperbole. — Parabole 227

CONCLUSION 248

FIN DE LA TABLE.

IV. — *Clytides d'Asie et d'Océanie.*

PAR

A. CHEVROLAT.

Dans les Annales de la Société entomologique de France, années 1860, 1861 et 1862, j'ai traité successivement des Clytides du Mexique, de l'ancienne Colombie et du Brésil.

Les mémoires contenant les Clytides des Guyanes, des Antilles et de l'Amérique méridionale sont déposés pour paraître successivement dans les mêmes Annales.

Comme je l'ai déjà expliqué, ce travail a pour but de grouper d'une manière plus homogène les espèces que MM. Laporte de Castelnau et Gory avaient exposées dans un ouvrage intitulé : *Histoire naturelle et iconographique des Insectes Coléoptères; Monographie des Clytus*, année 1841.

De nouvelles espèces citées et décrites dans le *Catalogue du British Museum* (Adam White, 1855, p. 249 à 295) et quelques genres de nouvelle création par des auteurs Anglais, avaient accru la masse des Clytides connus, mais aucun travail de coordination n'avait été entrepris.

J'ai pensé qu'une révision de ces insectes pourrait être utile et j'ai créé de nouvelles coupes génériques qui ont été adoptées par M. J. Thomson, dans son ouvrage intitulé : *Essai d'une classification de la famille des Cérambycides ;* 1861.

Je me suis surtout attaché à la synonymie et j'ai été assez heureux, en consultant les collections de Paris, sauf celle de notre Musée national, que je n'ai pu voir, pour décrire un nombre assez

considérable d'espèces inédites, en outre de ce qui avait été décrit nouvellement.

Le Mémoire ci-joint contient les Clytides de l'Asie et de l'Océanie ; aujourd'hui je ne les dispose pas par régions. Sur les 154 espèces indiquées, 87 étaient déjà connues, 67 sont inédites.

Je remercie MM. A. Deyrolle, H. Deyrolle, Doué, de Mniszech, A. Sallé et J. Thomson, des communications qu'ils ont bien voulu me faire et sans lesquelles mon travail, n'ayant pour base que ma seule Collection, aurait offert bien moins d'intérêt.

CALLICHROMOPSIS (1) Nov. Gen.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX :

Tête allongée, élevée et anguleusement échancrée entre les antennes, du double plus longue en arrière, carrée en avant. *Palpes* minces, à dernier article long, subcylindrique, obtusément tronqué au sommet. *Yeux* arrondis en dessous, profondément lunulés. *Antennes* plus longues que le corps, de onze articles : 2 noduleux, les suivants allongés, 3-5 un peu renflés et anguleux à leur extrémité, le dernier cylindrique, terminé en pointe. *Prothorax* allongé, arrondi, peu convexe, inerme. *Ecusson* sémi-arrondi. *Elytres* planes, allant en s'amincissant faiblement, à troncature un peu sinueuse. *Abdomen* de cinq segments, les 4 premiers égaux. *Sternum* plan, arqué et aminci en devant, élargi au milieu, coupé droit en arrière. *Hanches antérieures* moyennes, globuleuses. *Cavités cotyloïdes* circulaires, évasées sur le côté. *Pattes* longues ; cuisses modérément renflées, les postérieures dépassant le corps du tiers de leur longueur ; jambes postérieures aplaties et rameuses ; tarses postérieurs à 1^er^ article du double plus long que les suivants réunis.

Le type du Genre a de grands rapports de forme avec les *Callichroma*, mais ses couleurs sont autres.

1. *Callichromopsis telephoroides.*

Rufus, antennis (art. 7° et 8° rufis) elytris ad apicem pedibusque, basi prætermissa, nigris.

Long° 15, lat° 5 mill. Patrie : Ceylan.

Cerambyx telephoroides. Westw. Cabin. Orient Ent. tab. 29, fig. 1.
Callichroma telephoroides. A. White. Cat. Br. Mus. p. 167, N° 65.

2. *Prothema signata.*

Atra, scabra, corpore subtus hirto ; elytris singulis maculis duabus pilosis ochraceis, altera scutellari curvata, altera pone medium transversa lunata.

Long° 14, lat° 5 mill. Patrie : Chine bor.

Prothema signata. Pascoe, Tr. Ent. Soc. Lond. 1856, p. 43 (extr. p. 2).

De la collection de l'auteur.

(1) Callichroma, Genre de Coléoptères cérambycins ; ὄψις aspect.

3. *Prothema funerea.*

Atra, scabra, pilis flavescentibus subtus vestita.

Long° 12, lat° 4 mill. Patrie : Chine bor.

Prothema funerea. Pascoe, Tr. Ent. Soc. Lond. 1856, p. 45 (extr. p. 2).

De la collection de l'auteur.

4. *Prothema leucaspis.*

Nigra; pectore abdomineque albidis; antennis ad apicem sericeo-cinereis; margine antico (obscure) laterali et postico prothoracis, elytris lineola infra basin, strigâ obliquâ fasciisque duabus abbreviatis, luteo-albidis; scutello albo.

Long° 12, lat° 4 mill. Patrie : Iles Philippines. (Maldonado).

D'un noir velouté en dessus; poitrine, abdomen et pattes en dessous d'un blanc cendré. *Tête* d'un noir grisâtre; *Mandibules*, *Yeux* et *Antennes* (celles-ci de la longueur du corps) ayant les 4 premiers articles noirs, les suivants d'un cendré soyeux, 6e à 10e aplanis et anguleux. *Prothorax* aussi long que large, arrondi sur les côtés, peu convexe en dessus, droit et rebordé aux extrémités, obscurément bordé de jaune en avant, et nettement blanc en arrière et sur le côté, à angle postérieur direct et appuyé sur l'épaule. *Ecusson* étroit, conique, blanc. *Elytres* planes, arrondies au sommet de la marge, étroitement tronquées au delà, ornées d'une petite ligne qui part de l'épaule, descend parallèlement près de la suture et est presque liée au trait oblique raccourci qui se trouve au-dessous; 1re bande située au delà du milieu, élargie sur la suture et rapprochée de la marge, 2e apicale, coupée obliquement en dessus. Ces diverses parties sont d'un beau jaune. *Pattes postérieures* un peu plus longues que le corps, noires; tarses cendrés.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

5. *Plagithmisus* (1) *attenuatus.*

Fuscus; thorace cristato, albido lineato, elytris apice valde attenuatis, albido subvariegatis, subtus ferrugineus.

Long° 11, lat° 3 mill. Iles de la mer Pacifique, Nlle Zélande.

(1) D'après Mannerheim (Observations critiques; Bull. de Mosc. 25 juin 1845) ce nom, pour avoir une signification exacte, aurait dû être écrit Plagiotmesis.

Clytus attenuatus. Boisduval, Voyage de l'Astrolab. Ins. tom. 2, p. 425, N° 5.
Dej. cat. 3e éd. p. 2.
OEmona humilis ? Newm. The Entom. p. 8.
De la collection de l'auteur.

PSILOMERUS (Blanch.) Gen. nov.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX :

Corps ailé, étroit. *Tête* large, aplatie, plus ou moins avancée ou arrondie. *Palpes* à dernier article assez grand, subconique. *Yeux* arrondis, petits, saillants, faiblement échancrés en dessus. *Antennes* capillaires, de la longueur du corps, de onze articles : 3e longuement épineux au sommet, 4e et 5e grands, le dernier cylindrique, à pointe obtuse. *Prothorax* long, aplani à sa base, allant en s'amincissant jusqu'au sommet. *Ecusson* presque triangulaire. *Elytres* planes, étroites, presque arrondies chacune à l'extrémité et présentant néanmoins une étroite troncature. *Pattes* longues ; cuisses postérieures minces, légèrement arquées à leur naissance, à massue longuement effilée, ayant leur moitié postérieure qui dépasse les étuis ; jambes postérieures grêles, de la longueur des cuisses ; tarses antérieurs ciliés de poils blonds sur leurs bords, à 3e article étroitement conique, 4e longuement bilobé ; tarses postérieurs à 1er article plus long que les suivants réunis ; crochets simples, recourbés en dedans. *Sternum* étroit, allongé, tronqué au sommet. *Hanches antérieures* petites, globuleuses, déprimées en dessus sur le devant. *Cavités cotyloïdes* ovalaires, obliques.

Ce Genre a quelque ressemblance avec les *Ceramia*, Serville.

6. *Psilomerus angustus.*

Elongatus, tenuis, luteo-virescenti-pubescens ; antennis gracilibus testaceis, artº 3º acute spinoso ; prothorace elongato, plano, carinulâ mediâ ; elytris planis, angustis, singulis maculis tribus subquadratis nigris, ultimâ ad marginem postice extensa ; pedibus picescentibus, posticis longioribus obscuris ; corpore infra in medio late brunneo.

Longº 8, Latº. 1 1/5 mill. Patrie : India bor., Neelgheries.

Psilomerus gracilicornis. (Blanch.) Cat. Brit. Mus. p. 242, 245.

Tête assez large, allongée, aplatie, rousse pour le fond, à

pubescence jaunâtre ; sillon longitudinal étroit. *Yeux* arrondis, saillants, à peine échancrés en dessus, d'un brun noirâtre. *Antennes* capillaires, d'un brun roux, 3e article longuement épineux. *Prothorax* 2 fois 1/2 aussi long que large, coupé droit aux extrémités, aplani, brièvement caréné sur le milieu, roux pour le fond, à pubescence d'un jaune verdâtre. *Elytres* à peine plus larges que le prothorax, parallèles, arrondies sur le sommet de la marge, coupées ensuite obliquement du milieu de l'étui sur le dedans de la suture, planes, offrant chacune trois taches noires superposées et en carré long ; la dernière s'étend étroitement en marge jusqu'au sommet de l'élytre ; on remarque en outre, au dessous de l'écusson, une petite tache commune brune et triangulaire. Côtés de la poitrine et de l'abdomen étroitement bordés de jaune avec le milieu du corps d'un brun noirâtre. *Pattes* grêles, de couleur de poix, les postérieures plus longues, ayant les cuisses rembrunies.

Cette espèce fait partie des collections de MM. Guérin-Méneville, Thomson, et de la mienne.

7. *Psilomerus? macilentus.*

Elongatus, obscure testaceus ; prothorace elytrisque obsolete fusco-marginatis.

Longo 11 mill. Patrie : Ceylan.

Psilomerus ? macilentus. Pascoe, Tr. Ent. Soc. Lond. vol. IV., 1857, p. 238. (Extr. p. 3).

8. *Psilomerus orachialis.*

Linearis, ater, infra cinereus, femoribus tibiisque anticis, omnibus basi ferrugineis ; prothorace coriaceo, ad basin anguste albo ; scutello, elytris lineola infra basin fasciisque duabus albis : 1a ultra medium, 2a obliqua ante apicem.

Longo 6, Lato. 1 1/2 mill. Patrie : Iles Philippines (Maldonado).

Finement chagriné, linéaire, noir en dessus, cendré en dessous. *Tête* large, plane, blanche en avant, sillonnée et élevée au milieu. *Yeux* arrondis, assez saillants, faiblement échancrés en dessus, noirs. *Antennes* grêles, plus longues que le corps, ferrugineuses sur les 4 premiers articles, d'un brun noirâtre sur les suivants ; extrémité du 3e armée d'une longue épine. *Prothorax* étroit, allongé, subcylindrique, finement et densément chagriné, noir, ayant une étroite bordure blanche basilaire se continuant en des-

sous. *Ecusson* blanc. *Elytres* arrondies au sommet de la marge, tronquées droit sur la suture, ornées au-dessous de la base d'une petite ligne faiblement arquée et de deux bandes blanches : 1re directe, située au-delà du milieu, 2e presque terminale, oblique. *Pattes* longues, grêles, noires ; cuisses et jambes antérieures et les quatre cuisses postérieures, à leur naissance, de couleur ferrugineuse.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

9. *Acrocyrta annulicornis.*

Elongata, planiuscula, nigra, subopaca, pulvere cinereo induta ; capite medio costato ; antennis corpore sesqui-longioribus, articulis 3-4 ad apicem uni-spinosis, 5° albido ; prothorace elongato longitudinaliter scabroso, maculis duabus anticis nigris, subquadratis, limbo basali supra et infra maculaque trigona inter pedes anteriores, albis ; scutello, elytrorum fasciis tribus (1a ponè suturam subito reflexa, 2a ultrà medium sita integra, 3a apicali cinereo terminata), pectoris maculis lateralibus tribus abdominisque fasciis quatuor, albis.

Longo 14, Lato. 3 mill. Patrie : Iles Arou.

Allongée, finement ponctuée et chagrinée, d'un noir opaque recouvert de cendré. *Tête* un peu plus longue que large, présentant une élévation longitudinale ; bordure inférieure du dessous, de même que celle antérieure du prothorax, d'un noir foncé luisant. *Yeux* d'un brun obscur. *Antennes* une fois $^1/_2$ aussi longues que le corps, noires, à 3e et 4e articles uni-épineux à leur sommet, 5e entièrement cendré. *Prothorax* allongé, arrondi, modérément convexe, droit aux extrémités, chargé sur le disque, dans une assez grande étendue, d'aspérités transverses ; deux taches noires obsolètes, en carré transversal, sont placées un peu en avant du milieu vers les côtés ; la base est étroitement blanche de même que le rebord inférieur ; une grande tache cordiforme, de même couleur, est placée en avant de l'insertion des pattes antérieures. *Ecusson* sémi-arrondi, blanc. *Elytres* allongées, planes, coupées droit avec l'angle externe assez aigu, ornées de trois bandes entières blanches : 1re vers le tiers antérieur, subitement relevée vers l'écusson qu'elle n'atteint pas, 2e un tant soit peu élargie sur la suture, 3e apicale, blanche sur son bord supérieur avec les $^2/_3$ postérieurs d'un cendré bleuâtre. Poitrine marquée de trois taches

blanches de chaque côté, l'interne grande, triangulaire. *Abdomen* présentant quatre bandes blanches amincies ou presque interrompues au milieu. *Pattes* longues, noires, recouvertes de cendré, les quatre postérieures cambrées à leur naissance, les quatre genoux postérieurs armés de deux épines.

♂ Unique dans la collection de M. J. Thomson.

10. *Acrocyrta clytoides.*

Atra, prothorace punctato, angulis posterioribus albo-marginatis; elytris pilosis, maculis duabus scutelloque albis.

Borneo.

Apocyrta clytoides. Pascoe, Tr. Ent. Soc. Lond. V, pag. 27, Pl. XVI, Fig. 1.

De la Collection de l'auteur.

11. *Acrocyrta semiluctuosa.*

Nigra, gracilis; thorace subscabro, margine postico albo maculato; scutello albo; elytris singulis macula, linea curvata media partim suturali et fascia sub-apicali albis; pectoris lateribus albo-maculatis et lineatis, abdominis segmentis duobus basalibus albis.

Long° 13, Lat° 3 1/2 mill. Tenasserim.

Clytus semiluctuosus. Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 283, N° 148.

De la Collection de l'auteur et de celle de M. J. Thomson.

12. *Acrocyrta macilenta.*

Alata, elongata, cinerea; oculis, prothoracis notulis tribus, elytrorum fasciis quatuor, 3ª tantum integra, nigris; tarsis obscure fuscis.

Long° 16 1/2, Lat° 3. Singapore.

Acrocyrta macilenta. Chevrol. Rev. et Mag. Zool, tom. X, 1852, p. 82, 4.

Très-étroite et longue, d'un cendré bleuâtre. *Tête* plus allongée en arrière qu'en avant. *Palpes* et *Yeux* noirs. *Chaperon* étroit, transverse, testacé sur le bord. *Antennes* cendrées, à 3e et 4e articles épineux au sommet. *Prothorax* deux fois aussi long que large, cylindrique, marqué un peu avant le milieu de deux gros points noirs ronds; le bord antérieur et le milieu en dessous, le bord postérieur et le milieu de la tête aussi en dessous légèrement plissés et noirs. *Ecusson* semi-arrondi, d'un gris bleuâtre.

Elytres deux fois $^1/_3$ aussi longues que le prothorax, obliquement tronquées, etc.

15 *Acrocyrta erythrops.*

Planiuscula, nigro-velutina; capite elongato, lato, opaco; oculis rubris; prothorace elongato, postice globuloso, coriaceo, fascia antica cinerea, limbo inferiore niveo usque ultra angulum posticum signato; elytris fasciis duobus luteis; 1ª ante medium, ad suturam circumflexa, extus abbreviata, 2ª ultra medium, integra et recta; sterno, macula trigona in latere pectoris, fasciisque 2bus abdominalibus, luteis.

Longo 13, Lato 4 mill. Patrie : Sarawak.

D'un beau noir velouté avec des bandes et taches d'un blanc de lait. *Tête* allongée, large en avant, d'un noir opaque. *Yeux* arrondis, non échancrés, rouges. *Antennes* un peu plus longues que le corps, noires, à 3e et 4e articles munis d'une épine à leur sommet, 5e et 6e ayant leur moitié basale cendrée. *Prothorax* allongé, globuleux, resserré en avant et en arrière, droit aux extrémités, offrant au-dessous du bord antérieur une bande droite d'un cendré bleuâtre et le dessous au milieu présentant des rides transverses; le rebord inférieur et postérieur est blanc et cette couleur se continue jusqu'au delà de l'angle en dessus. *Ecusson* semi-arrondi, blanc. *Elytres* planes, coupées droit à l'extrémité avec l'angle externe armé d'une épine aigue, ornées de deux bandes blanches : 1re sur le quart antérieur, raccourcie en dehors et formant un trait circonflexe sur la suture, 2e passé le milieu, droite, entière, mince en marge, un peu élargie sur la suture. *Sternum* avec deux taches allongées et une triangulaire de chaque côté de la poitrine, une bande sur les 1er et 2e segments de l'abdomen, blanches. *Pattes* allongées; cuisses à ponctuation rugueuse; médianes grosses, scabres, postérieures longues, faiblement courbées à leur base avec le tiers apical plus long que les étuis; tarses postérieurs à 1er article aussi long que les suivants réunis.

♀ unique dans la collection de M. J. Thomsom. Ses élytres sont ornées de quatre bandes noires également distantes : 1re n'étant séparée de la base que par une tache cendrée anguleuse en arrière, 2e coupée obliquement en dessous de même que la

précédente, 3e et 4e entières; toutes réunies en marge par une étroite bordure noire. *Corps* en dessous d'un cendré bleuâtre uniforme. *Poitrine* à peine marginée de noir en avant et en arrière. *Pattes* très-longues ; genoux postérieur dépassant les étuis, biépineux.

Des collections de M. J. Thomson et de la mienne. Cette espèce semble faire le passage des *Acrocyrta* aux *Demonax*.

14. *Acrocyrta Brahmina.*

Nigra, cinereo-pubescens ; thorace cylindrico, macula transversa nigra ; elytris nigris, macula baseos obliqua, fasciis duabus apiceque cinereis.

Longo 11 1/2, Lato 2 1/2 mill. Ind. Or.

Clytus Brahminus. Lap. et Gory. Mon. p. 97, pl. 18 fig. 115.

15. *Acrocyrta viverra.*

Cinerea, elongata ; prothorace obsoletè nigro-fasciato ; elytris linea curvata humerali media, alteraque lata versus apicem, nigris.

Longo 15 mill. Borneo.

Clytus viverra. Pasc.œ Tr. Ent. Soc. Lond. V. t. IV, p. 240. Ext. p. 5.

Perissus (1) Nov. Gen.

Corps ailé, court et assez robuste, d'un cendré bleuâtre en dessus, d'un gris ou blanc soyeux en dessous avec des bandes ou taches noires aux élytres. Pattes assez longues, surtout les quatre postérieures ; cuisses épaisses, aplanies sur le côté.

Ce genre est propre aux Indes méridionales et orientales, et a quelques points de rapprochement avec les *Xylotrochus*, mais la longueur des quatre pattes postérieures semble le rapprocher des *Acrocyrta*.

Caractères généraux :

Tête large, allongée, arrondie, à troncature un peu convexe, quelquefois sillonnée au milieu. *Palpes* à dernier article terminé en hache. *Mandibules* simples, petites, arquées. *Lèvre* et *Chaperon*

(1) περισσος supérieur.

étroits, transverses, testacés. *Yeux* arrondis en dessous et sur le côté, prolongés au-dessus sur le côté postérieur, brièvement lamellés en dessous de la base antennaire. *Antennes* de longueur variable, atteignant quelquefois le sommet des étuis ou les $^2/_3$ postérieurs chez le ♂, beaucoup plus courtes chez la ♀, un peu aplanies et élargies vers le milieu, minces sur l'extrémité, noirâtres à reflets cendrés, de douze articles : le dernier très-petit, paraissant soudé avec le pénultième, 1er en massue ronde, 2^e trois fois plus court que le suivant, 4^e et 5^e presqu'égaux en longueur, grands, 5^e à 10^e faiblement anguleux. *Prothorax* allongé, régulièrement arrondi sur la longueur, un peu élargi en arrière, offrant sur le disque des points assez gros, scabres sur leurs bords, ou des aspérités transverses. *Ecusson* large, semi-arrondi, incliné en devant. *Elytres* deux fois $^1/_2$ aussi longues que le prothorax, allant en s'amincissant faiblement en arrière, à troncature oblique ou échancrure profonde, armées le plus souvent d'une épine marginale qui fait défaut chez la ♀. *Abdomen* de cinq segments. *Sternum* aplani, en carré long, élargi en avant, tronqué aux extrémités. *Hanches antérieures* globuleuses, déprimées au-dessus. *Cavités cotyloïdes* circulaires, anguleuses en dehors.

16. *Perissus X-littera.*

Subangustatus, cinereo-cyanescens; capite rotundato, medio sulcato (sulco nigro); antennis in dimidia parte basali nigro-cinereis, dein rutilis; prothorace elongato, sub-globoso, asperè punctato, lineis arcuatis duabus obsoletè albis; scutello cinereo; elytris apice emarginatis, bispinosis, nigris, fascia basali secundum suturam postice ad marginem ducta et litteram X efficiente, macula ultra medium in utroque triangulum transversè positum signatis maculaque subquadrata ad imum suturæ, cinereis; corpore infra cinereo, nigro-fasciato, pedibus elongatis, nigris, cinereo-indutis, femoribus clavatis depressis, tarsis rufescentibus.

Long^o 10, 12 1/2, Lat^o 3, 3 1/2 mill. Arrou.

D'un cendré bleuâtre. *Tête* arrondie, convexe, offrant un sillon noirâtre au milieu. *Palpes* testacés. *Mandibules* noires. *Yeux* roux, faiblement échancrés en dessus. *Antennes* un peu plus longues que le corps chez le ♂, dépassant à peine le milieu

des étuis chez la ♀, d'un noir brunâtre, recouvertes de cendré sur les cinq premiers articles, rousses au-delà et anguleuses sur l'un des côtés. *Prothorax* allongé, régulièrement arrondi, coupé droit aux extrémités, offrant sur la région dorsale une ponctuation scabre; on voit sur chaque côté de la base une petite ligne d'un gris jaunâtre. *Ecusson* semi-arrondi, grand, cendré. *Elytres* faiblement atténuées sur le sommet, échancrées et uniépineuses sur l'angle marginal, très-brièvement sur le sutural; noires, ornées d'une bande basale qui suit la suture, se recourbe en marge et forme avec sa semblable la lettre X; au-delà du milieu est une tache triangulaire transverse dont la pointe est en marge et la base appuyée à la suture; au sommet apical se remarque une seconde tache interne qui n'occupe que la moitié de l'étui et est coupée anguleusement au-dessus. *Corps* en dessous d'un gris blanchâtre plus ou moins obscur, marqué d'une bande noire aux bords antérieur et postérieur de la poitrine et de cinq bandes étroites sur l'abdomen. *Pattes* allongées; cuisses épaisses, larges, déprimées sur le côté, les postérieures dépassant au moins, du tiers de leur longueur, les étuis; tarses en partie roux.

Le ♂ a le corps et les pattes plus allongés que chez la ♀; le premier fait partie de la collection de Mr le comte de Mniszech et la seconde de celle de M. J. Thomson.

17. *Perissus femoralis.*

Supra cinereus, infra partim argenteus; capite antice albo-sericeo, postice cinereo fasciâ occipitali nigrâ; antennis tibiis tarsisque nigro-brunneis; femoribus clavatis rubris; prothorace scabroso, notulis duabus dorsalibus fuscis, fasciola basali alba; scutello leucophæo; elytris planis, apice truncatis, spina externa armatis fasciisque tribus obliquis nigris, margine ampliatis, ultima intus abbreviata; pedibus elongatis, pilosis.

Longo 11 1/2, Lato 3 3/4 mill. Borneo, Arrou, ♂ et ♀.

Cendré en dessus, d'un blanc soyeux argenté sur la poitrine, l'abdomen et le milieu du prothorax en dessous. *Tête* tronquée, d'un blanc soyeux, cendrée sur le front avec un bandeau noir sur l'occiput, son sillon longitudinal ne dépassant pas la hauteur des yeux. *Antennes* de la longueur du corps chez le ♂, des 2/3 chez la ♀, d'un brun noir luisant sur les cinq premiers articles,

grises sur les trois suivants, et d'un noir terne sur les quatre derniers. *Prothorax* allongé, arrondi, coupé droit et rebordé aux extrémités, cendré en dessus et sur les côtés inférieurs, ayant la base étroitement blanchâtre, le disque couvert de points entremêlés d'aspérités transverses, avec deux petites taches ponctiformes obsolètes situées un peu avant le milieu. *Ecusson* semi-arrondi, blanchâtre, à base obscure. *Elytres* planes, parallèles, tronquées, munies d'une épine externe assez longue; elles offrent trois bandes noires, obliques, élargies et réunies en marge : la 1re se dirige sur l'écusson en dessous, la 2e médiane est entière et la 3e s'arrondit près de la suture. *Poitrine* et *Abdomen* pointillés de noir, dernier et pénultième segments noirs. *Pattes* allongées, poilues; cuisses assez renflées, rouges; jambes et tarses noirâtres.

De la collection de Mr Guérin-Ménéville et de la mienne.

Cet insecte n'est peut-être qu'une variété locale du *P. glaucinus* Boisduv.

18. *Perissus trizonatus.*

Breviusculus, cylindricus, cinereo-virescenti sericeus; antennis obscure fuscis; thorace sericeo, punctis nigris duobus; elytris maculis tribus latis nigris.

Longe 8 1/2, Late 3 3/4 mill.; Nouvelle-Guinée, Triton Bay, Amboine, Ceram.

Clytus trizonatus. Boisduv. Voy. pôle Sud, IV, p. 270, t. 16, fig. 7.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 275, N° 108.
Des collections de Mrs Mniszech et J. Thomson.

Cette espèce pourrait bien se rapporter au *Clytus glaucinus* Boisduv.; seulement cet auteur aurait omis de parler des deux petits points noirs du prothorax; la ♀ a les cuisses rouges.

19. *Perissus glaucinus.*

Cinereus; elytris nigris, macula baseos ocellata, altera in medio obliqua apiceque cinereis; pedibus rubidis.

Australie.

Clytus glaucinus. Boisduv., Voy. de l'Astrol. Ins. tom. 2, p. 483, n° 3, pl. 9 et 22.
Lap. et Gory. Mon. p. 98, pl. 18 fig. 117.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 282, N° 142.

20. *Perissus Andreæ.*

Brevis, capite, prothorace ad basin et infra, pectore abdomineque cinereis ; antennis in dimidia parte basali et articulo ultimo nigris dein cinereis ; prothorace elongato, asperato, supra nigricante ; scutello cinereo ; elytris oblique truncatis 4-dentatis, fasciis tribus cinereis : 1ª ad basin et secundum suturam arcuata crucem andream demonstrante, 2ª post medium, subobliqua, integra, conum transversum efficiente, 3ª apicali ; pedibus nigris, cinereo indutis, femoribus crassis paululum deplanatis, basi arcuatis, posticis longioribus.

Longo 5, 9 1/2 mill. Lato 1 1/2, 3 mill. Borneo.

Court, assez épais, noir en dessus, blanchâtre et cendré en dessous. *Tête* moyenne, étroite, transverse sur le front, tronquée et carrée en devant, cendrée, finement ponctuée, sillonnée au milieu. *Palpes*, *Lèvre* et *Chaperon* testacés. *Yeux* arrondis, à échancrure étroite et semi-circulaire, roux. *Antennes* dépassant les $^2/_3$ des étuis, d'un noir brunâtre sur les sept premiers articles, avec le 11e de même couleur, cendrées sur les 8e et 10e. *Prothorax* allongé, arrondi, noirâtre, cendré sur la base, gris sur les côtés et blanc en dessous sur le milieu ; le disque est couvert de points assez forts qui sont entremêlés de petits tubercules. *Ecusson* semi-arrondi, cendré, noir sur la base. *Elytres* très-obliquement tronquées, unidentées sur les quatre angles, noires, ornées de trois bandes d'un cendré bleuâtre : 1re en forme de croix de St André, ayant deux des jambages appuyés le long de l'écusson et deux qui partent au-dessous de ce dernier, en s'obliquant sur la marge, et terminés en crochet ; 2e au-delà du milieu, entière, mince en marge, mais élargie sur la suture tant en dessus qu'en dessous ; 3e apicale, oblique, anguleuse sur la suture et coupée droit avant la marge. La poitrine, sur le côté en avant et en arrière, et chaque segment abdominal étroitement bordés de noir. *Pattes* noires, recouvertes de cendré ; cuisses épaisses, arquées à leur naissance, aplaties en dehors ; les postérieures dépassant du tiers de leur longueur les étuis.

Les deux seuls exemplaires que j'ai vus font partie de la collection de M. J. Thomson.

21. *Perissus myops.*

Elongatus, supra cinereus, infra albidulus; abdomine vitta longitudinali nigra; antennis pedibusque nigris, cinereo-indutis; prothorace punctis duobus nigris; scutello albo; in singulo elytro maculis tribus lateralibus nigris : 1ª breviter arcuata, ampla, 2ª angulosa, 3ª rotundata.

Longº 9, Latº 2 1/2 mill. Ceylan.

Assez mince, un peu atténué en arrière, cendré en dessus, blanchâtre en dessous; abdomen offrant une ligne longitudinale noire qui est anguleuse de chaque côté. *Tête* tronquée, sillonnée au milieu. *Palpes*, *Mandibules*, *Yeux* et *Antennes* noirs; ces dernières recouvertes de cendré et s'étendant jusqu'aux $^2/_3$ des étuis. *Prothorax* allongé, arrondi, rembruni sur le milieu longitudinal, présentant deux points noirs, un peu plus rapprochés du bord antérieur. *Écusson* semi-arrondi, blanc. *Elytres* étroites, à troncature droite, à peine anguleuses en marge, arrondies sur la suture, ornées chacune de trois taches latérales noires placées à distance égale : 1re au-dessous de l'épaule, arquée en arrière; 2e triangulaire, faiblement échancrée sur son bord supérieur; 3e arrondie, transverse; une petite tache en dehors de la hanche antérieure, une plus grande sur le métasternum et tous les côtés blanchâtres. *Pattes* noires, revêtues de cendré.

Unique dans la collection de M. le comte Mniszech.

22. *Perissus scutellatus.*

Supra niger, infra cinereo-albus, capite cano; antennis nigris ad apicem cinereis, prothorace elongato, cinereo, lineis duabus basalibus arcuatis cinereis, maculam rotundatam et posticam nigram includentibus, in disco asperato; scutello albo; elytris ad apicem emarginatis, angulo externo longe uni-spinoso, nigris, ad basin protense griseis, fasciis tribus cinereo-cyanescentibus : 1ª arcuata, infra scutellum, secundum suturam versus medium ad marginem recurva, 2_a ad suturam, ampla, extus angulata, 3ª lata apicali; pedibus elongatis, validis, depressis, nigro-cinereis, posticis longioribus.

Longº 10, Latº 3 1/3 mill. Philippines. (Maldonado).

Assez robuste, un peu atténué en arrière. *Tête* arrondie, gri-

sâtre, offrant une tache ronde et noire en avant. *Palpes*, extrémité des *Mandibules* et *Yeux* noirs. *Prothorax* allongé, régulièrement arrondi et convexe, d'un gris obscur, chargé sur le disque d'aspérités transverses, avec deux lignes basales, arquées, d'un gris blanchâtre, renfermant un gros point noir. *Ecusson* grand, semi-arrondi, blanc. *Elytres* raccourcies, deux fois aussi longues que le prothorax, échancrées à leur sommet, armées extérieurement d'une longue épine, grises sur la base, noires au-delà et ornées de trois bandes d'un cendré bleuâtre : la 1re commence sur la suture au-dessous de l'écusson et se recourbe régulièrement en arrière sur la marge (sa bordure interne est noire); la 2e est mince, anguleuse en marge, voûtée en dessus sur la suture et faiblement biarquée en dessous; 3e large et terminale. *Corps* en dessous d'un blanc sale un peu soyeux. *Poitrine* offrant une bande noire en avant et en arrière; l'abdomen en présentant trois minces : celui-ci a le 1er et le dernier segment entièrement noirs. *Pattes* longues, noires, à reflets cendrés; cuisses larges, épaisses, planes sur le côté; les postérieures dépassant du tiers de leur longueur, les étuis; jambes également planes.

Un seul exemplaire ♂ m'a été communiqué par Mr le comte Mniszech.

Demonax J. Thomson, Essai, 1860, pag. 226.

Caput productum; frons lata, magna, depressa. *Antennæ* ♂ corpore vix longiores, 11-articulatæ : artº 1º crasso, 3º cæteris singulis longiore, 3-4 apice intus spina elongata acuta armatis; 5º præcedente longiore, 5-6 subæqualibus, ultimis gradatim decresentibus. *Oculi* parvi, subintegri, vix lunati, haud prominuli, post antennarum basin haud prolongati. *Palpi* sat breves, subæquales, apice dilatati. *Mandibulæ* robustæ. *Prothorax* elongato-globosus, postice paulo constrictus, lateraliter rotundatus et inermis. *Scutellum* subtriangulare. *Elytra* elongata, parallela, prothorace latiora, apice truncata et bispinosa, sutura apice haud spinosa. *Sternum* muticum. *Prosternum* apice angustatum. *Mesosternum* apice latum. *Pedes* cylindrici, elongati, intermedii anticis longiores et posticis multo breviores; illis elongatis; *coxæ* anticæ globosæ; *acutabula antica* integra, rotundata; *femora* apice spinosa; *tarsi postici* elongati, articulo 1º cæteris simul sumptis multo longiore.

23. *Demonax nigrofasciatus.*

Elongatus, flavo-ferrugineus, velutinus; elytris oblique truncatis, spina marginali acuta : ♂ fasciis tribus nigris et latis, 1ª et 2ª obliquis intus abbreviatis et in margine adnexis, 3ª integra extus ampliata ; ♀ fasciis 4ºr : 1ª infra basim usque ad scutellum ducta ; episternis metathoracis macula flava, elongata ornatis ; corpus elongatum, impunctatum ; antennæ basi ferrugineæ, medio fuscæ et ad apicem pallidæ, ♀ omnino ferrugineæ.

Longº 17 mill., Latº 4 mill. Batchian (Camboge).

Demonax nigrofasciatus. Thoms. Ess. 1860, p. 227.

♂ et ♀ des collections de MM. Mniszech et J. Thomson.

24. *Demonax mustelinus.*

Elongatus, cinereus ; prothorace subgloboso, maculis duabus transversis obsolete nigris ; elytris oblique truncatis, extus longe spinosis, fasciis tribus nigris : 1ª basali obliqua ad scutellum ducta, maculam conicam griseam includente, 2ª et 3ª integris, ad marginem ampliatis.

Longº 15, Latº 3 mill. Batchian (Camboge).

D'un cendré moins bleuâtre que le précédent. *Tête* assez large, convexe, un peu plus allongée, offrant un bandeau noir en arrière. *Palpes* et *Mandibules* noirs ; ces dernières sont brillantes. *Yeux* d'un brun rougeâtre. *Antennes* atteignant les $^2/_3$ des étuis, grises ; 3ᵉ et 4ᵉ articles uni-épineux à leur sommet. *Prothorax* ovalaire, marqué de deux taches dorsales transverses, d'un noir peu prononcé, ayant en dessous le bord antérieur et le bord postérieur de la tête d'un noir brillant. *Ecusson* triangulaire, d'un cendré noirâtre. *Elytres* plus larges que le prothorax, deux fois et demie aussi longues, insensiblement amincies jusqu'au sommet de la marge, obliquement tronquées sur la suture, avec l'angle externe longuement épineux, ornées de trois bandes noires : première basale, coupée obliquement au-dessous de l'écusson et présentant au centre, sur le dedans du calus huméral, une tache conique grise à pointe dirigée vers le bas ; deuxième reliée en marge avec la précédente, élargie des deux côtés et rétrécie vers la suture, troisième assez large, ayant son centre placé à la hauteur des genoux médians. *Corps*

en dessous du même cendré qu'en dessus. *Pattes* d'un noir cendré ; sommet des cuisses postérieures dépassant d'un cinquième de leur longueur les étuis ; tarses cendrés.

Vu deux exemplaires appartenant à MM. Mniszech et J. Thomson.

25. *Demonax luridicornis.*

Elongatus, niger ; capite cinereo, fascia postica nigra ; antennis luridis, articulis 3-4 apice uni-spinosis ; prothorace globuloso cervino, antice posticeque anguste reflexo, limbo postice albicante ; scutello nigro ; singulo elytro fascia basali extus abbreviata secundum suturam subito acuminata maculisque tribus albis (1ª oblonga, in medio obliqua, 2ª subtrigona transversa, 3ª apicali, ambo suturæ adnexis) ; in lateribus pectoris maculis duabus et in abdomine fasciis duabus, albis ; pedibus cinereis, tarsis rufescentibus.

Long° 10, Lat 3 1/3 mill. Chine (Hong-Kong).

Noir ; *Tête* tronquée et de même largeur en arrière qu'en avant, carrée, offrant un bandeau noir sur l'occiput, étroitement sillonnée et marquée de carènes sous-antennaires. *Palpes* testacés. *Mandibules* noires. *Yeux* roux, échancrés en lunule au sommet. *Antennes* assez minces, dépassant le milieu des étuis, rousses et un peu brunâtres sur les quatre premiers articles, les 3e et 4e munis d'une épine au sommet. *Prothorax* un peu allongé, globuleux, faiblement sinueux en avant, droit, étroitement blanchâtre sur la base et bordé aux extrémités d'un gris jaunâtre. *Ecusson* triangulaire, noir. *Elytres* un peu moins larges que le prothorax dans sa plus grande étendue, 2 fois 1/2 aussi longues, obtusément tronquées, subanguleuses en marge, arrondies du côté de la suture, noires, ornées chacune d'une petite bande et de trois taches blanches : 1re raccourcie en dehors, arquée le long de l'écusson et subitement terminée en pointe courbe ; 2e située au dessous au milieu de l'étui, oblique et ovalaire ; 3e un peu après le milieu, longitudinale, subconique, transverse, ayant sa partie aigue en marge et sa base sur la suture ; 4e petite, carrée sur le sommet interne. *Metasternum* blanc. *Poitrine* offrant une ligne latérale blanche. *Abdomen* avec deux bandes blanches, l'une sur le 1er, l'autre sur le 2e segment. *Pattes* cendrées ; tarses d'un roux clair.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

26. *Demonax Bowringii.*

Elongatus, olivaceo-cinereus ; elytris linea lunari pone humeros et fasciis duabus mediis, nigris ; antennis (2-spinosis) pedibusque gracilissimis.

Long° 10, Lat° 2 1/2 mill. Chine (Hong-Kong).

Clytus Bowringii. Pascoe, Tr. Ent. Soc. Lond. vol. V, p. 28 (extr. p. 17).

Du cabinet de l'auteur.

27. *Demonax Walkeri.*

Subangustus, cinereo-pubescens ; prothorace maculis duabus, elytris singulis tribus externis, atris ; antennis muticis, articulis 3° et 4° ad apicem unispinosis.

Long° 9, 12, Lat° 2, 3 mill. Ceylan.

Clytus Walkeri. Pascoe, Tr. Ent. Soc. Lond. vol. V, p. 27. (Ext. p. 16).

De la collection de l'auteur.

28. *Demonax elongatulus.*

Filiformis, valde elongatus, niger, cinereo-pubescens ; thorace ovato, punctis duobus nigris ; elytris nigris, maculis quatuor cinereis.

Long° 10, Lat°. 2 mill. Java.

Clytus elongatulus. Lap. et Gory Mon. page 97, pl. 18, fig. 116.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 281, N° 138.

29. *Demonax divisus.*

Cinereus ; elytrorum fasciis duabus nigris : 1ª lata punctos duobus niveos includente, (1° infra scutellum, 2° in medio postico), 2ª ante apicem ; elytris ad basin, medium atque apicem cinereis ; metasterno macula et fasciis duobus abdominalibus, albis.

Long° 11, Lat° 3 1/2 mill. Indes-Or. (Neelgheries).

D'un cendré bleuâtre. *Tête* aplatie, carrée, bituberculée sur le front. *Yeux* arrondis, saillants, d'un brun pâle. *Antennes* atteignant le milieu des étuis, cendrées, minces, de grosseur égale ; 4° art. long, 5° moitié plus court, tous deux épineux au sommet. *Prothorax* globuleux, un peu plus long que large, tronqué aux extrémités, granuleux. *Ecusson* petit, incliné, noirâtre. *Elytres*

parallèles, tronquées carrément au sommet, munies d'une petite épine externe, ornées de deux bandes noires : 1re au-dessous de la base, large, renfermant chacune 2 points blancs, l'un allongé sur la suture, au-dessous de l'écusson, l'autre au milieu vers le bord postérieur ; 2e bande située au-delà du milieu ; la base, le milieu et l'extrémité sont d'un gris bleuâtre, le calus huméral est saillant, allongé et noir. *Corps* en dessous cendré. *Métathorax* d'un beau blanc. *Abdomen* offrant deux bandes blanches atténuées au milieu : l'une sur le 1er et l'autre sur le 2e segment. *Pattes* noires.

Unique dans la collection de M. Guérin-Ménéville.

Cette espèce est plus courte et plus large que les précédentes.

30. *Demonax* (?) *pudicus.*

Niger, elytris linea basin versus obliqua fasciaque recta communi mediana niveis, apice lanuginosis, canis, rotundatis.

Iles Philippines.

Clytus pudicus. Newm. The Entom. page 246.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 281, No 139.

31. *Demonax aureicollis.*

Elongatus, niger ; capite pubescenti ; antennis pedibusque nigris ; thorace oblongo, rufo-sericeo ; elytris nigris, apice breviter spinosis, macula media communi flava.

Longo 18. 19, mill. Ile St. George (Archipel Salomon).

Clytus aureicollis. Boisduv. Voy. pôle Sud IV, p. 269, tab. 16. fig. 6.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 285, No 154.

32. *Demonax chrysoderes.*

Niger, thorace tomento aureo confertissime vestito, subpyriformi ; elytris fasciis tribus cinereis, marginem lateralem haud attengentibus (una apicali), apice truncatis extus muricatis ; pectore albo maculato ; abdomine subtus segmento 1o in lateribus, segmento 2e toto, albis ; antennis nigris, apice ferrugineis, artº 3º 4oque spinosis.

Longo 4. Latº 3 mill. Australie.

Clytus chrysoderes. Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 285, No 155.

De la collection de l'auteur.

Les trois espèces suivantes sont de la taille et ont la livrée du *Clytus massiliensis* Fab.

33. *Demonax Delesserti.*

Niger; oculis pallidis; antennis artº 1º (3º, 4º et 5º ad apicem uni-spinosis), pedibus anticis et 4ºr posticis tantum basi ferrugineis; prothorace scabroso, longe piloso, ovali, basi constricto et cinereo, infra albo fasciato; elytris striga obliqua ad suturam circumflexa, fasciaque media intus paululum ampliata luteis, ad apicem late cinereis, maculis tribus lateralibus luteo-albis.

Longº 8, Latº 3 mill. Pondichery.

Noir, à légère pubescence cendrée. *Tête* aussi large que longue, tronquée en avant. *Palpes*, 1er article des antennes, *Pattes* antérieures, avec la naissance des quatre postérieures, de couleur ferrugineuse. *Yeux* pâles, faiblement lunulés en dessus. *Antennes* grêles, un peu plus longues que la moitié du corps, noires, à 3e article excessivement long, armé au sommet, ainsi que les deux suivants, d'une petite épine. *Prothorax* allongé, ovalaire, très-comprimé sur la base, couvert d'aspérités dorsales, d'un noir un peu brillant avec une bande postérieure grise qui occupe près du tiers; le dessous offre une bande médiane blanche. *Ecusson* ponctiforme, blanchâtre. *Elytres* d'un noir terne pubescent, offrant un trait oblique qui part du milieu de l'étui, se dirige sur la suture au-dessous de l'écusson et forme avec son semblable un trait circonflexe jaunâtre, plus une bande médiane, droite, de même couleur et amincie en marge; le sommet est d'un gris bleuâtre, coupé droit et brièvement épineux en marge. *Métasternum*, une bande sur le bord postérieur de la poitrine, et une seconde, large, interrompue au milieu, sur le 1er segment de l'abdomen, d'un jaune pâle. *Pattes* poilues, les postérieures noirâtres; cuisses couvertes d'une ponctuation espacée, modérément renflées, les antérieures courtes et épaisses, les postérieures dépassant les étuis, à genoux échancrés et également biépineux.

Unique dans la collection de M. Guérin-Ménéville.

J'ai dédié cette espèce à M. Adolphe Delessert, en souvenir d'espèces reçues de lui, lors du retour d'un voyage qu'il avait accompli dans l'Inde.

34. *Demonax lineola.*

Elongatus, nigro-opacus, cinereo vix indutus; capite lato, cinerascente; antennis gracilibus, art. 3-4 ad apicem longe spinosis; prothorace globoso, supra nigro, versus angulos posticos et in lateribus infra albido, ante pedes anteriores macula cordiformi cinerea; in singulo elytro lineola infra scutellum, macula transverse oblonga, fasciis duabus integris (1ª ultra medium 2ª apicali), sterno, metasterno, in pectore linea laterali, fascia postica atque in abdomine fasciis duabus, albis vel griseis.

Longº 6, Latº 2 mill. Manille.

D'un noir opaque, avec les 3e et 4e articles des antennes armés d'une longue épine à leur sommet. *Tête* large, aplanie en devant, cendrée. *Palpes* testacés, aplatis, dernier article tronqué. *Mandibules* petites, noires. *Yeux* arrondis, noirâtres, faiblement lunulés en dessus. *Antennes* à 1er et 2e articles légèrement ferrugineux, 3-5 cendrés, les suivants brunâtres. *Prothorax* un peu allongé, globuleux, noir, granuleux en dessus, à base blanche, cendré sur les côtés inférieurs; une tache en forme de cœur placée en avant des pattes antérieures. *Ecusson* semi-arrondi, un peu anguleux au sommet. *Elytres* allongées, parallèles, régulièrement convexes, brièvement échancrées à l'extrémité, uni-épineuses en marge, arrondies sur la suture, ornées chacune d'une petite ligne suturale située au-dessous de l'écusson, d'une tache oblongue et transverse placée au centre de l'étui, un peu au-dessous de la précédente, et de deux bandes blanches entières: la 1re est au-delà du milieu, longitudinale, s'élargit un tant soit peu sur la suture et décrit en dessus une courbe légère; la 2e apicale, d'égale ampleur. *Corps* en dessous d'un gris de perle soyeux. *Sternum*, *Métasternum*, *Poitrine* signalés par une ligne latérale et une postérieure transverse. *Abdomen* avec le bord inférieur et les côtés des 1er et 2e segments blancs; le pénultième et le dernier sont noirs. *Cuisses* postérieures noires (les autres pattes manquent), plus longues que le corps, brièvement échancrées sur les genoux.

Unique dans la collection de M. le Comte Mniszech.

35. *Demonax persimilis.*

Affinis *Clytoarieti* Lin., granulosus, parce et longe pilosus, nigro-opacus, cinereo vix indutus; capite elongato, antice truncato subquadrato, sulco longitudinali; palpis articuloque 1° antennarum ferrugineis : his cinereis, articulis 3 et 5 ad apicem uni-spinosis; in prothorace limbo postico, in elytris striga obliqua infra scutellum, fasciis duabus, sterno, metasterno, in pectore macula laterali conica atque in abdomine fasciis duabus latis, albis.

Long° 7, Lat° 2 1/2 mill. Neelgheries.

Allongé, étroit, d'un noir opaque, couvert d'une légère poussière cendrée, plus abondante sur la tête et sur le prothorax, et offrant quelques longs poils épars. *Tête* obliquement tronquée, carrée et étroitement sillonnée. *Palpes*, *Labre*, et *Mandibules* ferrugineux. *Yeux* un peu allongés, arrondis, assez saillants, bruns, étroitement bordés de blanc. *Antennes* grêles, dépassant le milieu des étuis, cendrées, à 1er art. ferrugineux, 3e à 5e fortement uni-épineux à leur extrémité. *Prothorax* globuleux, chagriné, noir, avec les côtés postérieurs cendrés et la base blanche, surtout en dehors. *Ecusson* triangulaire. *Elytres* obliquement tronquées, noires, ornées d'un trait oblique qui touche à l'écusson et dépasse le milieu de l'étui, et de deux bandes blanches étroites et directes, l'une située au-delà du milieu et l'autre au sommet. *Corps* en dessous d'un noir cendré. *Sternum*, *Métasternum*, *Poitrine* ayant une tache blanche, latérale, conique, continuée en une bande postérieure. *Abdomen* offrant deux bandes de même couleur : l'une sur le 1er et l'autre sur le 2e segment; les trois derniers segments sont noirs et brillants. *Pattes* grêles, légèrement poilues; cuisses moyennes, en massue effilée, les postérieures plus longues que le corps, à genoux non bidentés.

Unique dans la collection de M. Guérin-Méneville.

Rhaphuma J. Thomson, Essai, 1860, p. 221.

Corpus elongatum, cylindricum. *Frons* elongata, angustata. *Antennæ* basi subapproximatæ, apud ♂ corpore breviores, apud ♀ adhuc breviores, simplices, art° 1° robusto, 3° cæteris

singulis longiore, reliquis subaequalibus. *Oculi* globosi, prominuli, magni. *Palpi* subaequales, apice dilatati. *Maxillarum lobus externus* conspicuus, orem transiens. *Prothorax* elongato-globosus, antice et basi paulo constrictus, lateraliter inermis. *Scutellum* subrotundatum. *Elytra* elongata, cylindrica, prothorace latiora, humeris prominulis, apice rotundato. *Sterna* mutica. *Pedes* elongati, graciles, intermedii anticis longiores et posterioribus breviores : illis valde elongatis ; *coxæ anticæ* globosæ; *acetabula antica* integra, rotundata ; *tibiæ posticæ* paulo intus curvatæ ; *tarsi postici* elongati, artº 1º cæteris conjunctim sumptis multo longiore.

36. *Rhaphuma quadricolor.*

Fusca, elytris flavis ; capite et elytrorum macula magna rotundata nigris ; corpore subtus albido ; pedibus anticis fuscis, posticis nigris.

Longº 13, Latº. 2 1/2 mill. Iles Philippines.

Clytus quadricolor. Lap. et Gory, Mon. p. 104 et 119, fig. 123.

Ad. White, Cat. Brit. Mus.

Clytus terminalis. Dejean, Cat. 3e éd. p. 357.

De la collection de l'auteur.

37. *Rhaphuma fallax.*

Coriacea, pallide miniacea, tomento brevi flavido tecta ; capite obscuro, canescente ; prothorace rubidulo, lineolis duabus basalibus, margine anteriore et posteriore, medioque infra albis ; elytris macula magna apicali nigra postice albo terminata, punctulis duobus albis in medio ; pectore albo-marginato ; abdomine brunneo, fasciolis albis.

Longº 13 1/2, Latº 2 3/4 mill. Bengale.

Allongée, chagrinée, revêtue d'une villosité cotonneuse soit jaunâtre, soit roux clair ou flave rougeâtre. *Tête* obscure, couverte d'une indumentation blanche ; sillon longitudinal étroit. *Yeux* noirs. *Antennes* un peu plus longues que la moitié du corps, d'un roux ferrugineux. *Prothorax* cylindrique, droit, rebordé et étroitement marginé de blanc sur les bords antérieur et postérieur ; deux lignes blanches étroites partent de la base sur le côté

et se prolongent jusqu'au delà du milieu ; le dessous en avant des pattes est également blanc. *Ecusson* presque carré, roux. *Elytres* plus pâles, plus larges que le prothorax, deux fois $^3/_4$ aussi longues, parallèles, tronquées obliquement ; le quart apical est noir frangé de blanc sur la limite, un petit point blanc existe au-delà du milieu vers le centre de chaque étui. *Metasternum* avec un point blanc. *Poitrine* rousse, offrant une ligne latérale et une bande postérieure blanches. *Abdomen* blanc, marqué de trois bandes brunes qui se limitent avant les côtés ; le 1er segment, qui est le plus grand, porte une grande tache arquée en arrière et renfermant une sorte de cœur blanc renversé. *Pattes* d'un roux jaunâtre, crochets noirs.

Cette jolie espèce m'a été donnée par M. W. W. Saunders.

38. *Rhaphuma placida.*

Pallide miniacea ; capite nigro ; elytris apice albo-marginatis, maculis duabus nigris, altera pone medium (guttula alba ante maculam) altera magna versus apicem : infra nigra, albo-varia.

Long^o 11 1/3 mill. Macassar.

Rhaphuma placida. Pascoe, Tr. Ent. Sc. Lond. vol. IV., p. 244. (Extr. p. 5).

39. *Rhaphuma præcana.*

Elongata, nigra, pube grisea induta ; capite cinereo, antice quadratim truncato, inter antennas angulose emarginato, sulco longitudinali ; palpis piceis ; oculis rufis ; antennis nigris, art^{is} 6-9 totis, 4^c et 9^o basi tantum, cinereo-albis ; prothorace subovali obscure cinereo, fascia ante medium obsolete nigra, ad basin extus, supra et infra albo ; scutello, in singulo elytro notula transversali infra scutellum, fasciis duabus (1^a ad suturam antice angulata, 2_a pone apicem cinereo terminata), macula postica metathoracis, pectore, duobus primis segmentis abdominalibus, albis ; pedibus gracilibus, nigro-cinereis, posticis corpore longioribus.

Long^o 11 1/2, Lat^o 2 1/2 mill. Cochinchine.

Allongée, d'un gris noirâtre. *Tête* cendrée, tronquée carrément en devant, ayant au milieu des antennes deux saillies étroites, qui sont échancrées en forme de V. *Palpes* roussâtres. *Mandibules*

noires au sommet. *Yeux* arrondis, lunulés en dessus, roux. *Antennes* filiformes, n'atteignant pas le sommet des étuis, noires; la base des 3e et 4e articles et la totalité des 6e à 9e sont d'un blanc soyeux cendré; l'extrémité du 4e art. est armée d'une petite épine. *Prothorax* ovalaire, d'un gris obscur en dessus, cendré en avant et sur les côtés, offrant en avant du milieu, une bande d'un noir obsolète; la base externe tant en dessus qu'en dessous est d'un blanc pur. *Ecusson* blanc. *Elytres* parallèles, convexes, obliquement tronquées, noires, ornées sur chaque côté d'une petite tache transverse qui est au-dessous de l'écusson et de deux bandes d'un très-beau blanc : la 1re bande est médiane, directe et remonte en angle avancé, très-étroit, sur la suture, la 2e est située près du sommet et se termine en cendré brunâtre. *Corps* en dessous cendré; bord inférieur du métathorax, *Poitrine* et les 1er et 2e segments abdominaux d'un blanc cendré. *Pattes* d'un noir cendré, grêles; les postérieures dépassant du quart de leur étendue le sommet des étuis; genoux coupés droit, inermes.

Unique dans la collection de M. Doué.

40. *Rhaphuma quinquenotata.*

Cervina; antennis, tarsis pedibusque anticis (4or posticis nigris) rufis; oculis brunneis; elytris maculis 5 nigris : 1a communi media, duabus ultra medium in singulo elytro; corpore infra albo, nigro-fasciato.

Longo 11, Lato 2 3/4 mill. Indes or.

D'un gris jaunâtre. *Tête* cendrée, allongée, plane. *Palpes*, *Antennes*, tarses et pattes antérieures testacés, les 4 pattes postérieures noires. *Yeux* d'un brun rougeâtre. *Prothorax* globuleux, un peu allongé, d'un gris verdâtre légèrement soyeux; le bord antérieur, les côtés en dessous et le bord postérieur sont blancs. *Ecusson* semi-arrondi, d'un gris obscur. *Elytres* d'un jaune fauve, ornées de cinq taches noires : 1re médiane, commune, allongée, anguleuse en avant, bifide en arrière; deux, l'une au-dessous de l'autre, au centre de chaque étui, larges et presque carrées; épaules rembrunies. *Poitrine* et *Abdomen* blanchâtres : une bande sur la première et quatre sur le second, d'un noir obsolète.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

41. *Rhaphuma sexnotata.*

Pallide lutea ; oculis fuscis , supra emarginatis ; antennis gracilibus pedibusque ferrugineis ; prothorace cylindrico ; singulo elytro recte truncato , notulis tribus fuscis : 1ª ad callum humeralem, 2ª et 3ª transversis ultra medium ; segmentis abdominalibus postice anguste nigro-fasciatis.

Longo 10, 11, Lato. 2, 2 1/3 mill. Indes or.

Svelte, ocracée. *Tête* étroite, allongée. *Palpes*, *Antennes* (grêles, dépassant les 2/3 de la longueur des élytres) et *Pattes* ferrugineux. *Yeux* bruns, oblongs, lunulés en dessus. *Prothorax* cylindrique, étroitement sillonné et rebordé en avant, d'un jaune blanchâtre sur la base. *Ecusson* semi-arrondi. *Elytres* arrondies sur l'épaule, parallèles, un tant soit peu amincies sur l'extrémité marginale, à troncature droite poilue, à angle externe aigu; chaque étui est marqué de trois petits traits étroits et bruns : 1er sur la saillie humérale, 2e et 3e transverses, au-delà du milieu et situés l'un au-dessous de l'autre. *Corps* en dessous d'un jaune pâle grisâtre ; bords inférieurs des segments abdominaux étroitement noirâtres, *Pattes* assez minces ; cuisses effilées, les postérieures dépassant les étuis ; genoux non épineux.

Deux exemplaires dans les collections de MM. de Mniszech et J. Thomson.

42. *Rhaphuma dimidiata.*

Coriacea, cinerea ; antennis gracilibus simplicis ; prothorace (limbo postico cinereo) pedibusque nigricantibus ; elytris fere usque ad medium nigris, ultra cinereis et oblique truncatis ; macula grisea media, subquadrata, versus apicem nigrum punctoque versus imum marginis, nigro.

Longo 16, Lato 3 mill. Indes or.

Finement granuleuse et cendrée. *Tête* plane, en carré long. *Palpes* et *Mandibules* noirs. *Yeux* oblongs, brunâtres, lunulés en dessus. *Antennes* grêles, simples, atteignant les 2/3 du corps, noirâtres, à reflets cendrés. *Prothorax* allongé, régulièrement arrondi vers le milieu, d'un cendré noirâtre, étroitement frangé de cendré sur la base. *Ecusson* semi-arrondi, noirâtre. *Elytres* un peu plus larges que le prothorax, subcylindriques, un tant

soit peu amincies sur le sommet de la marge, à troncature oblique, brièvement épineuses en dehors, noires depuis la base jusque vers le milieu, cendrées au-delà jusqu'à l'extrémité ; la 1re moitié offrant une tache cendrée, en carré long, placée vers le centre de l'étui et se terminant près la bordure postérieure, l'autre moitié présentant un point noir marginal. *Corps* en dessous cendré. *Métasternum*, bords postérieur et latéral de la poitrine, et des 1er, 2e et 3e segments abdominaux blanchâtres ; les deux derniers segments sont noirs.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

43. *Rhaphuma geniculata.*

Minute granulata, parce pilosa, nigra ; capite cano, antennis ferrugineis artº 1º pallido ; prothorace paululum elongato, subgloboso, pube brevissima cinerea vestito ; elytris nigris, striga circumflexa ex margine ad suturam erecta, fascia lata media apiceque griseis ; pedibus pilosis piceis, genubus tarsisque pallidioribus : corpore infra maculis 4or fasciisque duabus albis.

Longo 6, Latº 1 1/2 mill. Indes Or.

Grêle, allongée, finement granuleuse et poilue. *Tête* revêtue d'un poil gris bleuâtre qui est fin et court. *Palpes*, *Labre* et *Antennes* ferrugineux, le 1er art. des dernières pâle. *Prothorax* allongé, globuleux, faiblement rétréci sur la base, relevé et droit aux extrémités, d'un cendré bleuâtre, chagriné avec quelques longs poils vers les côtés ; le dessous en avant des pattes est blanc. *Ecusson* noir. *Elytres* arrondies sur le dedans de la suture, ayant l'angle marginal brièvement aigu, noires, ornées d'un trait blanc circonflexe qui commence près de la marge, vers le milieu, et se dirige vers le haut de la suture au-dessous de l'écusson ; une bande médiane, transversale et directe, assez large, et une apicale, presque d'égale ampleur, sont d'un gris bleuâtre. *Corps* en dessous noir. *Sternum*, *Metasternum*, une bande postérieure sur la poitrine et une sur le 1er segment abdominal, d'un blanc grisâtre. *Pattes* poilues, les postérieures plus longues que le corps, d'un noir de poix ; genoux simples et tarses d'un roux ferrugineux ; cuisses effilées, couvertes de points scabreux espacés.

Cette espèce m'a été offerte par M. W. W. Saunders.

44. Rhaphuma trimaculata.

Luteo-virescens ; antennis gracilibus nigro-cinereis, articulo ultimo tantum nigro ; elytris macula communi elongata punctoque in singulo ante apicem, nigris ; pedibus nigris cinereo-vestitis.

Long° 9, 9 1/2, Lat° 2 1/3, 3 mill. Neelgheries.

Clytus trimaculatus. Chevrol. Cat. Brit. Mus. p. 284, N° 152.

Entièrement recouvert d'une pubescence épaisse d'un jaune verdâtre. *Tête* en carré long, tronquée en devant, étroitement sillonnée, à front court et transverse. *Antennes* minces, atteignant les $^2/_3$ des élytres, noires pour le fond, recouvertes d'une poussière verdâtre, le 11e article totalement noir. *Prothorax* allongé, arrondi, droit et étroitement relevé aux extrémités. *Ecusson* moyen, semi-arrondi. *Elytres* 2 fois $^3/_4$ aussi longues que le prothorax, parallèles, régulièrement convexes sur la longueur, obliquement tronquées de la marge à la suture, avec l'angle externe aigu ; une tache noire, commune, étroite, allongée, commence au-dessous de l'écusson et s'étend jusqu'au delà du milieu ; un point uni, de même couleur, est placé vers le centre de l'étui avant le sommet et se rapproche un peu plus de la marge que de la suture. *Corps* en dessous de même couleur qu'en dessus ; un petit point noir est placé au milieu du 1er et du 2e segment abdominal. *Pattes* noires, plus ou moins recouvertes de verdâtre, les postérieures un peu plus longues que le corps.

De la collection de M. Guérin-Méneville et de celle de l'auteur. Le ♂ est bien plus étroit que la ♀.

45. Rhaphuma glauca.

Nigra ; elytris glaucis, basi nigro-maculatis.

Long° 16 1/2, Lat° 4 1/2 mill. Indes Orient.

Callidium glaucum. Fab. Entom. Syst. II, p. 336.

Fab. Syst. El. II, p. 351.

Clytus glaucus. Lap. et Gory, Mon. page 81, pl. 15, fig. 93.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 277, N° 117.

46. *Rhaphuma Wiedemanni.*

Nigra ; elytris sordide luteis, puncto humerali nigro.

Long° 13, Lat° 3 3/4 mill. Ind. Orien.

Clytus Wiedemanni. Lap. et Gory. Mon. p. 82, pl. 15 fig. 94.

Ad. White, Cat. Brit. Mus.

47. *Rhaphuma semi-scutellata.*

Elongata, rufo-testacea, thorace elongato, scutello apice albo, elytris strigis tribus albis.

Ind. Sept.

Clytus leucoscutellatus. Hope in Gray's Zool. Miscell. p. 28.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 286, N° 160.

48. *Rhaphuma dominula.*

Capite nigro, antennarum art^is^ 7 ultimis albo-sericeis ; thorace nigro, angulis anticis albo-notatis, postice lineis duabus albis, una utrinque; elytris singulis a basi ultra dimidium ferrugineis, linea angusta fulgurata alteraque angusta alba obliqua, inter nigrum et ferrugineum.

Long° 10 mill. Chine Sept.

Clytus dominula. Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 261, N° 55.

49. *Rhaphuma distinguenda.*

Capite thoraceque rubro-ferrugineis ; elytris pube ochracea dense obtectis, macula subhamata utrinque ad basin, fascia transversa post medium maculaque postica subrotundata utrinque nigro-brunneis et subvelutinis, ornatis ; antennis pedibusque ferrugineis.

Long° 14, Lat° 5 mill. Ind. Or. Pondichery, Saigon.

Clytus distinguendus. Perroud, Etud. ent. 3^e^ cahier p. 11.

De la collection de l'auteur.

50. *Rhaphuma russicollis.*

Elongata ; capite luteo-virente ; antennis (art° 1° fusco), prothorace maculaque laterali intus rotundata et limbo marginis, tibiis tarsisque russis ; elytris luteis, fasciis duabus nigris : 1^a^ ex callo humerali subtus recurva et prope scutellum ducta ; 2^a^ versus

medium ad suturam, antice valde angulata ; corpore infra luteo, fasciis nigris.

Long° 10. Lato 3 1/2 mill. Neelgheries.

Etroite, allongée. *Tête* d'un jaune terreux, sillonnée sur le front, présentant au-dessus des yeux quelques gros points agglomérés. *Palpes* testacés. *Mandibules* noires. *Yeux* d'un brun rougeâtre, lunulés en dessus. *Antennes* grêles, atteignant presque l'extrémité du corps : 1^er^ article obscur, les suivants d'un roux clair, le sommet des 3^e^ à 5^e^ muni de poils blonds. *Prothorax* allongé, cylindrique, droit, faiblement aminci etreb ordéen avant et en arrière, roux en dessus et sur les côtés, d'un jaune terreux en dessous. *Ecusson* semi-arrondi, jaunâtre. *Elytres* d'un gris jaunâtre, ornées de deux bandes et d'une tache latérale, arrondie en dedans, noires : 1^re^ annulaire, partant de la base sur le calus huméral, recourbée en dessous et terminée sur le côté de l'écusson ; 2^e^ médiane, prolongée anguleusement sur le haut de la suture ; une grande tache située vers le sommet de la marge ; celle-ci est étroitement noire et se réunit aux bandes, mais deux petites taches de la couleur du fond apparaissent, l'une sur l'extérieur de l'épaule, l'autre sur la limite externe de la 1^re^ bande. La *Poitrine* est d'un jaune terreux ; elle offre une grande tache noire, arquée en avant, et est impressionnée d'un sillon longitudinal. L'*Abdomen* est noir et marqué, sur chaque côté des segments, de taches d'un jaune terreux qui sont transverses et anguleuses. *Cuisses* grêles, noires ; jambes et tarses roux.

Unique dans la collection de M. Guérin-Ménéville.

Sclethrus, Newman, The Entomol. p. 247.

Caput prothorace paullo latius ; *oculi* maximi prominentes, rotundati, vix ad antennas emarginati ; facie spatio elevato trigono glabro, apice retrospiciente ; *Antennæ* graciles, prothorace vix longiores, 11-articulatæ : articulus 1^us^ incrassatus, paullo curvatus, 3^us^ cæteris paullo longior ; *Prothorax* capite duplo longior ac paullo angustior, fere cylindraceus, lateribus parallelus ; *Elytra* parallela, convexa, apice truncata, angulis inermibus ; *Pedes* graciles, femoribus vix incrassatis.

51. *Sclethrus amœnus.*

Caput nigrum, antennis piceis ; prothorax rugosus, niger, lineis duabus longitudinalibus capitem versus abbreviatis lanuginosis, viridi-argenteis ; elytra chalybea, dimidio basi nitido, apicali opaco, utroque bifasciato : fasciis angustis, lanuginosis, viridi-argenteis, obliquis, 1ª fere mediana, 2ª subapicali imperfecta, ambabus e margine laterali suturæ basin versus ductis.

Longº 15, Latº 3 1/2 mill. Iles Philippines.

Ibidion amœnum. Gory, Mag. de Zool. Nº 98, 1833.

Sclethrus amoenus. Newm. Loc. Cit.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 242, Nº 1.

52. *Sclethrus Newmani.*

Punctulatus, elongatus, cylindricus, ad apicem recte truncatus, partim nigro-opacus, vel nitidus aut viridescens ; antennis supra basin usque versus medium, capitis maculis duabus ponc oculos, thoracis lineis duabus antice abbreviatis, scutello, in singulo elytro puncto infra basin prope medium, fasciis duabus, linea sternali, altera laterali in pectore, azureis vel smaragdinis ; femoribus sanguineis.

Longº 18 1/2, Latº 4 mill. Ile Philippines (Maldonado).

Pointillé, d'un noir terne ou légèrement brillant avec des reflets verts par places ; dessous d'un noir d'ébène. *Tête* large, offrant une côte lisse, élargie près du bord antérieur, marquée en arrière de chaque œil d'une belle tache d'un bleu d'azur. *Yeux* saillants, arrondis, roux. *Antennes* minces, à 1er article cylindrique, 2e n'ayant au plus que le quart de la longueur du précédent, un peu renflé à son extrémité, tous deux d'un noir bleuâtre, 3e long, faiblement unisillonné, rougeâtre à sa base ; il est ainsi que les 4e et 5e d'un bleu azuré ; les suivants d'un brun terne. *Prothorax* cylindrique, marqué de deux lignes bleues qui s'étendent de la base jusqu'au delà du milieu ; la moitié antérieure du disque est chargée de petits tubercules serrés. *Ecusson* vert, petit. *Elytres* tronquées droit, cylindriques, un peu élargies vers le sommet, ornées chacune : 1º d'un point au centre de l'étui, qui est à la hauteur à peu près de l'insertion de la patte médiane ; 2e d'une bande étroite, entière, située vers le milieu ; 3º de

deux taches placées obliquement (la 1re en marge, la 2e un peu en dessus) et presque réunies entr'elles ; toutes sont d'un beau bleu nacré. *Corps en dessous* très-noir, pointillé. *Sternum* et *Poitrine*, sur chaque côté, avec une ligne d'un beau vert; cette dernière est longitudinalement sillonnée au milieu. *Pattes* noires, cuisses rouges.

Cet insecte, moins la convexité et l'ovale des élytres, rappelle assez bien la forme des *Tricondyla*.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

GRAMMOGRAPHUS (1) Nov. Gen.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX :

Corps ailé, étroit, long. *Tête* assez large, tronquée en avant, portant trois carènes directes et entières, élevée et anguleusement évasée entre les antennes. *Palpes* labiaux à derniers article conique, celui des maxillaires subcylindrique, un peu renflé et tronqué au sommet, déprimé longitudinalement sur le côté. *Mandibules* triangulaires, arquées et aigües à l'extrémité. *Yeux* oblongs, profondément lunulés sur leur milieu interne. *Antennes* de la longueur du corps, de grosseur au-dessous de la moyenne, de onze articles : 2e petit, 3e et 5e plus grands qu'aucuns, les intermédiaires allongés et un peu anguleux au sommet. *Prothorax* allongé, régulièrement arrondi vers le milieu, droit et rebordé aux extrémités, offrant une ou 2 lignes noires, élevées, et un point de même couleur, sur chaque côté, en avant. *Ecusson* semi-arrondi ou faiblement triangulaire. *Elytres* quelque peu convexes, aplanies vers le bout, à troncature oblique sur le dedans de la suture, ornées de lignes noires qui s'étendent jusqu'aux $^2/_3$. *Pattes* assez développées; cuisses effilées; les postérieures dépassant de peu les étuis; genoux simples. *Sternum* allongé, aplani, cambré sur le devant, coupé droit en arrière, allant en s'élargissant insensiblement sur les côtés antérieurs. *Hanches antérieures* globuleuses, de moyenne grosseur; leurs *cavités cotyloïdes* circulaires, anguleuses en avant sur le côté.

Ce genre a de grands points de rapprochement avec les *Arcyphorus*

(1) γραμμα, ligne; γραφειν, tracer.

qui suivent; mais ses antennes sont plus longues, un peu plus épaisses et anguleuses à l'extrémité des articles 5 à 7es.

53. *Grammographus lineatus.*

Elongatus, luteo-griseus ; corpore infra flavido ; capite lato, costis tribus æqualiter distantibus : prothorace linea longitudinali punctoque utrinque nigris, ad basin anguste albo ; elytris luteolis, singulis lineis quatuor (1a marginali, 2a humerali, 4a incipiente in sutura, obliqua et pone secundam terminata, 3a infra scutellum postice breviter recurva), maculaque flexuosa ante apicem, nigris, recte truncatis, angulo externo acuto ; antennis pedibusque ferrugineis.

Longo 16, Lato 5 1/2 mill. Ind. Or.

Etroit, long, d'un gris jaunâtre en dessus et d'un jaunâtre pâle en dessous. *Tête* tronquée, assez large, offrant trois carènes longitudinales également espacées, la médiane sillonnée en arrière. *Palpes*, *Lèvre* et *Chaperon* testacés. *Mandibules* noires. *Yeux* noirâtres. *Antennes* de la longueur du corps, ferrugineuses. *Prothorax* allongé, étroitement rétréci sur sa base, droit et légèrement bordé de blanchâtre aux extrémités, offrant une ligne longitudinale élevée mince et noire, et sur chaque côté un point noir avant le milieu ; sur le disque et à travers la pubescence de petites mouchetures noires apparaissent çà et là. *Elytres* jaunâtres, ornées chacune de quatre lignes noires et minces, dont trois atteignant les 2/3 de leur longueur, et d'une tache en chevron qui est située peu après : 1re ligne sur la marge ; 2e partant de l'épaule ; 3e se détachant de la suture, au tiers antérieur, oblique, un peu élargie, recourbée à son sommet et rapprochée de la seconde ; 4e naissant au-dessous de l'écusson, dessinant avec sa semblable une sorte de V renversé. *Pattes* ferrugineuses ; cuisses en massue effilée, postérieures dépassant les étuis ; genoux postérieurs munis de deux dents courtes et égales.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

54. Grammographus Horsfieldii.

Gracilis, luteus ; antennis pedibusque rufis ; thoracis dorso arcubus duobus et punctis duobus lateralibus nigris ; elytris singulis basi lineis duabus parallelis, ad medium elytri ductis et conjunctis; fascia et puncto subapicali nigris, apice oblique pilis aureis brevibus sericeis tecto.

Long° 12, 14, lat. 2, 3 1/2 mill. Java.

Clytus Horsfieldii. Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 284, N. 155.

Des collections de MM. Mniszech, J. Thomson et de celle de l'auteur.

ARCYPHORUS (1). Gen. nov.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX ;

Corps ailé, étroit, allongé. *Tête* large, tronquée et inclinée vers le bas, un peu plus longue, marquée de trois carènes longitudinales, élevée et angulairement évasée entre les antennes. *Palpes* à dernier article subtriangulaire ou plutôt conique, tronqué à son sommet. *Mandibules* triangulaires, tranchantes sur les arêtes, arquées à l'extrémité. *Lèvre* et *chaperon* étroits, transverses. *Yeux* ovalaires, lunulés en dessus. *Antennes* assez minces, dépassant le milieu des étuis, de onze articles: 3 à 7 munis sur l'une des extrémités d'un long poil mince, le 3e est le plus grand et les deux derniers sont de moitié plus courts que les deux qui les précèdent. *Prothorax* allongé, modérément arrondi et convexe au milieu, droit et rebordé aux extrémités, offrant une réticulation très-apparente en avant et sur les côtés. *Écusson* petit, court, semi-arrondi. *Élytres* parallèles, subcylindriques, aplanies au sommet, avec la troncature oblique sur le dedans. *Pattes* allongées ; cuisses effilées, postérieures dépassant de peu les étuis ; genoux non bidentés. *Abdomen* de cinq segments : 1er et 2e grands. *Sternum* étroit, aplani, arqué en avant, aminci en arrière et coupé droit. *Hanches antérieures* globuleuses, déprimées en-dessus. *Cavités cotyloides* circulaires, anguleuses en dehors.

Ce genre est intermédiaire entre les *Grammographus* et les *Chlorophorus*, mais ses antennes sont moins longues que chez les premiers et un peu plus étendues que chez les seconds ; de plus son prothorax offre une réticulation toute particulière.

(1) ἀρχυς, réseau, φερω, je porte.

55. *Arcyphorus histrio.*

Elongatus, cinereus; capite lato, carinis tribus anticis aequaliter remotis; prothorace reticulato, oblongo, antice posticeque constricto, tenuiter reflexo, margine basali albo, maculis tribus nigris oblongis; singulo elytro subluteo, oblique truncato, angulo externo acuto, lineis duabus usque ad tertiam partem anticam projectis (1ª marginali ampla, 2ª subquadrata) postice transversim fasciatis, macula angulata oblique prolongata prope suturam et fascia extus oblique protensa usque ad angulum marginalem, nigris; antennis gracilibus, articulis 3-7 ad apicem piloso-spinosis.

Longº 12, Latº 3 mill. Java.

Cendré. *Tête* large, tronquée, présentant trois carènes également distantes. *Palpes* et bords du *chaperon* testacés. *Yeux* ronds, rectangulairement échancrés en dessus. *Antennes* assez grêles, atteignant les $^2/_3$ des étuis, cendrées, munies au sommet des 3ᵉ à 7ᵉ articles d'un long poil presqu'épineux. *Prothorax* allongé, régulièrement arrondi, coupé droit, étroitement rebordé en avant, blanchâtre et sillonné sur la base, couvert d'un réseau plus marqué antérieurement, offrant trois taches postérieures noires: la médiane étroite, oblongue, portant au centre un trait longitudinal cendré, les latérales obliques, presque coniques. *Écusson* noir, bordé de cendré. *Élytres* d'un gris verdâtre, allongées, parallèles, très-nettement et obliquement coupées de la marge sur la suture, avec l'angle externe aigu, ornées de deux lignes noires formant une bande transverse en arrière: la 1ʳᵉ est large, occupe tout le dehors de l'épaule et présente une petite ligne grise en marge; la 2ᵉ commence au-dessous de la base, côté de l'écusson, et forme un carré long; une grande tache conique s'appuie en marge et s'avance anguleusement près de la suture en s'obliquant en arrière; une bande entière, située vers le tiers postérieur et légèrement évasée en dessous, jusqu'au centre de l'étui, se prolonge en arrière jusqu'à l'angle marginal; les lignes, la tache, la bande, ainsi que la marge sont noires. *Corps* en dessous d'un gris de perle, blanchâtre sur les côtés, avec des bandes d'un noir obsolète sur l'abdomen. *Pattes* assez longues; cuisses effilées, les postérieures dépassant à peine les étuis; genoux non bidentés.

De la collection de M. J. Thomson et de celle de l'auteur.

56. *Arcyphorus semiclathratus.*

Elongatus, supra luteo-virescens, infra luteo-pallidus, addomine medio obsolete nigro-maculato; antennis cinereis, gracilibus, ad apicem articulorum 3-5 longe uni-pilosis; prothorace elongato, reticulato, maculis tribus nigris, media oblonga intus linea lutea signata; scutello ad basin nigro; singulo elytro recte truncato, margine tenui, lineis duabus anticis postice fasciatim terminatis (1ª humerali, 2ª infra scutellum incipiente et intus rectangula), fasciis duabus pone suturam abbreviatis:(1ª media, lata,intus recte biangulata, 2ª rotunde terminata) maculaque discoidea ad imum marginis, nigris.

Longº 14, Latº 9 1/3 mill. Philippines.

Allongé, d'un beau jaune verdâtre en dessus, d'un jaune pâle en dessous,avec des taches noires peu apparentes sur le milieu de l'abdomen. *Tête* tronquée, large et carrée en avant, offrant trois faibles carènes et un sillon entre les yeux. *Palpes* testacés. *Mandibules* noires au sommet. *Yeux* bruns, lunulés en dessus. *Antennes* dépassant le milieu des étuis, grêles, d'un ferrugineux cendré; 3º à 5ᵉ articles terminés par un long poil. *Prothorax* allongé,élargi et arrondi au milieu, coupé droit et un peu plus clairement coloré aux extrémités, couvert d'un réseau et marqué de trois taches noires: la dorsale oblongue, offrant une ligne longitudinale étroite et jaune au centre, les latérales transverses,ovalaires.*Écusson* noir,à demi-jaune en arrière. *Élytres* longues, parallèles, convexes, un peu aplanies au sommet, à troncature droite, ayant la marge étroitement noire, ainsi que les parties suivantes: 2 lignes qui occupent environ le tiers antérieur, terminées en une bande (1ʳᵉ ligne sur la bordure humérale, élargie obliquement en dessous; 2ᵉ au-dessous et en dehors de l'écusson et formant à son sommet interne un rectangle), deux bandes non entières (1ʳᵉ médiane, large, coupée droit à l'extrémité et élargie des deux côtés, 2ᵉ arrondie et se rapprochant de la suture) et une tache également arrondie, placée près du sommet de la marge. *Pattes* d'un cendré obscur; jambes quelque peu ferrugineuses; cuisses antérieures assez fortes, postérieures effilées, un peu plus courtes que les élytres; genoux non bidentés.

Cette espèce, par les taches du prothorax et les lignes des élytres, se rapproche de l'A. *histrio*.

Unique dans la collection de M. le comte Mniszech.

CHLOROPHORUS (1). Gen. nov.

Genre proposé pour le *Clytus annularis* Fab., et qui ne diffère des *Anthoboscus* qu'en ce que les antennes sont plus grêles et le prothorax très-arrondi.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX :

Corps ailé, allongé, convexe, d'un beau jaune doré. *Tête* un peu plus longue que large, inclinée vers le bas, élevée sur la base même des antennes et formant en dessus une échancrure anguleuse, sillonnée au milieu, présentant sur chaque côté de la face une soudure latérale en forme de carène, appuyée au bord interne de chaque œil. *Palpes* labiaux de 3 articles : 1er subtriangulaire, coudé à sa base, 2e pas plus large que haut, 3e renflé, plus grand, subconique. *Lèvre* en carré transverse. *Chaperon* large, cintré sur le dedans. *Mandibules* triangulaires, arquées et aigües au sommet. *Yeux* oblongs, profondément lunulés au-dessus du milieu interne. *Antennes* grêles, de onze articles, n'atteignant que le milieu des élytres: 2e article plus grand que le 1er et que les 3e et 4e. *Prothorax* brièvement arrondi, aminci, coupé droit et étroitement rebordé aux extrémités. *Écusson* grand, semi-arrondi. *Élytres* longitudinalement convexes, terminées par une épine marginale. *Pattes* de moyenne longueur; cuisses effilées, un peu courbées à leur naissance, les postérieures limitées au sommet des étuis, à peine bidentées sur les genoux. *Sternum* étroit, allongé, tronqué en arrière. *Hanches antérieures* globuleuses, déprimées en dessus ; *cavités cotyloides* circulaires, anguleuses en dehors.

57. *Chlorophorus annularis*.

Luteus; thoracis macula media elongata, bifida punctoque utrinque, elytrorum linea baseos circulari, fascia media maculaque postica rotundata, nigris.

Longo 11, 15. Lato 2 1/2, 3 1/2 mill. Asie méridionale.

Callidium annulare. Fab. Ent. syst. II, 337. Oliv. Ent. p. 48, pl. 6, t. 74.

(1) χλωρος, jaune ; φερω, je porte.

Clytus annularis. Fab. Syst. El. II, p. 352. Lap. et Gory, Mon. p. 102, pl. 19, f. 121.

De la collection de l'auteur. Cette espèce, d'après M. le docteur Boisduval, aurait un *habitat* très-étendu : elle se trouverait à la fois au port Jakson, à la Nouvelle-Guinée, au Bengale et à l'île de Java.

58. *Chlorophorus bidens.*

Flavus, thorace rotundato, lineis tribus, elytris bidendatis, lineis flexuosis maculaque apicis, nigris.

Longo 10, 15. Lat. 2 1/2, 4 mill. Sumatra, Philipp (Afrique centrale).

Callidium bidens. Fab. Ent. syst. II, p. 337.
Clytus id. Fab.Syst. El. II, p. 351.
Callidium id. Weber,Observ. p. 90.
Clytus protogener. Newm. The Entom. p. 246.
A. White, Cat. Brit. Mus. p. 284. N. 150.

De la collection de l'auteur.

59. *Chlorophorus cognatus.*

Affinis *Chl. annulari*, luteus; prothorace macula elongata postice ampliata, medio postice emarginata punctoque utrinque notato; singulo elytro maculis 4^or^ (duabus primis virguliformibus; 1^a^ inversa in limbo humerali, 2^a^ parallela suturæ adnexa infra basin, 3^a^ suboblonga præcedenti juncta ad apicem, 4^a^ rotundata, obliqua, margini adnexa), fascia post medium antice longe angulata in sutura, limboque laterali, nigris; corpore infra luteo-viridi, singulo segmento abdominali macula triangulari nigra signato, ultimo toto nigro; antennis pedibusque nigris, luteo-indutis.

Longo 15. Lato. 4 mill. Sylhet.

Voisin, mais bien distinct du *Chl. annularis* Fab.; d'un jaune-soufre. *Tête* étroite, allongée, sillonnée longitudinalement au milieu. *Palpes* d'un testacé rougeâtre. *Yeux* bruns, échancrés au sommet interne. *Antennes* n'atteignant tout au plus que la moitié des étuis, noirâtres sur les trois premiers articles, les suivants recouverts de cendré avec l'extrémité du 4^e^ et du 5^e^ noire; sommet des 5^e^ à 7^e^ muni d'un long poil. *Prothorax* allongé, ovalaire, coupé

droit, faiblement sillonné et rebordé en avant et en arrière, présentant sur le disque une tache noire allongée qui part du dessous du bord antérieur, s'élargit et s'arrondit un peu au-delà du milieu et est presqu'anguleusement échancrée au bout sur le dedans ; un point arrondi sur chaque côté en avant. *Écusson* semi-arrondi, noir au centre, jaune sur les bords. *Élytres* 2 fois $^1/_2$ aussi longues que le prothorax, coupées obliquement sur le dedans de la suture avec l'angle marginal épineux; chaque étui offre quatre taches : trois antérieures , une postérieure arrondie, une bande anguleuse sur le haut de la suture, qui sont noires ; il en est de même des épipleures et de la marge;(la 1re tache est placée sur le dehors de l'épaule et simule une virgule renversée; la 2e est un peu plus allongée et représente également une virgule dans le même sens , elle est située au-dessus de la base, avoisine l'écusson, suit la suture et se lie par son extrémité à la 3e,qui forme un carré un tant soit peu oblong).*Corps* en dessous d'un jaune verdâtre. *Poitrine* marquée d'un point noir sur chaque côté en avant. *Abdomen* ayant au milieu de chacun des segments une grande tache triangulaire noire qui s'étend d'un bord à l'autre; le dernier est totalement noir.

Cette espèce m'a été donnée par feu Doubleday, de mémoire si regrettable.

60. *Chlorophorus agnatus*.

Simillimus *Chl. annulari* Fab.,luteus;prothorace macula elongata subconica,postice intus fissa punctoque utrinque nigris notato; singulo elytro vitta subquadrata ad basin postice extus aperta , fascia transversa ad suturam angulata,extus ampliata,maculaque marginali obtrigona ante apicem , nigris; corpore infra immaculato; antennis pedibusque nigricantibus, pube griseo-lutea vestitis.

Longo 11. Lato 2 mill. Neelgheries.

Très-voisin du*Chl.annularis* Fab.,d'un jaune soufre.*Tête* étroite, allongée, noire en dessous. *Chaperon* et *mandibules* noirs. *Yeux* bruns, échancrés au sommet interne. *Antennes* minces, des $^2/_3$ de la longueur des élytres, à fond noirâtre, revêtues d'une pubescence cendrée; sommet des 3e à 7e articles muni d'un poil raide. *Prothorax* oblong, droit et étroitement rebordé aux extrémités , offrant sur le disque une tache noire allongée , de forme conique , qui , inté-

rieurement, est fendue par le bas ; de chaque côté en avant se voit un point noir. *Écusson* semi-arrondi, d'un jaune plus pâle. *Élytres* tronquées droit à l'extrémité, ornées sur le dedans du calus huméral d'un dessin en carré long, dont le trait antérieur est mince et la partie postérieure externe ouverte ; une bande médiane, légèrement arquée en dessous, remonte faiblement en angle sur la suture et s'élargit un peu en marge, enfin une tache presque triangulaire s'appuie en marge et atteint son sommet. *Corps* en dessous d'un jaune verdâtre, le dernier segment abdominal est seul noir. *Pattes* noires pour le fond, à pubescence d'un jaune verdâtre ; cuisses médianes un peu plus épaisses, les postérieures dépassant les étuis ; genoux peu échancrés et à peine distinctement bidentés.

Unique dans la collection de M. Guérin-Méneville.

61. *Chlorophorus nepos.*

Similis *Chl.cognato* nob.,luteus ; prothorace macula elongata postice ampliata, utrinque recurva et intus fissa, punctisque duobus notato ; singulo elytro maculis sex, fasciaque media extus abbreviata antice ad suturam angulata, nigris ; segmentis abdominalibus obsolete nigro - fasciatis, antennis pedibusque nigris, cinereo-indutis.

Long° 10. Lat° 3 1/2 mill. Asie mér. (Inde anglaise).

Très-voisin de notre *Chl. cognatus;* d'un beau jaune. *Tête* allongée, sillonnée au sommet. *Palpes* d'un testacé obscur. *Yeux* bruns. *Antennes* cendrées, légèrement pubescentes. *Prothorax* allongé, arrondi, coupé droit et étroitement rebordé aux extrémités, marqué sur la région dorsale d'une tache noire longue, élargie au sommet, recourbée sur chaque extrémité et fendue en dedans ; de plus un point latéral de même couleur. *Écusson* jaune, noir sur la base. *Élytres* obliquement tronquées, avec l'angle externe aigu; la marge offrant un filet d'un noir-brun qui ne commence qu'au-dessous de l'épaule; chaque étui est orné de six taches et d'une bande médiane (qui est interrompue en marge et dont le fragment forme la 4ᵉtache) remontant anguleusement sur la suture; toutes sont noires: 1ʳᵉ tache placée sur le contour de l'épaule; 2ᵉ un peu plus longue,vers le milieu de la base ; 3ᵉ ponctiforme, au-dessous et liée avec la pré-

cédente; 4e marginale, à peine séparée de la bande 5e, 6e en regard l'une de l'autre et située avant le sommet. *Corps* en dessous d'un jaune pâle. *Abdomen* traversé de bandes noires obsolètes, avec le dernier segment totalement noir. *Pattes* noires, revêtues de cendré.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

Ces trois dernières espèces ont entre elles la plus grande ressemblance; néanmoins la tache dorsale du prothorax et celle qui est au-dessous de la base de chaque élytre affectent chez toutes une forme particulière, et le *Chl. nepos* a, de plus, deux taches posticales, tandis qu'il n'en existe qu'une seule au sommet de la marge chez les *Chl. agnatus* et *cognatus*.

62. *Anthoboscus* (1) *ornatus*.

Luteo-virescens; thoracis fascia, elytrorum linea baseos circulari fasciisque duabus posticis, nigris.

Longo 8. 9 Lato 2, 3 mill. Asie mineure. Tarsous. Ile de Crète. Europe australe. Afrique (Egypte).

Callidium ornatum. Fab. Ent. syst. 2, 336, No 77.

Clytus ornatus. Lap. et Gory. Mon. p. 86, pl. 14, f. 88.

Clytus verbasci. Laich. Tyr. Ins. tom. 2, p. 105, N. 6.

Stenocorus, C. duplex. Scop. Del. flor. et Ins. tom. 2, pag. 46, pl. 20, f. 5.

63. *Anthoboscus Douei*.

Affinis *A. ornato* Fab., pube grisea dense indutus; prothorace fascia obsoleta ante medium elytrisque fasciis tribus nigris (1a basali, arcuata, extus aperta); pedibus nigro-cinereis; metathorace, pectoris linea laterali angusta, primis duobus segmentis abdominalibus, albidis.

Longo 9, Lato 2 mill. Cochinchine.

Voisin du *Clyt. ornatus* Fab., d'un gris cendré bleuâtre. *Tête* étroite, allongée, amincie en avant. *Yeux* échancrés et déprimés en dessus

(1) Chevrolat, Ann. de la Soc. Ent. 1860, p. 455.

noirs. *Antennes* atteignant le milieu des étuis, minces, filiformes, un peu amincies au sommet. *Prothorax* globuleux, un peu allongé, marqué vers le milieu d'une bande d'un noir obsolète, qui est élargie sur le centre. *Écusson* blanchâtre. *Élytres* à troncature droite, ornées de trois bandes noires : 1re annulaire, basale, ouverte en dessous sur le côté; 2e médiane, large, faiblement anguleuse sur son bord supérieur près de la marge; 3e située entre le sommet et la précédente, toutes deux droites. *Corps* en-dessous cendré. Bord inférieur du métathorax, bord latéral de la poitrine et la presque totalité des deux premiers segments abdominaux, blancs. Genoux des pattes postérieures inermes, limités au sommet des étuis.

Unique dans la collection de M. Doüé.

Je dédie cette espèce à M. Doüé comme souvenir de nos bonnes et anciennes relations entomologiques, et aussi comme remerciement pour le plaisir que ses vers spirituels nous procurent chaque année.

64. *Anthoboscus 14-maculatus.*

Obscure cinereus, vel luteo-virescens; prothorace punctis quatuor dorsalibus nigris, fere transversim positis, elytrisque maculis decem nigris (2, 4, 2, 2) plus minusve parvis vel ampliatis, 4or ultimis transversis.

Longo 8, 9, Lato 3-3 1/2 mill. Neelgheries.

D'un cendré plus ou moins obscur ou d'un jaune verdâtre. *Tête* à peine plus longue que large, sillonnée sur le front. *Yeux* d'un brun noirâtre. *Antennes* noires sur les 4 premiers articles, cendrées sur les suivants. *Prothorax* un peu plus long que large, globuleux, droit, étroitement resserré, sillonné et relevé aux extrémités, marqué de quatre points noirs placés vers le milieu presqu'en ligne transverse; les deux du centre sont un peu plus en arrière, rapprochés et allongés; sur le milieu et de chaque côté sont trois séries de petits points noirs ruguleux sur leurs bords. *Écusson* semi-arrondi. *Élytres* offrant chacune cinq taches dont quatre sont transverses et une marginale très-petite : 1re sur l'épaule; 2e et 3e en regard l'une de l'autre au-dessous (ces trois taches sont quelquefois presque réunies entre elles); 4e au-delà, en forme de bande, raccourcie du côté de la

suture ; 5e avant le sommet, oblique, appuyée à la marge et prolongée, comme la précédente, jusque près de la suture ; troncature oblique du dehors sur le dedans, angle externe aigu. *Corps* en dessous blanchâtre, n'ayant de noir que le dehors de la hanche postérieure. *Pattes* cendrées, à fond noir ; genoux peu distinctement bidentés.

De la collection de M. Guérin-Méneville et de la mienne.

Cette espèce varie beaucoup tant pour la couleur que par le rétrécissement de l'étendue des taches qui ornent les élytres.

65. *Anthoboscus Faldermanni.*

Niger, densissime cinereo-pubescens ; antennis pedibusque cinereo-ferrugineis ; thorace elongato, maculis 4or nigris, centralibus fere conjunctis ; elytris lunula humerali fasciisque duabus latis nigro-fuscis, media interrupta.

Longo. 6, 13, Lato 2, 4 mill. Asie occ. Perse mérid.

Clytus Faldermanni. Dej. Cat. éd. 3, p. 557.
Fald. Faun. transc. tome 3, p. 269, N. 485, t. 8, f. 3.
Id. Nouv. mém. de la Soc. de Mosc. tom. V, p. 269, N. 485, t. 8, f. 3.

Clytus verbasci Fald. olim.

De la collection de l'auteur.

66. *Anthoboscus marginalis.*

Elongatus, supra luteo-viridescens, infra griseo-virescente-sericeus, antennis ad basin nigricantibus, apice cinereis ; prothorace oblongo, macula magna dorsali rotundata nigra, lateribus extensa ; scutello puncto basali nigro ; elytris ad marginem nigro-limbatis, tridentatis fasciaque lata subapicali, nigra.

Longo 12, Lato 3 mill. Batchian.

Allongé, d'un jaune verdâtre en-dessus et d'un gris verdâtre soyeux en dessous. *Tête* étroite, longue, sillonnée au sommet. *Palpes* testacés, *mandibules* noires. *Yeux* d'un brun rougeâtre. *Antennes* assez minces, d'égale grosseur, simples, atteignant le milieu

des élytres, noirâtres et un peu cendrées sur les 5 premiers articles, d'un cendré blanchâtre au-delà. *Prothorax* allongé, arrondi latéralement vers le milieu, présentant en dessus une grosse tache noire, ronde, réunie de chaque côté à une autre moins forte. *Ecusson* jaune, marqué d'un point noir. *Elytres* à troncature presque droite, cependant un peu arrondie au milieu, munies d'une petite dent aux angles, à marge noire offrant trois taches anguleuses d'égale longueur, distance et forme, qui s'avancent jusqu'au-delà de l'étui: la 1re et la 2e représentent sur la gauche une sorte de C; à sa base postérieure se détache une large bande noire qui est située avant le sommet. *Corps* en dessous ayant un trait sur le *metasternum* et une ligne latérale sur la poitrine, qui sont d'un jaune soufre. *Pattes* d'un gris verdâtre; les quatre cuisses antérieures sont assez fortes et les postérieures, effilées, ne dépassent pas les élytres; jambes postérieures minces, faiblement arquées.

Unique dans la collection de M. le comte Mniszech.

67. *Anthoboscus macausnensis.*

Cinereus; prothorace globoso punctis 4or nigris, duabus dorsalibus conjunctis; elytris annulo basali fasciisque duabus nigris: 1a media antice valde angulata, 2a recta; geniculis posticis bidentatis; abdomine dimidia parte antica albida, postica nigra.

Longo 9 1/2, 13, Lat. 3, 3 1/2 mill. Asie orient., Macao, Hong-Kong.

Clytus macausnensis. Chevrolat, Rev. zool Cuv. 1845, p. 98.
A. White, Cat. Brit. Mus. p. 283, N. 146.

Du cabinet de l'auteur.

68. *Anthoboscus austerus.*

Cinereus; antennis nigro-cinereis; prothorace elongato, subgloboso, punctis tribus nigris, centrali magno; scutello niveo; elytris sinuose et subrecte truncatis, angulo externo breviter spinoso, nigris, singulis maculis quatuor cinereis: 1a infra basin, transversa, subconica, 2a obliqua ad apicem rotundata, ad suturam usque pone scutellum protensa, 3a extus abbreviata sed lata, 4a apicali; linea laterali pectoris fasciisque quatuor abdominis albidis.

Longr 14, Lat. 3. Océanie (Nouvelle Guinée).

Cendré. *Tête* avancée en bas, cendrée, d'un noir brillant en

dessous sur la gorge, offrant entre les antennes une étroite élévation qui est anguleusement échancrée au sommet. *Yeux* roux, lunulés en dessus. *Antennes* rapprochées à leur naissance, cendrées, mais leur moitié antérieure, vue à un certain jour, paraît noire et les 6e et 7e articles ont une tache de cette couleur. *Prothorax* subovalaire, droit aux extrémités, ayant le bord antérieur étroitement sillonné et rebordé et le postérieur aplani, cendré, marqué de trois points noirs : celui du centre est trois fois aussi grand que les latéraux. *Écusson* large, semi-arrondi, blanc. *Élytres* à troncature presque droite, néanmoins un tant soit peu sinueuse, à angle externe aigu, noires, ornées chacune de quatre taches d'un cendré bleuâtre : 1re au-dessous de la base, transverse, conique, ayant sa pointe dirigée en dedans; 2e arrondie à son extrémité, oblique, remontant sur la suture jusqu'en dessous de l'écusson; la pointe de la tache supérieure est presque réunie à cette dernière; 3e au-delà du milieu, assez large, en forme de bande raccourcie et obliquement coupée près de la marge; 4e placée sur le sommet de la suture, s'obliquant sur le sommet de la marge. *Corps* en dessous cendré, avec une ligne latérale sur la poitrine et quatre bandes sur l'abdomen, blanches. *Pattes* d'un cendré noirâtre.

Unique dans la collection de M. le comte Mniszech.

Cette espèce doit être placée dans le voisinage de l'*A. macaussnensis*.

69. *Anthoboscus japonicus*.

Affinis certe *Ant. plebejo* F. sed major; modice elongatus, griseo-soricinus; capite limbo antico fasciaque postica nigris; prothorace pube densa grisea tecto, punctis quatuor nigris : lateralibus minutis obsoletis, duabus mediis rotundatis approximatis; elytris nigris, linea baseos suturali arcuata, puncto humerali fasciisque duabus cinereis, angulo externo spinoso; metathoracis macula, linea laterali in pectore limboque postico segmentorum abdominalium, albidis.

Longo 15. Lato 5 mill. Ind. or., Japon.

Assez semblable à l'*Anth. plebejus F.* mais plus grand, modérément allongé, d'un gris de souris. *Tête* longue, amincie en avant, étroitement sillonnée, ayant ses bords antérieurs et un ban-

deau noirs, placé au sommet postérieur. *Palpes* et bord interne des *mandibules* noirs. *Yeux* arrondis en dessous, lunulés au sommet interne, d'un brun noirâtre. *Antennes* cendrées, amincies à l'extrémité et n'atteignant que le tiers antérieur des étuis. *Prothorax* subovalaire, droit, étroitement rebordé et un peu atténué aux extrémités, avec une légère frange noire en avant et une blanchâtre en arrière, marqué de quatre points noirs, latéraux, petits, peu apparents: les dorsaux grands, n'étant séparés que par une faible ligne longitudinale. *Écusson* grand, semi-arrondi, obscur à sa base. *Élytres* noires, ornées de trois bandes et d'un point huméral cendrés: la 1re part d'une impression qui se trouve au dedans de l'épaule, suit la base, l'écusson, la suture, se recourbe régulièrement en dessous et à son sommet, décrit un petit trait direct en marge; 2e au-delà du milieu, un peu élargie sur la suture; 3e terminale; le point huméral est divisé par un pli; angle externe longuement épineux. *Corps* en dessous d'un cendré assez uniforme. *Métasternum* avec un trait oblique, *Poitrine* avec une ligne latérale et le bord postérieur des segments abdominaux blanchâtres.

Unique dans la collection de l'auteur.

70. *Anthoboscus plebejus.*

Niger, elytrorum linea baseos suturali arcuata, puncto humerali, fascia postica apiceque, albis.

Longo 14, Lato 5 mill. Lenkoran.

Callidium plebejum. Fab. Ent. syst. t. II, p. 334, No 67.

Clytus plebejus. Lap. et Gory. Mon. p. 99, pl. 19, f. 119.

Clytus funebris. Laich. Tyrol. Ins. tom. 2, p. 111, No 8.

Leptura rustica. Razoum. Hist. nouv. tom. I, p. 155, No 60.

Cerambyx figuratus. Scop. Ent. Carn. p. 55, No 176.

Leptura Lambda. Schranck. Beytr. p. 67, N. 13, pl. 3 f. 13.

Cerambyx arietis. Voët. Col. ed. 1, tom. 2, p. 56, N. 94, pl. 19, f. 94.

71. *Anthoboscus melancholicus.*

Affinis *Cl. plebejo F.*; elongatus, niger; capite thoraceque (fascia lata nigra) cinereis; scutello luteo; elytris truncatis, puncto humerali fasciisque tribus cinereis: duabus primis antice ad suturam angu-

latis, 3ª lata, apicali; pectore maculis tribus lateralibus abdomineque fasciis duabus albis; pygidio cinereo.

Longº 11, Latº 3 mill. Asie mér., Ceylan.

Voisin de l'*Ant. plebejus* Fab. ; noir. *Tête* allongée, cendrée, sillonnée sur le front. *Palpes* noirs. *Yeux* bruns, lunulés en dessus. *Antennes* pubescentes, noires et cendrées, atteignant le milieu des étuis. *Prothorax* allongé, globuleux, cendré tant en dessus qu'en dessous, offrant sur le disque une large bande noire qui semble être formée par la réunion de trois taches arrondies et dont la médiane serait la plus grande. *Écusson* arrondi, jaune. *Élytres* parallèles, longitudinalement convexes, tronquées droit au sommet, ornées d'une tache allongée, arrondie, située sur l'épaule, et de trois bandes cendrées: 1re transverse, anguleuse jusqu'au-dessous de l'écusson ; 2e large, située au-delà du milieu, un tant soit peu anguleuse en dessus sur la suture ; 3e apicale, presqu'aussi large que la précédente. *Poitrine* présentant trois taches latérales et abdomen avec deux bandes d'un jaune tendre. *Pygidium* cendré. *Pattes* noires, recouvertes de cendré.

J'ai reçu cette espèce de M. le capitaine Parry.

72. *Anthoboscus moestus.*

Niger; capite prothoraceque in dimidia parte postica, cinereis; scutello albo; singulo elytro puncto humerali, altero communi infra scutellum fasciisque tribus cinereis: fascia 1ª intus abbreviata; prothorace infra maculis tribus anticis fasciaque lata postica, pectore abdomineque maculis quatuor transversis, niveis ; antennis basi nigris, ad apicem sericeo-albidis; femoribus ferrugineis, tibiis tarsisque nigris.

Longº 9, Lat. 3 1/2 mill. Asie mér., Pondichéry.

Clytus luctuosus. Dej. Cat. 3e éd. p. 357.

Cette espèce ressemble assez à l'*A. melancholicus*, mais elle est plus courte, relativement plus large et ses dessins sont autres. *Tête* d'un cendré bleuâtre, finement sillonnée en avant. Parties de la *bouche* ferrugineuses. *Mandibules* noires au sommet. *Yeux* lunulés en dessus, d'un brun rougeâtre. *Antennes* minces, atteignant presque le milieu des étuis, noires, recouvertes de cendré sur les 4 premiers

articles, d'un gris soyeux sur les suivants. *Prothorax* un peu plus long que large, globuleux, droit, étroitement sillonné et relevé aux extrémités, noir sur la moitié antérieure et cendré sur la postérieure, couvert en dessus de tubercules granuleux très-serrés ; le dessous offrant en avant des pattes une grande tache blanche en forme de cœur; une plus petite est placée en dehors de la hanche. *Écusson* semi-arrondi, blanc. *Élytres* noires, ornées chacune d'un point huméral, d'un point commun et allongé au dessous de l'écusson, et de trois bandes d'un cendré blanchâtre : 1re partant de la marge, placée un peu en avant du milieu, un peu oblique et arquée, limitée au tiers interne; 2e un peu au-delà, élargie en dessus sur la suture; 3e apicale, plus large que la précédente ; troncature oblique, sinueuse, un peu échancrée et à peine épineuse en dehors. *Sternum*, *Metasternum*, *Poitrine* offrant sur chaque côté une large tache latérale carrée et, en arrière, une bande étroite d'un beau blanc. *Abdomen* présentant sur le 1er et le 2e segmens une tache latérale transverse, blanche. *Cuisses* ferrugineuses; jambes frangées de poils et tarses noirs.

J'ai dû changer le nom que lui avait donné Dejean, feu Ménétriés s'en étant servi pour désigner une autre espèce.

73. *Anthoboscus gracilipes.*

Ater ; thorace elongato, gibbo, immaculato ; elytris puncto elongato humerali, litura arcuata scutellum haud attingente, fascia media apiceque albido-cinereis ; pedibus gracilibus, geniculis posticis bidentatis.

Longo 9, Lato 3 mill. Asie bor., Montagnes de l'Altai.

Clytus gracilipes. Fald. Mém. Ac. St. Pétersb. II, p. 100.

Gebl. Bull. Mosc. 1848, p. 395.

De la collection de l'auteur.

74. *Anthoboscus lituratus.*

Cinereus ; thorace macula transversa nigra ; scutello albo ; elytris nigris, linea baseos infra scutellum flexa fasciisque tribus (duabus ad suturam angulatis), cinereis.

Longo 14, Lato 2 1/2 mill. Asie Min., Indes anglaises.

Clytus lituratus. Lap. et Gory, Mon. p. 77, pl. 144, fig. 89.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 276, N° 113.

75. *Anthoboscus sumatrensis.*

Niger, viridi-pubescens; prothorace cinereo, fascia media nigra; scutello, elytris lineis duabus obliquis prope basin fasciaque postica, luteis.

Long° 10, Lat° 3 1/2 mill. Asie min., Java, Sumatra.

Clytus sumatrensis. Lap. et Gory, Mon. p. 96, pl. 18, fig. 114.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 280, N° 136.

De la collection de l'auteur.

76. *Anthoboscus latefasciatus.*

Nigrescens; prothorace globoso, cylindrico; elytris spinosis, puncto lunulaque humeralibus, fascia media lata apicalique, cinereo-albis.

Long° 11, Lat° 4 1/2 mill. Asie min., Caucase.

Clytus latefasciatus. Fischer, Bull. de Mosc. tome 4, pl. 6, fig. 8,

77. *Anthoboscus perspicillum.*

Fusco-castaneus; prothorace globoso, impresso, brunneo-pubescente; antennis, femorum basi tibiisque rufo-ferrugineis; scutello, elytrorum macula humerali fasciisque tribus, flavo-villosis.

Asie min., Caucase, Lenkoran.

Clytus perspicillum. Fisch. Bull. Mosc. t. IV, p. 413, pl. 6, fig. 7, 1813.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 274, N° 105.

Clytus comptus. (Ziegl.) Manh. in Hummel, Ess. fasc. 4, p. 36, 20.

Clytus pubicollis. Lap. et Gory, Mon. p. 73. pl. 14, fig. 85, 1841.

De la collection de l'auteur.

78. *Anthoboscus nigerrimus.*

Niger, pilis pallidis longis et erectis parce vestitus; capite tarsisque quatuor anticis canis; antennis gracilibus, ad apicem crassiusculis; prothorace granulato, globuloso, ad basin anguste albo; scutello albo-cincto; singulo elytro notula transversa fasciaque recta, ultra medium pone suturam abbreviata, niveis, limbo apicali cinereo; corpore infra leucophæo, maculis albis; pedibus sub-elongatis, posticis longioribus.

Long° 5 1/5, Lat°. 1 1/5 mill. Philippines (Maldonado).

Cet insecte offre assez de ressemblance avec le *Clytus massiliensis* Fab. Très-noir, revêtu de longs poils blanchâtres, droits et mous. *Tête* d'un gris blanchâtre, tronquée et en carré long sur le devant, élevée, présentant deux tubercules à la base des antennes; sillon étroit. *Palpes* noirs, terminés en hache. *Yeux* noirs, arrondis, peu échancrés. *Antennes* presqu'aussi longues que le corps, minces, un peu plus épaisses à l'extrémité, noires, à pubescence grise. *Prothorax* petit, globuleux, étroitement resserré et blanc sur la base, chargé d'une ponctuation très-distincte. *Ecusson* semi-arrondi, bordé de cendré. *Elytres* obliquement tronquées, ornées sur le tiers antérieur et au milieu d'un petit trait transverse, et au-delà du milieu, d'une bande étroite, directe, limitée près de la suture, tous deux d'un très-beau blanc; bordure apicale cendrée. *Corps* en dessous d'un cendré soyeux, avec le *Sternum*, le *Metasternum*, une tache sur chaque côté postérieur de la *poitrine*, la bordure inférieure du 1^er^ segment abdominal, et une tache latérale sur le second, blancs. *Pattes* de moyenne longueur, poilues; cuisses effilées, les postérieures dépassant les étuis à peu près du tiers de leur longueur; genoux simples; les quatre tarses antérieurs sont d'un blanc cendré.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

Cet insecte a à peu près la taille et la livrée des *Demonax Delesserti*, *lineola* et *persimilis*, mais ses antennes ne sont pas épineuses.

79. *Anthoboscus quinquefasciatus.*

Luteus, thoracis fascia elytrisque nigris; his macula pone humeros, altera suturali obliqua fasciisque duabus posticis, luteis.

Long° 18 1/2, Lato. 4 mill. Japon, Java.

Clytus 5-*fasciatus.* (Hope) Lap. et Gory, Mon. p. 101, pl. 19, fig. 120.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 282, N° 145.

De la collection de l'auteur.

80. *Anthoboscus signaticollis.*

Pubescens, luteus; thoracis macula media punctoque utrinque, elytrorum linea baseos circulari fasciisque duabus posticis, nigris.

Long° 10 1/2, Lat° 2 1/2 mill. Asie ou Japon.

Clytus signaticollis. Lap. et Gory, Mon. p. 103. pl. 19, t. 122.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 285. 147.

81. *Anthoboscus oppositus.*

Vicinus *Ant. signaticolli*, luteus; prothorace punctis quatuor transverse dispositis, singulo elytro signatura basali subquadrata, postice extus aperta, dextrorsum litteram C efficiente, fasciisque duabus, nigris: 1ª ad suturam angulata; abdomine fasciis tribus punctoque nigris; ano producto, bisulcato.

Longº 17, Latº 4 1/2 mill. Chine sept.

Cet insecte ressemble en grand à l'*A. ornatus* Fab., mais sa couleur et ses dessins sont en sens contraire de l'*A. japonicus*. D'un jaune verdâtre. *Tête* arrondie, un peu plus longue que large, présentant en avant un sillon étroit et anguleux, et sur la longueur un autre sillon, qui est plus profond, entre les antennes; un bandeau noir est situé au sommet. *Yeux* bruns, faiblement lunulés en dessus sur le dedans. *Antennes* atteignant tout au plus le tiers antérieur des élytres, d'un gris verdâtre; extrémité des articles munis d'une soie. *Prothorax* globuleux, droit, étroitement sillonné et relevé aux extrémités, marqué de quatre points disposés presque sur une ligne transverse, les deux dorsaux réunis par le haut. *Ecusson* large, semi-arrondi. *Elytres* un peu atténuées sur le sommet, obliquement tronquées de la marge sur la suture, avec l'angle externe saillant; ornées près de la base d'un dessin noir, presque carré, représentant une sorte de C sur le côté droit, et de deux bandes noires: l'une située au milieu, longitudinale, avancée en angle aigu et étroit sur la suture; l'autre est placée entre la dernière et l'extrémité et s'élargit un tant soit peu en marge. *Abdomen* ayant sur chacun des trois premiers segments une bande noire, médiane, et un point noir sur le quatrième. *Pattes* postérieures plus longues que les étuis, mais plus courtes que le dernier segment anal; celui-ci se termine en pointe conique à la manière de certaines *Leptura* et est sillonné sur chaque côté en dessus.

La collection de M. A. Deyrolle renferme un ♂ qui est bien plus étroit; la 2e bande de ses élytres est interrompue près de la marge.

82. *Anthoboscus Curtisii.*

Cylindricus, niger ; thoracis fascia, elytris macula baseos fasciisque tribus, flavis.

Long° 10, 11, Lat° 3 mill. Australie.

Clytus Curtisii. Lap. et Gory, Mon. p. 49, pl. X, fig. 6 bis.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 266, V. 73.
De la collection de l'auteur.

83. *Anthoboscus Durvillei.*

Niger, luteo-pubescens; elytrorum linea baseos arcuata, fascia media apiccque, luteis.

Long° 8 1/2, Lat° 3 mill. Nouvelle Guinée, Rawak.
Type dans le cabinet de l'auteur.

84. *Anthoboscus damascenus.*

Læte flavus ; capite summo thoraceque medio nigro-unifasciatis ; elytris fasciis quatuor nigris notulisque duabus ante medium, flavis ; antennis ferrugineis.

Syrie (Damas.)

Clytus damascenus. Chevrol. Rev. et Mag. Zool, 1854, p. 483, pl. 7, fig. 3.

85. *Anthoboscus* 13-*maculatus.*

Affinis *Anth. opposito*, virescens; thorace punctis tribus nigris fere transversim dispositis : centrali amplo postice fisso ; singulo elytro maculis quinque nigris : 2, 2, 1 ; macula 2ª ad sinistram signum] efficiente ; ano breviter producto. ♀

Long° 13 1/2, Lat° 4 1/2 mill. Chine sept.

Très-voisin de l'*Anth. oppositus*, plus petit, revêtu d'une pubescence verdâtre, courte et serrée. *Tête* impressionnée de sillons semblables, son bord postérieur également noir. *Antennes* n'atteignant que le tiers antérieur des étuis, d'un gris verdâtre à fond noir. *Prothorax* allongé, arrondi, droit, rétréci, sillonné et rebordé aux extrémités, marqué de trois points noirs placés presqu'en travers ; celui du centre est grand, un peu plus en arrière, et fendu étroitement en dessous sur le dedans. *Ecusson* grand,

semi-arrondi, noir sur la base. *Elytres* offrant chacune cinq taches noires : 1re allongée, sur le dehors de l'épaule ; 2e en regard et un peu en dessous, près de l'écusson et représentant un arc sur la gauche; 3e et 4e en regard l'une de l'autre, et vers le milieu ; celle en marge allongée; la voisine un peu transverse, anguleuse vers le dehors en dessus ; 5e au-dessous, entre les deux précédentes et le sommet, grande, presqu'arrondie, appuyée en marge et n'atteignant pas complètement la suture. *Corps* en dessous sans taches, d'un verdâtre pâle ; seulement le milieu du prothorax, et le *Metasternum* sont encore plus clairs et tranchent avec le fond ; le dernier segment anal est brièvement prolongé, aminci et tronqué à l'extrémité. *Pattes* postérieures un peu plus longues que le corps. ♀.

Unique dans la collection de l'auteur.

86. *Anthoboscus Ottii.*

Griseo-virescens ; palpis, antennis pedibusque ferrugineis ; prothorace rotundato, fascia media, medio arcuata, nigra ; elytris nigris, macula rotundata infra humerum fasciisque quatuor griseo-virescentibus : 1a in ipsa basi, 2a ad suturam angulata, 3a lata, 4a apicali obsoleta.

Longe 6, Latº, 2 1/3 mill. Asie mineure.

Revêtu d'une courte villosité d'un gris pâle, tirant sur le vert. *Tête* longue, avancée, sillonnée au milieu. *Palpes*, *Lèvre*, *Chaperon*, *Antennes*, de la longueur du corps, et *Pattes* d'un ferrugineux pâle. *Prothorax* offrant une bande médiane noire, cintrée en arrière. *Ecusson* d'un gris verdâtre. *Elytres* noires, ornées au-dessous de l'épaule d'une tache arrondie et de quatre bandes d'un cendré verdâtre : la 1re occupe toute la base; la 2e est située avant le milieu, prend naissance au-dessus de la marge et s'étend anguleusement sur la suture jusqu'à l'écusson ; la 3e est grande, un peu élargie sur la suture; la 4e terminale est obsolète ; la marge est étroitement grise depuis l'épaule jusqu'à la 3e bande, elle s'élargit subitement en regard de la 2e bande; troncature échancrée, angle externe prolongé. *Abdomen* ayant le bord inférieur des segments noirâtres.

Cette espèce m'a été donnée par feu Ch. Ott de Strasbourg, décédé en 1860, auquel je l'ai dédiée comme souvenir de notre

vieille amitié ; elle devra se placer après l'*A. damascenus* dont elle n'est peut-être qu'une variété pâle et infime.

87. *Anthoboscus alboscutellatus.*

Cinereus ; scutello albo ; elytris fasciis tribus nigris, apice truncatis, spina externa acuta ; lateribus pectoris maculis tribus, primo secundoque segmento abdominis, albis.

Long° 9, Lat° 4 mill. Neelgheries.

Cendré. *Tête* allongée, étroite, tronquée obliquement en avant, de la même longueur sur ces deux parties. *Yeux* d'un brun rougeâtre. *Antennes* un peu plus courtes que les étuis, noires sur les quatre premiers articles, cendrées sur les suivants. *Prothorax* globuleux, un peu plus long que large, droit, étroitement sillonné et rebordé aux extrémités, présentant trois séries longitudinales de points noirs scabres : celle du milieu est assez large et limitée près du bord antérieur. *Ecusson* semi-arrondi, d'un beau blanc. *Elytres* un peu plus larges que le prothorax, obliquement tronquées de la marge sur la suture, à angle externe aigu, ornées de trois bandes noires directes : 1re sur la base, 2e au milieu, cintrée en dessous, 3e placée avant le sommet. *Metasternum*, *Poitrine* marquée sur le côté d'une grande tache, et les deux premiers segments de l'abdomen entièrement, blancs.

De la collection de M. Guérin-Méneville et de celle de l'auteur.

88. *Anthoboscus Sapho.*

Niger ; capite prothoraceque cinereis, hoc obscure nigro-cruciato ; elytris basi lineis duabus, (una transversa, altera obliqua longitudinali), linea suturali a scutello, fascia angusta ante medium continua, fascia postica maculaque apicali, virescentibus.

Long° 10 mill. Océanie, Borneo.

Clytus Sapho. Pascoe, Trans. Ent. Sc. Lond. vol. 4, p. 239.

89. *Anthoboscus ? albicinctus.*

Elongatus, niger ; fasciis duabus (prima ad suturam erecta) apiceque, albis.

Long° 7, Lat° 1 1/2 mill. Népaul.

Clytus albicinctus. Hope in Gray's Zool. Misc. p. 28.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 280, N° 134.

Clytus filiformis. Lap. et Gory, Mon. p. 95, pl. 18, fig. 112? Sec. White.

90. *Anthoboscus? maculicollis.*

Niger, albomaculatus, elytris subdentatis, testaceis, nigro-striolatis; pedibus ferrugineis, femoribus apice nigris.

Ind. or.

Clytus maculicollis. Dalm. in Schœnh. Syn. Ins. App. p. 195,

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 288, N° 171.

91. *Anthoboscus? rubricollis.*

Niger; thorace rubro, elytris spinosis, puncto humerali fasciisque tribus, albis.

Long° 14 1/2, Lat°. 3 mill. Java.

Clytus rubricollis. (Buq.) Lap. et Gory, Mon. p. 88, pl. 16, fig. 102.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 278, N° 125.

92. *Anthoboscus alphabeticus.*

Luteo-virescens; prothorace punctis quatuor nigris transverse positis; elytris emarginato-truncatis, spina externa subacuta, limbo marginali fasciisque tribus nigris, valde dentatis: 1ª fascia extus bilineata postice littera L, et intus prope scutellum, cum 2ªm litteram M efficiente, 5ª punctis duabus contiguis oblongisque formata; corpore infra pallidulo.

Long° 16, 20, Lat° 4, 5. Japon.

Grand, allongé, d'un jaune tirant sur le vert et d'un vert blanchâtre en dessous. *Tête* un peu plus longue que large. *Yeux* noirs. *Antennes* étendues jusqu'aux 2/3 des étuis, d'un blanc grisâtre, à 4e et 5e articles anguleux au sommet. *Prothorax* allongé, un peu atténué sur le côté antérieur, sillonné sur la base, ponctué au fond du sillon, marqué sur le disque de quatre points noirs disposés sur une ligne transverse, les latéraux plus petits. *Ecusson* semi-arrondi, jaune. *Elytres* planes, parallèles, échancrées et tronquées obliquement, offrant une pointe

assez aigue à l'angle externe, ornées de trois bandes noires ainsi disposées par étui : 1re formée de deux lignes réunies par le bas ; celle humérale est allongée et simule sur le côté gauche la lettre L, l'interne est liée à une tache en forme de C dont l'ouverture est appuyée sur l'écusson, son sommet avoisine la suture ; 2e représentant la lettre M ; 3e formée de deux taches oblongues rapprochées ; la marge est étroitement bordée de noir. *Pattes* modérément allongées ; cuisses médianes un peu plus fortes ; postérieures dépassant à peine le corps ; genoux simplement échancrés ; tarses à 1er article des postérieurs excessivement long ; les crochets de tous sont noirs.

Le dessin du ♂ ne représente pas exactement les lettres C et M comme chez la ♀.

Collection de M. J. Thomson et de celle de l'auteur.

93. *Clytus lugubris.*

Ater, dense tomentosus, thorace utrinque angulatim valde producto ; elytris basi punctis quatuor, vitta axillari, fascia lunari media punctisque tribus apicis, albis ; tarsis antennisque apice ferrugineis.

Longo 12, 16, Lato 4, 6 mill. Perse mér.

Clytus lugubris. Ménétr. Cat. rais. p. 229, No 1050, 1832.

Fald. Ins. transc. tome 3, p. 248, No 484, tab. VIII.

Fald. Nouv. Mém. Soc. Mosc. V p. 268, 284, 1852.

94. *Clytus Bobelayei.*

Velutinus, niger ; thorace fasciis tribus, scutello, elytrorum baseos macula rotundata, altera pone basim, fasciis duabus in medio apiceque, flavis ; pedibus antennisque fuscis.

Longo 21, Lato 7 mill., Syrie, Georgie, Crimée, Grèce.

Clytus Bobelayei. Brul. Exp. Sc. de Morée, Ins. p. 853, No 480, pl. 45, fig. 12.

Lap. et Gory, Mon. p. 45. pl. 9, fig. 55.

Clytus speciosus. Adams, Mém. des Nat. de Mosc. V (nec. Say).

Manh. Bull. de Mosc. 1838, pag. 73.

Clytus zebra. Dej. Cat. éd, 3, p. 356.

Clytus conspicuus. (Schh).

Clytus orientalis. (Kindermann).

De la collection de l'auteur.

95. *Clytus scalaris.*

Elongatus, niger ; thorace fasciis duabus scutelloque flavis ; elytris macula ovata baseos, altera ad apicem, fasciis duabus in medio (prima angulata) pedibus antennisque, castaneis.

Long° 10, 14, Lato 3. 3 1/2 mill. Asie mineure, Batoum, Algérie, Sicile.

Clytus scalaris. Brullé, Exp. Sc. de Morée, p. 254, N° 483, pl. 43, fig. 10.
Lap. et Gory, Mon. p. 47, pl. 9, fig. 55.

Clytus siculus. Dej. Cat. 3e éd. p. 336.
Lap. et Gory, Mon. p. 46, pl. 9, fig. 54.

De la collection de l'auteur.

96. *Clytus floralis.*

Elongatus, niger ; thorace flavo, fascia media nigra ; scutello flavo ; elytris nigris, macula baseos transversa, altera pone basim, fasciis duabus in medio apiceque flavis ; pedibus antennisque castaneis.

Long° 11, Lat° 4 mill. Asie min., Smyrne, Troade, Perse occidentale.

Clytus floralis. Fab. Syst. El. tom. 2, 346, N° 3.
Lap. et Gory, Mon. p. 47, pl. 10, fig. 56.

Clytus aulicus. Laich, Tyr. Ins. t. 2, p. 103, N° 5.

Callidium fasciatum. Herbst, Arch. pag. 8, 17, pl. 26, fig. 17.

Leptura arcuata. Schrank, Ann. Ins. p. 164, N° 308.

Cerambyx nigro-fasciatus. Voët, Col. ed. Panz., tome 3, p. 55, N° 93, pl. 19, fig. 93.

Clytus desertorum. (Fald.) ; Kirguises.

Var. Elytres à bandes d'un jaune pâle, blanchâtre.

De la collection de l'auteur.

97. *Clytus ? sexmaculatus.*

Villosus, niger ; thorace albido-villoso, medio fusco ; elytris scabriusculis, singulo maculis tribus flavis ; pedibus luteis.

Australie.

Clytus sexmaculatus, Donov. Epitome of the Ins. of New Holl.
Boisd. Voy. de l'Astrol. Ins. tome 2, p. 482, 2.

Cette espèce n'est pas mentionnée dans le catalogue du British Museum. Peut-être n'appartient-elle pas au groupe des Clytides ?

XYLOTRECHUS.

Nous avons établi ce genre (*Annales de la Soc. Ent. de France* 1860, p. 456) sur une espèce du Mexique, le *X. Sartorii*, et nous y avons adjoint les *Clytus hafniensis* F., *arvicola* Ol., *Antilope* Illig., d'Europe, *undulatus* Say, du nord de l'Amérique, etc., etc.

L'Asie en possédant un grand nombre d'espèces de formes tranchées et de couleurs distinctes, il nous a paru nécessaire de les diviser.

1re Division. Tête n'offrant que trois carènes rudimentaires, une médiane, et les deux autres, une sur chaque bordure interne des yeux, un peu plus saillante, à la base antennaire.

Xyl. altaicus.

2e » Tête ne présentant que deux carènes faciales.

Xyl. chinensis.

3e » Elle se compose d'espèces de l'Inde méridionale, orientale et septentrionale.

Tête grosse, arrondie, ayant de 3 à 5 carènes faciales ; le prothorax est globuleux ou allongé, orné de 2 à 4 points noirs, placés sur une ligne transverse un peu avant le milieu, ou d'un trait longitudinal noir qui, quelquefois, se réunit aux 2 points du centre en figurant alors une sorte de croix.

Chez d'autres les dessins jaunes ou cendrés des élytres les rapprochent des *Clytus arvicola* et *Antilope*.

J'établis trois groupes dans cette division :

1. Tête à 3 carènes. Antennes un peu plus longues que de coutume. Prothorax plus étroitement et régulièrement allongé, marqué d'une sorte de croix dorsale et d'une tache latérale et basale noires.

Xyl. imperfectus.

2. Tête à 5 carènes non réunies ; antennes de moyenne grosseur.

Xyl. subditus, *quadripes*, *javanicus*.

3. Tête à 5 carènes faciales : les 2 internes réunies et prolongées en avant en une sorte de V.

Xyl. vicinus, *Smei*, *carinifrons*, *australis*, Lap. et Gory ; *subscutellatus*, *crucicollis*, *ocellatus*, *Putzeysi*, *insipiens*, *Buquetii*.

4e Division. Corps court et assez épais. Tête moins forte, marquée de cinq carènes droites. Prothorax globuleux.

Xyl. brevicillus (*cinereus*, Lap. et Gory; *Duponti*, Dejean et Muls.)

5e » Tête avec 4 carènes : les 2 médianes réunies en avant.

Xyl. pantherinus, *adspersus*, *hafniensis*.

6e » Tête avec 4 carènes ; prothorax un peu élargi sur les côtés postérieurs.

Xyl. ibex, *arvicola*, *antilope*.

7e » Tête arrondie, offrant 3 carènes saillantes. Prothorax globuleux. Elytres plus atténuées qu'à l'ordinaire. Dessous du corps ayant une apparence de *Stenopterus* élargi.

Xyl. fuscipennis.

8e » Tête arrondie, ne présentant que 3 faibles carènes latérales très-arquées. Prothorax régulièrement arrondi.

Xyl. hircus.

9e » Corps très-étroit, surtout en arrière. Tête modérément arrondie, à peine carénée et seulement entre les antennes, près de leur insertion.

98. *Xylotrechus altaicus.*

Niger, cinereo-tomentosus; antennis pedibusque rufo-ferrugineis, elytris margine antico et laterali testaceis, apice truncatis.

Long° 17, 26, Lat° 4 1/2, 6 3/4 mill. Asie Bor. Altai, Sibér. or.

Clytus altaicus. Gebl. Bull. Mosc. 1836, p. 282, et 1848, p. 392.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 265, N° 70.

Clytus Popowii. Manh. Bull. Mosc. 1849, p. 241.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 265, N° 262.

De la collection de M. le Comte Mniszech.

99. *Xylotrechus chinensis.*

Validus, fuscus; capite flavo, carinis duabus frontalibus; thorace globoso, margine antico et macula basali flavis; scutello flavo; elytris fasciis quatuor : 1ª basi fusco-virescenti, reliquis flavis, postice rubidis.

Long° 19, 21, Lat° 6, 6 1/2 mill. Asie. or., Chine, Japon.

Clytus chinensis. Chevr. Rev. et Mag. de Zool. 1852, p. 417.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 243, N° 61.

Des collections de MM. Mniszech, J. Thomson et Chevrolat.

100. *Xylotrechus imperfectus.*

Elongatus, cinereus; capite tricarinato, fascia postica nigra; prothorace oblongo, maculis quinque nigris : tribus dorsalibus, rotundatis, duabus posticis; elytris fasciis tribus : 1ª pone basin, postice bifida, 2_a obliqua, 3ª ad imum marginis angulata; corpore infra griseo-sericeo.

Long° 10 1/2, 14, Lat° 2 1/2, 3 1/3, Océanie, Sarawak (Borneo).

Allongé, d'un gris bleuâtre en dessus, d'un cendré soyeux en dessous. *Tête* arrondie, présentant trois carènes isolées, la médiane entière; une bande occipitale noire. *Palpes* bruns, d'un roux testacé sur la troncature. *Mandibules* noires. *Yeux* roux, grands, avec une échancrure profonde et étroite en dessus. *Antennes* plus allongées qu'à l'ordinaire, de grosseur moyenne et égale, atteignant le quart antérieur des étuis. *Prothorax* allongé, élargi et arrondi sur le milieu, droit, sillonné et rebordé en avant, arqué

et étroitement blanchâtre sur la base qui est aussi sillonnée, marqué de cinq taches noires dont 3 dorsales en dessus et une sur chaque côté en dessous, vers l'angle postérieur. *Ecusson* semi-arrondi. *Elytres* coupées droit et poilues sur la troncature, ayant l'angle externe brièvement épineux, ornées de trois bandes noires : 1re transverse, placée sous l'écusson, réunie sur le côté à une tache humérale allongée et élargie à son sommet postérieur; en dehors de l'écusson s'en détache un angle dont la pointe avoisine le sommet interne de la tache humérale; 2e oblique, anguleuse sur la suture; sa bordure supérieure est rougeâtre vers le côté; 3e bande située au-dessus des 2e et 3e segments abdominaux, droite et prolongée en dessous jusqu'à l'angle marginal; la marge, entre les bandes, est étroitement frangée de noir. *Poitrine* présentant au-dessous du métasternum une tache noire qui se continue en dessous en une ligne oblique. *Pattes* finement pointillées, noires, recouvertes de cendré; cuisses effilées, postérieures dépassant d'un quart de leur longueur les élytres; genoux postérieurs brièvement bidentés.

Cette espèce se rapproche du *X. subditus*, mais ce dernier est court et élargi.

♂ De la collection de M. le comte Mniszech, ♀ de celle de M. J. Thomson.

101. *Xylotrechus subditus.*

Affinis *Cl. plebejo* Fab, sed brevior et latior. Validus, niger; capite rotundato, carinis quinque rectis; antennis crassiusculis, cinereis, ad basin nigris; prothorace subelongato, globuloso, cinerascente-obscuro, punctis tribus dorsalibus nigris, ad lateribus baseos albo; elytris fasciis quatuor lineolaque infra humerum, cinereis : 1a recta in ipsa basi, 2a pone scutellum secundum suturam subito ad marginem arcuata, versum medium; 3a recta, antice ad suturam paulo angulata; 4a apicali; corpore infra nigro-nitido, maculis fasciisque albis.

♂ Longo 12, Lato 3 1/2 mill. Ind. Cachemire.

Il ressemble beaucoup à l'*Anthoboscus plebejus* Fab. par sa forme, ses couleurs et aussi par son dessin, mais il est plus court, plus épais et n'appartient pas à ce groupe. Noir, granuleux. *Tête* arrondie, portant cinq carènes droites. *Palpes* bruns,

testacés sur la troncature. *Mandibules* noires. *Yeux* bruns. *Antennes* assez épaisses, atteignant la base des pattes médianes, noires sur les six premiers articles, cendrées au-delà. *Prothorax* un peu plus long que large, arrondi, un tant soit peu aminci en devant, droit aux extrémités, d'un gris plombé obscur, granuleux; base et bord antérieur étroitement frangés de blanc sur le côté; trois gros points noirs sont disposés sur une ligne transverse, avant le milieu; le central est grand, échancré en arrière. *Ecusson* transverse, arrondi, blanc. *Elytres* à troncature presque droite, à peine épineuse aux angles, noires, ornées de quatre bandes et d'une petite ligne oblique d'un cendré bleuâtre; celle-ci est placée au-dessus de l'épaule; 1re bande entière, peu après la base, appuyée sur l'écusson; 2e au-dessous de ce dernier, sur la suture, se recourbant et rejoignant la marge; un trait oblique existe au centre; 3e directe, un peu élargie sur la suture, 4e terminale, plus large que les précédentes. *Corps* en dessous d'un noir brillant, ayant le milieu du prothorax, le métasternum avec une tache carrée, le côté et la partie postérieure de la poitrine, et trois bandes sur l'abdomen plus ou moins entières ou effacées, de couleur blanche.

Cette espèce qui fait partie de la collection de M. le comte Mniszech, ne peut être confondue avec aucune autre de ce genre.

102. *Xylotrechus quadripes.*

Similis *Clyto vicino* Lap. et Gory, niger; capite thoraceque (punctis tribus nigris), cinereis; scutello cinereo; elytris nigris, fasciis quatuor lineolaque subhumerali cinereis; (fascia 1a in ipsa basi, 2a erecta secundum suturam et prope scutellum ducta, 3a intus angulata, ultima apicali); pectore albo-marginato, lateribus corporis maculis transversis sex albis; antennis nigro-cinereoque dimidiatis; pedibus anticis cinereis, femoribus quatuor posticis rubricantibus, punctulatis, cinereo-pilosulis.

Longo 17, Lato 5 1/2 mill. Indes Orientales.

Tête grise, marquée de trois côtes contigues, droites, la médiane plus longue. *Antennes* dépassant la base du prothorax, d'un gris obscur sur les cinq premiers articles, cendrées sur les suivants; extrémités des 3e à 5e munie d'un poil raide. *Prothorax*

allongé, arrondi, coupé droit en avant et en arrière, gris, présentant trois points dorsaux noirs, disposés sur une ligne transverse, le central plus gros. *Ecusson* grand, semi-arrondi, d'un jaune pâle. *Elytres* parallèles, largement et sinueusement tronquées, noires, offrant une petite ligne oblique partant du calus huméral et quatre bandes d'un jaune pâle : 1re sur la base et traversant l'écusson ; 2e un peu avant le milieu, recourbée sur la suture et prolongée jusqu'à l'écusson ; 3e élargie et anguleuse sur la suture ; 4e apicale. *Poitrine* bordée de blanchâtre ; côtés du corps avec six taches latérales blanches dont trois sur l'abdomen ; dernier segment blanchâtre. *Sternum* large, carré, blanc. *Pattes* antérieures cendrées, les quatre cuisses postérieures légèrement rougeâtres, finement ponctuées, à pubescence grise ; jambes et tarses d'un noirâtre cendré.

103. *Xylotrechus javanicus.*

Niger, thorace viridi-pubescente, in medio puncto utrinque nigro ; scutello albo ; elytrorum lineola baseos arcuata, altera humerali obliqua fasciisque duabus, posteriori apicali, albidis.

Longo 12, Lato 3 1/2 mill. Java.

Clytus javanicus. (Buquet) Lap. et Gory, Mon. p. 87, pl. 16, fig. 100.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 278, No 123.

De la collection de l'auteur.

104. *Xylotrechus vicinus.*

Niger ; thorace fusco, punctis quatuor transversim dispositis nigris ; elytrorum puncto humerali, lineolis duabus transversis ad suturam erectis apiceque, albis.

Longo 16, Lato. 5 mill. Ind. or., Decan,

Clytus vicinus. (Hope) Lap. et Gory, Mon. pag. 38, pl. 8, fig. 47.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 262, No 57.

Du cabinet de l'auteur.

105. *Xylotrechus carinifrons.*

Niger, capite thoraceque canis ; thorace punctis quinque nigris ;

elytris basi fere rubris, puncto humerali, linea antica arcuata, altera obliqua in medio apiceque, flavis.

Longo 13, Lato 4 3/4 mill. Ceylan.

Clytus carinifrons. Lap. et Gory, Mon. page 65, pl. 12, fig. 75.

Type dans la collection de l'auteur.

M. Ad White a rapporté, à tort, comme variété, cette espèce au *C. vicinus.*

106. *Xylotrechus Smei.*

Obscure fuscus; thorace rubido punctis duobus nigris; elytrorum linea baseos circulari, puncto pone humeros fasciaque postica, luteis.

Longo 20 1/2, Lato 5 mill. Ind. or.

Clytus Smei. Lap. et Gory. Mon. p. 57, pl. 8 fig. 46.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. pag. 262, N° 58.

107. *Xylotrechus subscutellatus.*

Fuscus; capite carinis quinque, thoraceque punctis quinque nigris (limbo basali albo); singulo elytro fasciis tribus notulaque circumflexa, vel arcuata, infra humerum, cinereis : (1ª fascia lata basali, secundum suturam postice ad marginem recurva, aliquoties postice interrupta, vel tantum punctis tribus emittente, 2ª undulata supra et infra ad suturam angulata, 3ª apicali); macula quadrata nigra infra scutellum; pectoris macula laterali rotundata fasciisque abdominis, albis.

Longo 13, Lato. 4 mill. Ceylan, Bombay.

Court, assez large, fauve. *Tête* arrondie, cendrée, marquée en avant et en arrière de taches d'un jaune pâle, offrant sur l'occiput un bandeau brun granuleux, et sur la face 5 carènes, dont 3 sont réunies antérieurement; la médiane s'étend jusque sur le front et la bordure interne des yeux forme les deux dernières. *Palpes* testacés. *Mandibules* noires. *Yeux* d'un brun noirâtre. *Antennes* d'un brun pâle, recouvertes de cendré, prolongées jusqu'au calus huméral. *Prothorax* à peine plus long que large, arrondi au milieu, rétréci sur la base et étroitement frangé de blanc, cendré, marqué de quatre points noirs disposés presqu'en ligne transverse : deux en dessus, deux en dessous

plus rapprochés du bord ; un 5e point noir est placé sur le milieu de la base et forme au dessus une ligne obsolète assez large. *Ecusson* grand, semi-arrondi, cendré. *Elytres* de la largeur du prothorax dans sa plus grande étendue, 2 fois 1/2 aussi longues, parallèles, tronquées obliquement de la marge sur la suture, fauves, ornées d'un trait en chevron situé sous le calus huméral et de trois bandes cendrées : 1re basale, large, interrompue par une tache noire, carrée, qui s'appuye au sommet apical de l'écusson, suit la suture et se recourbe en dessous pour rejoindre la marge ; quelquefois cette partie recourbée est interrompue au milieu ou ne représente que trois points qui sont de même grosseur et à égale distance ; 2e bande située au-delà du milieu, sinueuse au centre, anguleuse soit en dessus soit en dessous sur la suture ; 3e apicale, transverse, élargie en dedans. *Poitrine* ayant sur le côté une grosse tache ronde et une petite tache en dehors des hanches antérieures et postérieures. *Abdomen* présentant 2 ou 3 bandes sur les premiers segments ; toutes ces parties sont d'un blanc plus ou moins pur. *Pattes* finement ruguleuses et pubescentes, un peu plus pâles à leur naissance.

Je possède trois exemplaires de cette espèce qui a de grands rapports avec les *X. Putzeysi*, *Smei* et *vicinus*.

108. *Xylotrechus siamensis.*

Brevis, postice subattenuatus, cinereus ; oculis, prothorace punctis tribus pedibusque nigris ; antennis nigro-cinereis ; elytris oblique truncatis, nigris, notula transversa post basin, fasciisque quatuor cinereis : 1a in ipsa basi, 2a infra scutellum, secundum suturam postice arcuata usque ad marginem, 3a antice angulata in sutura, 4a apicali ; pectore medio macula, punctulo laterali fasciisque abdominalibus, nigris.

Longo 10, mill. Siam.

Voisin du *X. Putzeysi*, sensiblement atténué en arrière, d'un cendré bleuâtre. *Tête* arrondie, ayant deux carènes faciales réunies en avant, une 3e frontale allongée, et le bord interne de chaque œil saillant. *Palpes* ferrugineux. *Yeux* noirs. *Antennes* noirâtres, recouvertes de cendré. *Prothorax* marqué de trois points noirs arrondis : deux sur le milieu du disque et un plus

grand sur la base. *Ecusson* large, semi-arrondi, cendré. *Elytres* tronquées obliquement de la marge sur la suture, munies d'une petite épine externe, noires, ornées d'un trait en chevron qui est placé au-dessus de l'épaule et de quatre bandes cendrées : 1re sur la base, entière, étroite ; 2e partant de l'écusson sur la suture, se recourbant en arrière et rejoignant la marge ; 3e un peu oblique, mince sur le côté, anguleuse en dessus sur la suture ; 3e et dernière apicale, partant obliquement de l'angle marginal sur la suture. *Sternum*, *Metasternum*, une ligne latérale arquée et une transverse et postérieure sur la poitrine, taches en dehors des hanches antérieures et postérieures et quatre bandes abdominales d'un cendré bleuâtre, avec une grande tache pectorale carrée, quatre bandelettes sur l'abdomen, noires ; le dernier segment est totalement noir. *Pattes* noires, genoux postérieurs dépassant à peine le corps.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

109. *Xylotrechus australis*.

Cinereo-obscurus ; capite carinis quinque, duabus mediis antice conjunctis ; prothorace puncto basali nigro ; elytris ad apicem angustatis, oblique truncatis, nigris, maculis suturalibus quinque cinereis.

Longo 10, 11, Lato 3 mill. Nouvelle Guinée.

Clytus australis. Lap. et Gory, Mon. p. 99, pl. 19, fig. 118.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 281, N. 140.

De la collection de M. le comte Mniszech.

110. *Xylotrechus crucicollis*.

Affinis *X. subscutellato*, niger ; capite obscuro, quinquies carinato ; prothorace rotundato, cinerascente-obscuro, maculam dorsalem cruciferam nigram gerente et in utroque latere infra punctulum nigrum ; elytris oblique truncatis, fasciis tribus lineolaque transversa post humerum luteo-rubricantibus, (fascia 1a arcuata ex humero secundum basin et scutellum ad medium marginis ducta, 2a obliqua ad suturam erecta et ampliata, 3a apicali griseo-sericea) macula rotundata laterali in pectore, fasciisque duabus in abdomine, albis.

Longo 12. Lato 4 mill. Moluques (Amboine).

D'un noir terne. *Tête* arrondie, obscure, ayant la bordure interne des yeux aussi élevée que les deux carènes faciales qui en avant se trouvent réunies ; une 5e carène s'étend jusqu'au front. *Antennes* dépassant la base du prothorax, d'un brun noirâtre, plus pâles au sommet. *Prothorax* globuleux, un peu aminci et rebordé aux extrémités ; base étroitement frangée de cendré ; la couleur générale est d'un gris obscur plombé ; sur le disque est tracé une croix noire, formée par 2 points liés à une ligne dont le sommet est peu avancé; sur chaque côté du bord inférieur se détache un petit point noir. *Ecusson* grand, semi-arrondi, d'un brun clair. *Elytres* noires, allant en s'amincissant sur l'extrémité de la marge, marquées chacune de trois bandes et d'un trait transverse sous l'épaule, d'un fauve clair rougeâtre : 1re bande partant du dehors de l'épaule, occupant la base, suivant la suture et se recourbant vers le milieu sur la marge ; 2e oblique, anguleuse et élargie sur la suture ; 3e apicale, d'un gris cendré soyeux, dirigée obliquement de l'angle marginal et de forme conique. *Pattes* granuleusement ponctuées, pubescentes, noires. *Corps* en dessous d'un noir cendré luisant ; une grande tache arrondie blanche sur chaque côté de la poitrine ; bords inférieurs des deux premiers segments de l'abdomen également blancs.

De la collection de M. le comte Mniszech et de la mienne.

111. *Xylotrechus ocellatus.*

Niger ; elytrorum macula transversa et linea baseos circulari, linea transversa bisinuata apiceque, albis.

Longo 12, Lato 3 mill. Inde or.

Clytus ocellatus. (Hope) Lap. et Gory, Mon. pag. 64, pl. 12, fig. 74.

Ad White, Cat. Brit. Mus. p. 278, No 92.

112. *Xylotrechus Putzeysi.*

Proximus *Xyl. crucicolli*, niger, opacus ; capite carinis quinque thoraceque (linea longitudinali punctisque quatuor nigris transverse positis) virescentibus ; in elytris macula transversa infra basin fasciisque tribus virescentibus (1a circulari, extus humerum secundum basin atque suturam ad medium marginis

ducta, 2ª intus angulata, 3ª apicali); pectore macula laterali abdomineque fasciis tribus virescentibus.

Longo 9, 15, Lato 2 3/4, 4 1/2 mill. Ceylan.

Il paraît se rapprocher du *Clyt. Smei* Lap. et Gory, mais il est plus petit; il ressemble aussi au *Xyl. crucicollis* : celui-ci n'est point parallèle comme dans l'espèce actuelle et se rétrécit vers le sommet, de plus le dessin est autrement coloré. D'un noir opaque. *Tête* arrondie, verdâtre, ayant la bordure interne des yeux et deux carènes faciales, réunies en avant, d'égale élévation; le front en offre une 3e médiane. *Antennes* noires, limitées au calus huméral. *Prothorax* allongé, arrondi, vert, marqué d'une ligne longitudinale assez large et de quatre points noirs disposés sur une ligne transverse, dont un en dessus, l'autre en dessous, sur chaque côté. *Ecusson* grand, semi-arrondi, verdâtre. *Elytres* presque trois fois aussi longues que le prothorax, parallèles, à troncature presque droite, noires, ornées d'un petit trait transverse au-dessous de l'épaule et de trois bandes verdâtres : la 1re occupe la base, avoisine la suture, se recourbe en dessous vers le milieu et se rend en marge; la 2e au-delà du milieu, est un peu arquée, dentelée et anguleuse des deux côtés de la suture; la 3e et dernière est placée au sommet et un peu élargie au dessus. La *Poitrine* offre deux points ronds sur chaque côté, une petite ligne postérieure transverse, et l'*Abdomen* trois bandes verdâtres.

De la collection de l'auteur.

J'ai dédié cette espèce à Mr. J. Putzeys, auteur de publications entomologiques, comme un faible témoignage de ma reconnaissance.

115. *Xylotrechus insipiens.*

Punctatus, brevis, postice attenuatus, cinereo-obscurus; capite carinis quatuor, duabus mediis antice conjunctis; prothorace parvo, subgloboso, transverse scabroso, linea longitudinali elevata, punctisque quatuor nigris transversim dispositis : duobus internis linea junctis; scutello cinereo; elytris fuscis, notula circumflexa infra humerum posita, fasciisque quatuor albis (1ª in ipsa basi, 2ª ad punctum nigrum infra scutellum incipiente

subito arcuata et ad marginem ducta, 3ª tenui obliqua, 4ª apicali), macula nigra in callo humerali ; in utroque latere corporis macula fasciisque duabus albis ; antennis pedibusque nigris, his fulvo-pilosis.

Longº 10, Latº 3 mill. Ceylan.

Ponctué, court, atténué vers le sommet, d'un cendré bleuâtre obscur. *Tête* arrondie, présentant quatre carènes minces et saillantes, les deux médianes sont réunies en avant. *Palpes* bruns, testacés sur la troncature. *Yeux* bruns, grands, anguleusement lunulés en dessus. *Antennes* courtes, de moyenne grosseur, limitée à la tache humérale des étuis, noires, à reflets cendrés. *Prothorax* petit, allongé, subglobuleux, élevé et couvert d'aspérités transverses sur le milieu longitudinal, offrant une ligne et quatre points noirs, qui sont disposés en série transverse : les latéraux petits, les internes grands, arrondis, réunis à la ligne par le côté interne. *Ecusson* grand, semi-arrondi, d'un cendré bleuâtre. *Elytres* obliquement tronquées, avec l'angle marginal petit et aigu, d'un fauve pâle, ornées, au-dessous de l'épaule, d'un trait circonflexe et de quatre bandes minces, blanchâtres : 1re sur la base même ; 2e partant d'un point noir scutellaire, se détachant aussitôt de la suture et s'arrondissant régulièrement en dessous pour rejoindre la marge ; 3e un peu oblique ; 4e terminale, peu évidente ; une tache noire, allongée, est située sur le calus huméral. *Corps* en dessous offrant sur chaque côté six taches ou bandes blanches, savoir : une petite en dehors des hanches antérieures et postérieures, une grande au-dessous du métasternum, une sur le bord inférieur de la poitrine et deux bandes sur l'abdomen. *Pattes* noires, courtes, scabres, ponctuées, revêtues d'une villosité grise ; genoux postérieurs dépassant à peine le pygidium, brièvement bidentés.

Unique dans la collection de M. le comte Mniszech.

114. *Xylotrechus Buqueti*.

Niger, thorace cinereo-pubescente, puncto utrinque lineaque media nigris ; scutello, elytrorum lineola infra basin lunata, fascia basali postice arcuata, fascia postica maculaque apicali elongata, albidis.

Longº 13, Latº 4 mill. Java.

Clytus Buqueti. Lap. et Gory, Mon. pag. 87, pl. 16, fig. 99.
Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 278, N° 122.
De la collection de M. J. Thomson.

115. *Xylotrechus ? filiformis.*

Elongatus, niger; elytris fasciis duabus apiceque albis, illarum prima ad suturam erecta.

Long° 7, Lat° 1 1/2 mill. Népaul.

Clytus filiformis. Lap. et Gory, Mon. p. 95, pl. 18, fig. 112.

116. *Xylotrechus brevicillus.*

Curtus, subcylindricus, griseus; antennis obscure ferrugineis; prothorace granuloso, obscuro; singulo elytro macula humerali, altera transversa infra basin fasciisque duabus obsolete nigris : 1ª obliqua, 2ª recta ante apicem.

Long° 8, Lat° 1 3/4 mill. Chine.

Voisin du *Clyt. cinereus* Lap. et Gory (*Duponti* Dej. Muls.). Court, presque cylindrique, gris. *Tête* large, carrée en avant, convexe sur le front, chargée de petits points serrés et ridés; carène faciale peu apparente. *Chaperon* arqué en dedans. *Yeux* d'un brun noirâtre, lunulés en dessus. *Antennes* limitées au calus huméral, d'un brun clair et luisant sur la base, avec les sept derniers articles un peu plus forts et ternes. *Prothorax* cylindrique, à peine plus long que large, droit et rétréci aux extrémités, offrant sur la base une frange grise très-mince; il est d'un gris obscur couvert d'aspérités obliques. *Ecusson* cendré, arrondi, déprimé et noir sur la base. *Elytres* cendrées, à peine plus larges que le prothorax, une fois 1/2 aussi longues, un tant soit peu amincies sur l'extrémité de la marge, à troncature presque droite avec l'angle externe très-court et aigu, ornées sur chaque étui de deux taches et de deux bandes noires : la 1re tache est allongée et située sur la tranche humérale; la 2e transverse est en regard, au dessous de la base, vers le milieu; la 1re bande est oblique et part de la marge sur la suture; la 2e placée au quart postérieur, est large et directe. *Corps* en dessous entièrement cendré. *Pattes* scabres, noires, à pubescence

grise ; cuisses peu renflées, les postérieures un peu arquées, dépassant à peine les élytres; genoux non épineux.

Unique dans la collection de l'auteur.

117. *Xylotrechus Ibex.*

Vicinus *X. arvicolæ* Ol ; niger, pube lanata alba vestitus ; capite lineolis duabus, margine antico et postico prothoracis flavo, dimidia parte postica obsolete cinerea, limbo postico scutelli, elytris fasciis tribus lineolaque transversa infra humerum, pectore fascia postica abdomineque fasciis quatuor, albis.

Longo 11, 15, Lato 3, 5 mill. Oural méridional, Altaï.

Clytus Ibex. Hummel, Ess. IV, 53 ; Ledeb. p. 183.

Gebl. Bull. de Mosc. 1848, pag. 396.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 267, N° 84.

Clytus rectangulus. (Eversmann).

De la collection de l'auteur.

118. *Xylotrechus pantherinus* (Gebler).

Granulosus, validus, nigro-fuscus, pilis brevibus albido-fuscis irroratus ; capite rotundato, antice cano, carinis quatuor, duabus mediis antice conjunctis ; prothorace rugato, ad latera postica emarginato, lineis quatuor mediis abbreviatis et interruptis ; elytro singulo maculis quinque luteolis : 1ª secundum scutellum, tribus rotundatis, 5ª apicali tertiam partem occupante et lineolam fuscam includente ; segmentis abdominalibus anguste albo-fasciatis.

Longo 14 1/2, Lato 5 mill. Daourie.

Clytus pantherinus. Hummel, Essais IV, page 66, N° 7, 1825.

119. *Xylotrechus adspersus.*

Fuscus, testaceo-tomentosus ; thorace globoso ; singulo elytro, apice rotundato, maculis sex testaceis.

Longo 12, Lato 4 1/2 mill. Sibérie (Barnaul).

Clytus adspersus. Gebl. (Ledebour, p. 181), Bull. Mosc. 1848, p. 392.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 261, N° 54.

De la collection de l'auteur.

120. *Xylotrechus Grayi.*

Niger ; prothorace maculis 12 aureis angulatis decorato, duabus infra, decem supra ; elytris nigro ferrugineoque variegatis, albo fulguratis ; antennis articulis sex ultimis albis ; corpore subtus plagis albis, pedibus mediis et posticis, femoribus tibiisque basi, rubris.

Long° 16 1/2 mill. Chine sept.

Clytus Grayi. Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 261, N° 56, pl. VI, fig. 4.

Gebler (Ledebour, p. 182) Bull. de Mosc. 1848. p. 394.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 269, N° 86.

121. *Xylotrechus capricornis.*

Niger, albo hirtus ; thorace globoso, antennis pedibusque ferrugineis ; thorace punctis duabus, elytris puncto, linea antrorsum sinuata alteraque subobliqua transversa, flavis.

Long° 12, Lat° 4, Sibérie (Irtisch, Oural).

Clytus capricornis. Gebl. (Ledebour, p. 182), Bull. de Mosc. 1848, p. 394.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 269, N° 86.

Clytus borealis. (Kinderm.)

Type dans la collection de M. le comte de Mniszech.

122. *Xylotrechus hircus.*

Niger ; thorace globoso basi lituris duabus albis ; elytris basi castaneis, lineolis duabus obliquis albidis.

Long° 10 1/2 - 11, Lat° 3 1/2 - 4 mill. Sibérie.

Clytus hircus. Gebl. in Hummel, Ess. ent. IV, p. 54, N° 17, 1825.

Lap. et Gory, Mon. p. 60, pl. 12, fig. 70.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 270, N° 89.

De la collection de l'auteur.

123. *Xylotrechus fuscipennis.*

Punctulatus, rugulosus, niger ; capite carinis tribus ; antennis brevibus ; prothorace rotundato, punctis septem (2, 2, 3) limboque

antico infra, albis ; scutello linea alba ; elytris recte truncatis, fuscis, fasciis duabus albis, oblique positis, maculis duabus lateralibus nigris, ad apicem infuscatis ; lateribus corporis infra punctulis duobus fasciisque duabus albis ; femoribus rubris.

Long° 15. Lat° 3 mill. Batchian.

Plus ou moins finement ponctué et rugueux, noir. *Tête* arrondie, tricarénée, blanche en devant sur le milieu. *Yeux* d'un brun roux. *Antennes* dépassant à peine la base du prothorax, de grosseur moyenne, noires, à dernier article roux au sommet. *Prothorax* arrondi, fortement rugueux, noir, marqué de sept taches blanches (2, 2, 3) : les quatre premières arrondies et les trois basales allongées, avec le bord antérieur sur le côté blanc. *Ecusson* offrant une ligne blanche. *Elytres* coupées droit au sommet, fauves, ornées de deux bandes blanches obliques parallèles : 1re partant de la marge, dirigée vers l'écusson ; 2e médiane, rapprochée de la précédente ; 2 taches marginales noires : 1re partant du sommet de l'épaule, élargie en arrière sur le dedans, 2e sise entre les deux bandes ; sommet apical rembruni. *Corps* ayant en dessous une bandelette blanche sur le *Métasternum* et une au bord postérieur du 1er segment abdominal ; plus deux petits points de même couleur : l'un en dehors de la hanche antérieure, l'autre sur chaque côté de la poitrine. *Cuisses* ferrugineuses, à villosité grise ; genoux noirs, les postérieurs limités au sommet des étuis.

Par sa forme et vu surtout en dessous, cet insecte ressemble assez à un *Stenopterus* amplifié et formera probablement un genre propre.

Des collections de MM. Mniszech et J. Thomson.

124. *Xylotrechus aper.*

Subangustus, brevis, niger, pube cana suberecta sat dense vestitus ; capite carinis tribus approximatis, medio atque in fronte nigro ; palpis piceis ; oculis nigro-brunneis ; antennis nigris usque ad apicem crassis, planis ; prothorace elongato, cinereo, linea longitudinali nigra ; scutello albo ; elytris postice sensim attenuatis, apice truncatis ac extus breviter spinosis, nigris, vitta suturali ante et post medium bifida fossulaque humerali elongata,

canis ; in ♀ notulis duabus lateralibus ejusdem colori ; lateribus corporis albis ; pedibus nigris, femoribus posticis basi arcuatis, elongato-clavatis, corpore longioribus.

Longo 9 - 11, Lato 2 1/2 - 3 mill. India (Neelgheries.)

Un peu étroit, assez court, noir, recouvert d'un poil grisonnant et cotonneux, légèrement élevé et couché. *Tête* arrondie, noirâtre au milieu et sur le front. *Palpes* d'un brun de poix. *Yeux* arrondis, brièvement échancrés en dessus, d'un brun noirâtre. *Antennes* atteignant le quart antérieur des étuis, noires, allant en s'épaississant insensiblement jusqu'au sommet à partir du 5e article, planes en dessus. *Prothorax* subovalaire, tronqué aux extrémités, gris, marqué d'une ligne longitudinale noire qui s'élargit un tant soit peu en arrière. *Ecusson* rond, blanc. *Elytres* allant en s'amincissant vers l'extrémité, tronquées, brièvement épineuses sur l'angle externe, noires, ornées d'une ligne suturale bifurquée en arrière, avant et après le milieu, et d'un trait huméral ; tous sont formés de poils grisonnants ; la ♀ ayant deux taches latérales de même couleur. *Corps* en dessous noir avec les côtés blancs. *Pattes* noires ; cuisses postérieures en massue effilée, dépassant les élytres du tiers de leur longueur ; genoux postérieurs brièvement bidentés.

J'ai vu trois exemplaires de cette espèce ; l'un fait partie de la collection de M. Guérin-Méneville et les deux autres appartiennent à celle de M. J. Thomson.

AMAURÆSTHES (1) Nov. Gen.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX :

Corps ailé, modérément étroit, assez court, parallèle, finement granuleux, de couleur sombre, à pubescence courte. *Tête* aussi large que longue, tronquée au devant, arrondie, sillonnée au milieu. *Palpes* submoniliformes, à dernier article presque conique. *Lèvre* étroite, transverse, rectiligne en avant. *Chaperon* présentant en devant trois échancrures légèrement arquées ; la médiane

(1) ἀμαυρός, sombre ; εσθὴς, vêtement.

plus large. *Yeux* arrondis, peu saillants, lunulés en dessus. *Antennes* minces, atteignant le milieu des élytres, de onze articles : 1er grand, un peu arqué, subcylindrique, 2e au moins 2 fois 1/2 aussi court que le 3e, 5e un peu moins grand que le 3e, 4e, 6e et 7e égaux en longueur, 8e, 9e et 10e à peine plus longs que larges, 11e ovoïde, terminé en pointe. *Prothorax* allongé, régulièrement arrondi et convexe en longueur, un peu élargi vers les 2/3 postérieurs, à troncature presque droite en avant et en arrière, avec un rebord et un sillon étroits, légèrement sinueux en regard des yeux, couvert d'une granulation serrée et de petits tubercules tant en dessus qu'en dessous. *Ecusson* grand, semi-arrondi. *Elytres* deux fois 1/2 aussi longues que le prothorax, plus larges que ce dernier, arrondies sur l'épaule et sur chaque extrémité, un tant soit peu atténuées vers le sommet, modérément convexes. *Abdomen* de cinq segments, le 1er est le plus grand. *Sternum* ample, aplani, coupé droit en arrière, élargi sur les côtés antérieurs. *Hanches antérieures* de médiocre grosseur, globuleuses. *Cavités cotyloïdes* circulaires. *Pattes* de moyenne longueur ; *Cuisses* assez renflées, scabres ; postérieures dépassant les étuis du quart de leur longueur, arquées à leur naissance ; genoux postérieurs évasés en cintre et à peine bidentés ; *Jambes* postérieures minces, un peu élargies sur l'extrémité, terminées par deux ergots droits et dont l'interne est plus développé ; *Tarses* antérieurs et médians à 1er art. conique, 2e triangulaire, 3e bilobé ; le 1er des postérieurs est trois fois aussi long que les suivants réunis ; la plupart sont garnis sur les côtés de cils serrés ; *Crochets* grands, simples, arqués.

Ce genre est assez rapproché des *Xylotrechus ;* il en diffère en ce que la tête n'offre point de carènes, et par des antennes plus longues.

125. *Amauraesthes fuliginosus.*

Coriaceus, pube tenui albidula, præsertim infra, tectus ; elytris aliquoties ad basin pallidioribus ; prothorace dorso late asperato ; elytris fasciis tribus anguste albis : 1a arcuata ante 2a post medium, medio interrupta et ad suturam circumflexa, 3a obliqua ante apicem.

Longo 10, Lato 3 1/2, 4 mill. Ind. bor. Thibet (Almorah).

Finement chagriné, d'un brun de suie, recouvert, surtout en dessous, d'une pubescence grise et légère. *Tête* sillonnée au milieu. *Antennes* atteignant presque le milieu des étuis, d'un brun luisant sur les quatre premiers articles, d'un brun terne et cendré sur les suivants. *Prothorax* couvert en dessus, sur une assez grande largeur, de petits tubercules. *Ecusson* large, semi-arrondi. *Elytres* ornées de trois bandes blanches étroites : 1re située avant le milieu, partant de la marge en décrivant un petit crochet, arrondie au centre et remontant le long de la suture jusqu'à l'écusson ; l'espace compris entre la base et cette bande est quelquefois d'un fauve clair, avec une nuance obscure vers sa limite inférieure ; 2e bande placée au-delà du milieu, oblique, interrompue, et continuée ensuite jusqu'à la suture, formant avec sa semblable un trait circonflexe ; 3e aussi oblique, plus rapprochée du sommet que de la bande. *Pattes* luisantes, chagrinées, à pubescence grise; cuisses médianes plus courtes et plus renflées, postérieures un peu aplaties sur le côté.

J'ai acquis, à Londres, trois exemplaires de cette espèce.

126. *Amauraesthes subdepressus.*

Dense et breviter pilosus, planulus, luteo-fuscus, infra albidus ; antennis lurido-cinereis, sat elongatis ; capite rotundato, macula media nigra; prothorace elongato, convexo, ruge et aspere punctato præsertim ad dorsum posticum, puncto nigro post marginem anticum ; scutello luteo ; elytris subplanis, singulis maculis tribus, (duabus infra basin, 3a ultra, transversa, triangularis) quarum intervallo fusco, fasciisque duabus nigris, tertia parte apicali lurido-fusca ; corpore infra immaculato, leucophæo ; tarsorum posticorum articulo 1° longissimo.

Longo 13, Lato 2 3/4 mill. Sylhet.

D'un jaune verdâtre, varié de fauve clair ou de roux, d'un blanc terreux en dessous. *Tête* arrondie, un peu plus longue que large, tronquée en devant, convexe sur le front, marquée au milieu d'une tache noire allongée, présentant une faible fossette en arrière. *Palpes* bruns, pâles sur la troncature. *Yeux* bruns, lunulés au sommet interne. *Antennes* dépassant le milieu des étuis, modérément épaisses, d'un gris blanchâtre; 3e, 5e et 6e articles égaux, plus allongés que les autres. *Prothorax* allongé,

convexe, hérissé de poils blonds et offrant à travers la pubescence épaisse qui le recouvre une sorte de rugosité ; une tache noire et ronde est placée sur le milieu près du bord antérieur. *Ecusson* grand, semi-arrondi, jaune. *Elytres* plus aplanies que de coutume, offrant sur chaque étui trois taches antérieures, noires : 1re sur le calus huméral ; 2e triangulaire, appuyée sur l'écusson ; 3e au-dessous, transverse, presque triangulaire ; l'espace qui les sépare est fauve ; en outre 2 bandes noires : 1re vers le milieu, émettant en marge une pointe parallèle à la marge, avancée anguleusement en dessus sur la suture ; 2e peu après, raccourcie des deux côtés et arquée en dessus ; l'espace qui existe entre ces deux bandes en dessine deux autres de couleur jaune, dont la 1re commence à l'épaule, suit la marge, se recourbe vers le milieu et se rend sous l'écusson, la 2e est élargie en suture ; le tiers apical tourne au jaune roux. *Abdomen* avec le bord inférieur des segments étroitement bruns. *Pattes* postérieures dépassant les étuis du quart de leur longueur ; cuisses brunes, un peu aplanies sur le côté, longuement effilées ; *Jambes* et *Tarses* roux : 1er article des postérieures ayant plus du double de la longueur des suivants réunis.

Des collections de MM. Mniszech, J. Thomson et de la mienne.

127. *Amauraesthes arciferus.*

Supra luteus, infra leucophæus ; elytris fasciis tribus nigris : 1a arcuata, ex humero prope suturam recurva et ad marginem ducta, 2a tenui extus et intus ampliata, cum 3a ante apicem rectis.

Longo 11, Lato 4 mill. Ind. or.

D'un jaune faiblement ochracé en dessus, d'un jaune pâle en dessous. *Antennes* et *Pattes* cendrées. *Tête* offrant entre les antennes deux élévations en forme de V. *Yeux* d'un brun rougeâtre. *Prothorax* allongé, régulièrement arrondi sur sa longueur, droit aux extrémités, étroitement rebordé et sillonné en avant, déclive et aminci en arrière. *Ecusson* semi-arrondi, marqué d'une tache noire sur la base. *Elytres* à troncature presque droite, à angles un peu avancés, ornées de trois bandes noires : 1re arquée, partant du calus huméral, ayant sa courbure près de la suture et se terminant vers la marge ; 2e médiane, mince, directe, élargie

extérieurement et reliée en dessus à l'arceau, anguleuse en dessous sur la suture ; 3e également droite. *Pattes* d'un gris brunâtre, cuisses postérieures dépassant de peu les étuis.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

128. *Amauraesthes incurvatus.*

Supra luteolus, infra sulphureus ; ore, antennis æqualiter crassis, pedibusque ferrugineis ; capite carinula media sulcata ; prothorace punctis quatuor transverse positis, lineola media elytrorumque fasciis quatuor valde arcuatis (duabus primis posticc-duabus posticis antice curvatis), nigris.

Longo 10 1/2, 12, Lato 3, 3 1/2 mill. Chine (Hong-Kong.)

D'un jaune soyeux en dessus, de couleur soufre en-dessous. *Tête* arrondie, un peu plus longue que large, d'un jaune verdâtre, marquée de deux carènes noires, raccourcies, placées côte à côte, avec sillon au sommet. *Bouche*, *Antennes* et *Pattes* ferrugineuses. *Yeux* d'un brun rougeâtre, faiblement lunulés au dessus du milieu interne. *Prothorax* soyeux, allongé, arrondi, droit aux extrémités, marqué de quatre points noirs assez petits, disposés en ligne transverse, avant le milieu, et d'une ligne raccourcie, de même couleur ; base étroitement frangée d'un jaune pâle. *Ecusson* large, semi-arrondi, de couleur soufre. *Elytres* un peu élargies en avant, arrondies sur l'épaule, un tant soit peu atténuées jusqu'au sommet, à troncature sinueuse, ayant l'angle externe aigu, ornées de 4 lignes noires, minces et arquées : 1re partant du calus huméral, se recourbant en dessous et prolongée au-delà du centre de l'étui ; 2e appuyée à la marge, décrivant une courbe étroite et assez longue, se terminant près de la suture à la hauteur de son début ; 3e et 4e placées au-delà du milieu, affectant toutes deux la même forme, arquées en arrière, mais cette dernière présente un petit crochet, détaché un peu plus bas en marge. *Cuisses* assez épaisses, à massue effilée ; postérieures dépassant à peu près du quart de leur étendue le sommet des étuis ; genoux postérieurs brièvement biépineux.

Deux exemplaires font partie de la collection de M. J. Thomson.

ISCHNODORA (1) Nov. Gen.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX :

Corps ailé, étroit, allongé. *Tête* longue, tronquée. *Palpes* labiaux à dernier article en cône renversé; le dernier des *Maxillaires* subcylindrique, tronqué. *Lèvre* et *Chaperon* étroits, transverses. *Yeux* moyens, arrondis, lunulés en dessus au côté interne. *Antennes* de médiocre grosseur, allant insensiblement en grossissant, à massue allongée, peu épaisse, limitées un peu avant le milieu des élytres, de onze articles : les 3e et 5e sont les plus grands. *Prothorax* cylindrique, étroitement sillonné et rebordé en avant, légèrement cintré en arrière. *Ecusson* semi-arrondi, régulier. *Elytres* allongées, un peu planes, à épaules obtusément rectangulaires, parallèles, coupées droit à l'extrémité. *Pattes* assez longues, grêles; cuisses effilées; postérieures un peu plus développées, dépassant à peine le pygidium; tarses postérieurs à 1er article du double plus long que les suivants réunis, 2e en cône allongé, 3e étroitement bilobé; crochets assez développés. *Sternum* plan, en carré long, tronqué en arrière. *Hanches antérieures* oblongues, transverses. *Cavités cotyloïdes* circulaires, anguleuses en dehors.

Ce genre devra prendre place avant nos *Sphegestes* dont il a la forme, mais le corps est étroit et long.

129. *Ischnodora macra.*

Angusta, elongata, nigra, cinereo-induta, minute coriacea; prothorace cylindrico, antice posticeque recto, griseo-pubescente, granulato, fascia media obsolete nigra, limbo basali anguste albo; scutello, elytrorum fasciis tribus (1a arcuata incipiente infra scutellum secundum suturam et ad marginem ducta, 2a ultra medium integra subobliqua, 3a apicali), pectore maculis tribus abdomineque fasciis quatuor, albis.

Longo 12 1/2, Lato 2 mill. Indes or.

(1) ἰσχνός, amaigri, décharné; δορά, peau.

Très-étroite et longue, noire, recouverte de cendré et d'une pubescence grise qui, sur le prothorax, est plus apparente. *Tête* assez large, prolongée en dessous, étroite, transverse et légèrement convexe sur le front; une petite carène est placée au milieu des antennes. *Yeux* roux. *Antennes* d'un noir cendré. *Prothorax* fortement chagriné, cylindrique, coupé droit aux extrémités, traversé vers le centre par une bande noire peu distincte, à base étroitement marginée de blanc ainsi qu'en dessous. *Elytres* ornées de trois bandes blanches étroites, entières : la 1re part de la suture au-dessous de l'écusson, se recourbe et rejoint la marge en se relevant en pointe un peu au-dessus; la 2e légèrement oblique remonte un tant soit peu sur la suture; la 3e terminale est plus large, mélangée de cendré; sa bordure antérieure est oblique et s'élargit en dedans. *Metasternum*, une bande postérieure anguleuse sur la poitrine et quatre bandes abdominales de couleur blanche.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

SPHEGESTHES Nov. Gen.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX :

Corps ailé, étroit, modérément allongé, subcylindrique, ponctué, velu, noir, orné de bandes jaunes ou blanches. *Tête* arrondie, un peu plus longue que large, tronquée carrément en avant. *Palpes* courts, à dernier article tronqué, sub-triangulaire et plus ou moins rétréci ou élargi au sommet. *Lèvre* et *Chaperon* transverses. *Mandibules* assez robustes, triangulaires, arquées et aigues au sommet, simples et tranchantes en dedans. *Yeux* arrondis, profondément lunulés en dessous en dedans. *Antennes* modérément épaisses, de grosseur égale, n'atteignant que le tiers ou le quart antérieur des étuis, de onze articles : 3e et 5e grands, les 3 suivants un peu plus courts, le dernier cylindrique, subitement aminci et terminé en pointe. *Prothorax* court, large, globuleux, très-densément chagriné, à frange jaune sur le bord antérieur et postérieur. *Ecusson* triangulaire ou semi-arrondi, jaune. *Elytres* un peu plus larges que le prothorax, parallèles,

(1) σφήξ, guêpe; ἐσθής, vêtement.

longitudinalement convexes, arrondies sur chaque extrémité ou tronquées obtusément au sommet. *Pattes* de moyenne longueur; cuisses à massue effilée, les postérieures dépassant les étuis du tiers ou du quart de leur étendue; genoux postérieurs étroitement carrés; jambes droites, terminées par 2 ergots raides, aigus, et dont l'interne est un peu plus court; tarses à 1er article des médians, et surtout des postérieurs, du double plus long que les suivants réunis; crochets simples, arqués, aigus. *Hanches antérieures* globuleuses. *Cavités cotyloïdes* oblongues, transverses, anguleuses en dehors. *Sternum* allongé, parallèle, arrondi en devant, tronqué au sommet et quelquefois échancré en dedans. *Abdomen* de 5 segments décroissant de grandeur, les 4 premiers ornés de bandes jaunes.

Devront rentrer dans ce genre les *Clytus gazella* Lin, *arietis rhamni* et *temesiensis* Germ. *lama* Muls. *clavicornis* Reiche, comme espèces européennes; et les *Cl. marginicollis* Lap. et Gory, (*vespoides* Dej.) et *arvicola* Ol. (*hamatus* Say, *capreolus* Dej.), de l'Amérique du Nord.

130. *Sphegesthes ciliciensis.*

Affines certe *Clyto rhamni* Germ., creberrime punctulatus, coriaceus, niger, nitidus; margine tenui antico et postico prothoracis, scutello, elytrorumque fasciis duabus luteis (1a antice ad suturam angulata), antennis pedibusque ferrugineis.

Longo 7, Latis 1 2/3 mill. Caramanie, (Tarsous).

Voisin du *Clyt. rhamni* Germ.; d'un noir profond, un peu brillant, offrant une ponctuation fine, serrée et chagrinée. *Tête* tronquée, offrant sur le devant un léger sillon longitudinal paraissant glabre. *Palpes*, *Lèvre*, *Antennes* et *Pattes* de couleur ferrugineuse. *Chaperon* luisant sur son bord, légèrement cintré. *Prothorax* globuleux, chagriné, étroitement frangé de poils d'un jaune pâle en avant et en arrière. *Ecusson* sub-arrondi, aigu au sommet, jaune, à base noire. *Elytres* n'ayant que deux bandes jaunes: 1re arquée, commençant à la marge au tiers antérieur, anguleuse sur le haut de la suture; 2e au-delà du milieu, un peu oblique, s'arrêtant près de la marge et de la suture; sommet arrondi sur la suture, noir; calus huméral petit, élevé, lisse, portant en dedans une dépression carrée. *Sternum*, *Métasternum*, une

tache latérale sur la poitrine, et trois bandes abdominales, de couleur blanche. *Pattes* revêtues d'une pubescence blonde assez fournie ; cuisses rugueusement ponctuées.

Cette espèce m'a été donnée par M. Wachanru, qui l'a rapportée de son voyage en Caramanie.

On pourrait supposer que cet insecte n'est qu'une variété du *Clyt. rhamni* Germ., dont le point huméral et la bande apicale des élytres feraient défaut, mais ici la forme de la tache du sternum est terminée en pointe, et le chaperon est cintré.

131. *Sphegesthes capra.*

Ater, thorace globoso, antennis, tibiis tarsisque fulvis, elytris fasciis flavis (secunda antrorsum arcuata) apice rotundatis, muticis.

Long° 12 1/2, Lat°. 2 mill. Sibérie.

Callidium capra. Germar, Nov. Spec. Ins. 518.
Lap. et Gory, Mon. p. 61, pl. 12, fig. 71.
Ad. White Cat. Brit. Mus. p. 269, N° 88.

Clytus sibiricus. Dej. Cat. 3e éd. p. 356.

De la collection de l'auteur.

Epodus, J. Thomson.

Corps ailé, étroit, allongé. *Tête* aussi longue en arrière qu'en avant, tronquée et carrée antérieurement, munie de deux petits tubercules entre les antennes. *Palpes labiaux* à dernier article en cône renversé court et étroit, celui des *Maxillaires* subcylindrique, tronqué. *Mandibules* simples, moyennes, étroites, arquées, aigües. *Yeux* oblongs, élargis par le bas sur le devant, profondément lunulés en dessus vers le milieu interne. *Antennes* un peu plus longues que le corps, de onze articles allongés : 3e à 5e faiblement noduleux au sommet, suivants aplanis, étroits, 3e très-long muni d'une petite épine. *Prothorax* allongé, étroit, hautement globuleux en dessus, droit et étroitement rebordé en avant, aminci et cintré sur la base qui, sur le dedans de l'angle, est coupée obliquement en arrière. *Ecusson* allongé, terminé en pointe. *Elytres* étroites, deux fois aussi longues que le prothorax, rectangulaires et élevées sur l'épaule, faiblement amincies vers

le milieu latéral, profondément échancrées et épineuses sur l'angle externe ; le sommet de la suture est avancé et arrondi. *Pattes* antérieures rapprochées ; cuisses subitement renflées vers l'extrémité, amincies à leur naissance, les postérieures un peu moins longues que les étuis ; genoux inermes ; jambes arrondies, un peu renflées sur le sommet, terminées par deux ergots droits et petits ; tarses antérieurs à 1er article conique, 2e triangulaire, 3e étroitement bilobé, le 1er des postérieurs est aussi long que les suivants réunis ; crochets simples, rapprochés, aigus. *Sternum* aplani, étroit, cambré en devant et muni d'un petit tubercule, tronqué droit en arrière. *Hanches antérieures* saillantes, subglobuleuses, concaves au-dessous de l'insertion de la patte ; *cavités cotyloïdes* circulaires, uni-anguleuses sur le côté.

Par la forte convexité dorsale du prothorax, le renflement subit de ses cuisses et la profonde échancrure des élytres ce genre diffère de tous ceux de cette famille : il a quelque rapport avec les *Meropachys*, mais ceux-ci ont le prothorax fortement étranglé près des extrémités et anguleusement épineux de chaque côté.

152. *Epodus humerosus.*

Cinereus ; prothorace valde globoso, ad basin anguste albido ; elytris subparallelis, profunde emarginatis, extus uni-spinosis, nigris, fasciis tribus albidis : 1a et 2a antice posticeque ad suturam modice angulatis ; abdomine nigro, fascia media alba ; pedibus nigricantibus, femoribus subito clavatis.

Longo 10, Lato 3 mill. Indes or.

Etroit, allongé, cendré. *Tête* tronquée en devant. *Antennes* d'un brun noirâtre. *Prothorax* finement chagriné, à base étroitement frangée de blanc. *Ecusson* anguleux au sommet, blanc. *Elytres* à épaules saillantes, noires, ornées de trois bandes blanchâtres placées à distance égale : 1re et 2e (médiane) réunies sur la suture, un peu anguleuses sur celle-ci tant en avant qu'en arrière ; 3e plus étroite, placée entre la précédente et le sommet. *Poitrine* cendrée. *Abdomen* d'un noir luisant, offrant une bande blanche et soyeuse sur le 2e segment. *Pattes* noires, recouvertes de cendré, minces et rougeâtres à leur base ; cuisses subitement renflées, les postérieures un peu plus courtes que les étuis.

Unique dans la collection de M. J. Thomson.

OLIGOENOPLUS (1) Nov. Gen.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX :

Corps ailé, allongé. *Tête* obliquement tronquée de bas en haut, un peu élevée de chaque côté sur la base des antennes, avec un léger sillon entre ces dernières. *Palpes* minces, à dernier article en cône renversé. *Yeux* arrondis en dessous, lunulés en dessus et avancés en pointe sur le sommet postérieur. *Antennes* minces, de grosseur égale, dépassant à peine le milieu des élytres dans les deux sexes, de onze articles : le 3e est le plus grand, le 4e d'un quart plus court que le précédent, les 7e, 8e et 9e égaux, un peu plus allongés, 11e cylindrique, à pointe obtuse ; le 3e article chez le ♂ est brièvement épineux au sommet ; cette particularité manque chez la ♀, l'épine du 4e article est tellement courte qu'on ne la distingue qu'à peine. *Prothorax* globuleux, resserré sur la base, étroitement rebordé en avant et droit sur les extrémités. *Ecusson* semi-arrondi, large et étroit. *Elytres* parallèles, arrondies et un peu rétrécies sur le sommet, à épaules élevées et obtusément rectangulaires. *Pattes* moyennes, assez grêles à leur naissance ; cuisses modérément renflées du tiers vers l'extrémité ; genoux postérieurs inermes, n'atteignant pas complètement le sommet des étuis ; jambes postérieures arquées, terminées par deux éperons égaux. *Sternum* aplani, en carré long, coupé droit en arrière. *Hanches antérieures* petites, globuleuses, déprimées en dessus. *Cavités cotyloïdes* circulaires, anguleuses en dehors.

Le type de ce genre a beaucoup d'analogie avec l'*Anaglyptus mysticus* Fab. ; il ne s'en distingue que par l'épine du 3e article des antennes qui n'existe que chez le ♂.

133. *Oligoenoplus ventralis.*

Griseo-fuscus ; antennis nigro-cinereis, articulo 3° ♂ ad apicem breviter spinoso ; prothorace rotundato, linea longitudinali nigra, ad basin anguste luteo ; elytris apice rotundatis, fasciis quatuor nigris : 1a arcuata, ex humero ad scutellum ducta, 2a et 3a ad

(1) ὀλιγος, peu ; ενὸπλος, armé.

suturam interdum junctis, 4ª intus abbreviata; pectore abdomineque luteo-albidis, segmentis medio nigro-fasciatis.

Longo 10, 11, Lato 2 3/4 - 3 mill. Neelgheries.

D'un gris fauve, jaunâtre ou verdâtre. *Tête* sillonnée en avant. *Yeux* bruns. *Antennes* légèrement pubescentes, d'un brun obscur, recouvertes de cendré; le 3e article du ♂ est le plus long et a son sommet uni-épineux, celui de la ♀ est privé de cette petite épine. *Prothorax* allongé, arrondi, faiblement rebordé aux extrémités; la base est très-peu cintrée sur le dedans, et étroitement jaune, avec une ligne longitudinale noire. *Ecusson* arrondi. *Elytres* plus larges que le prothorax, 3 fois 1/2 aussi longues, arrondies sur chaque extrémité, ornées de quatre bandes noires: la 1re part du calus huméral, descend un tant soit peu et se dirige obliquement sur l'écusson; la 2e, qui commence au-dessus de la marge, est proche de la précédente; la 3e, qui est arquée sur son bord inférieur, se lie assez largement à la 2e par la suture; la 4e et dernière, située entre la 3e et le sommet, se rapproche beaucoup plus de la marge que de la suture; on aperçoit vers l'extrémité une série de petits points noirs le long de la suture. *Poitrine* et *Abdomen* d'un blanc jaunâtre; le dernier porte sur le milieu de chacun des segments une tache transverse d'un noir luisant. *Pattes* d'un noir cendré, les postérieures plus courtes que le corps.

Une variété ♂ est pâle (c'est probablement un exemplaire nouvellement éclos) et revêtue d'un duvet cendré qui devient verdâtre sur les bords du prothorax; la 1re bande, la 2e et la 4e sont à peu près identiques avec le type, seulement la 2e n'offre qu'un trait mince qui est à peine interrompu au centre.

La ♀ présente les différences suivantes sur l'élytre: la 1re bande offre un trait élargi transverse et arqué, à courbure tournée vers le bas; la 2e et la 3e bandes sont reliées entr'elles non seulement du côté de la suture, mais aussi par une ligne en marge; son centre porte une tache jaune en carré long, assez mal tracée.

Cette espèce offre un grand nombre de variétés; le ♂ est ordinairement d'un jaune pâle et la ♀ d'un gris verdâtre.

De la collection de M. Guérin-Méneville et de celle de l'auteur.

134. *Anaglyptus caucasicus.*

Rugulose punctatus, cinereo-albus; antennis nigro-annulatis; prothorace rotundato, supra nigro; elytris nigris, singulis maculis septem albis.

Long° 16, Lat° 5 mill. Caucase.

Clytus caucasicus. Motsch. Col. du Caucase, p. 11, pl. 1, fig. 6.

Cet insecte fait partie de la collection de M. le comte Mniszech. On le rencontre ordinairement sur les fleurs du *Chærophyllum bulbosum.*

135. *Clytellus methocoides.*

Cyaneo-niger, pronoto striato-punctato; elytris basi carneo-castaneis, rude oblongo-punctatis, ultra basin glaberrimis, nigro-cyaneis, nitidissimis, laevibus, apice albo-hirtis.

Long° 5 mill. Hong-Kong.

Clytellus methocoides. Westw. Trans. Ent. Soc. Lond. II, part. 7, p. 9, pl. 12, 1853.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 291, 1.

136. *Clytellus Westwoodii.*

Ater, glaber, nitidissimus; elytris elongatis, subparallelis, bigibbosis, apice albo-hirtis.

Long° 8 mill. Borneo.

Clytellus Westwoodii. Pascoe, Trans. Ent. Soc. Lond. vol. IV, part. IV, p. 97.

EPIPEDOCERA (1) Nov. Gen.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX :

Corps ailé, aplani, noir ou rouge, orné sur les élytres d'une bande médiane élevée, étroite, glabre, de couleur d'ivoire, offrant en dessus une ponctuation forte, reticulée ou âpre. *Tête* assez large, allongée, inclinée et coupée obliquement au bout, élevée entre les antennes. *Palpes* petits, subcylindriques, tronqués à l'extrémité. *Paraglosses* assez développées, aplanies, lancéolées.

(1) επίπεδος, plan ; κερας, antenne.

Mandibules petites, assez robustes, simples, arquées et aigües au sommet. *Yeux* petits, peu saillants, arrondis, non échancrés. *Antennes* planes, de la longueur des $^2/_3$ du corps, uni-sillonnées en dessus, de douze articles : 3e à 7e longs, un peu noduleux au sommet, les suivants diminuant insensiblement de grandeur, 7-9 anguleux sur l'un des côtés, 11e offrant un angle aigu, 12e très-court et comme soudé avec le précédent, terminé en pointe obtuse. *Prothorax* aplani, circulairement aminci à sa base, obtusément avancé et arrondi vers le milieu sur chaque côté, droit en avant, ainsi qu'en arrière, mais coupé obliquement sur l'angle postérieur. *Ecusson* triangulaire, soyeux. *Elytres* planes, presque arrondies sur chaque extrémité, armées de quatre épines avec une échancrure entre chaque paire d'épines. *Abdomen* de cinq segments : 1er très-développé, les 3 suivants égaux. *Sternum* large, carré, couché en avant, élargi sur chaque côté, tronqué droit en arrière, avec un sillon longitudinal. *Hanches antérieures* globuleuses, un peu déprimées en dessus. *Cavités cotyloïdes* circulaires, présentant une échancrure anguleuse en dehors. *Pattes* robustes ; cuisses longuement renflées ; jambes arquées ; tarses à 1er article épais au sommet, conique, celui des postérieurs plus long, 2e triangulaire, 3e assez largement bilobé, le dernier mince, de la longueur du 1er ; crochets simples, aigus, arqués.

Ce genre se trouve indiqué dans quelques collections sous le nom de *Clytoïdes*, nom qui convient plutôt à une espèce ; sa forme rappelle celle d'un Callidiite et plus particulièrement d'un *Rhopalopus*.

157. *Epipedocera zona.*

Deplanata, nigra, subnitida, rugose et reticulatim punctata ; scutello albo ; elytris truncatis, singulis bispinosis, fascia eburnea ultra medium posita ; femoribus piceis.

Longo 12, Lato 4 1/2 mill. Nepaul.

Forme d'un *Rhopalopus*, aplati, d'un noir plus ou moins brillant. *Tête* ponctuée en avant, couverte de petits tubercules vers son sommet. *Antennes* plus courtes que le corps, noires, avec les 4 à 5 derniers articles gris. *Prothorax* plan, arrondi et élargi sur le milieu latéral, offrant une ponctuation arrondie

et réticulée ; un peu au-delà du centre du disque apparaît une légère élévation lisse. *Ecusson* carré, d'un blanc soyeux argenté. *Elytres* de la largeur du prothorax dans sa plus grande étendue, parallèles, tronquées et terminées chacune par deux épines ; une bande glabre, d'un jaune d'ivoire, est située au-delà du milieu et n'atteint ni la marge ni la suture ; la ponctuation est grande, arrondie, et relevée en réseau, le tiers postérieur est brillant et d'un noir bleuâtre. *Cuisses* ferrugineuses.

Cette espèce diffère de la suivante par une taille plus forte, une ponctuation plus élargie, la bande jaune des étuis, et ses cuisses ferrugineuses.

De la collection de l'auteur.

138. *Epipedocera lunata.*

Nigra ; antennis corpore brevioribus, apice crassioribus ; thorace postice constricto, crebre punctato ; scutello lanuginoso, cinereo ; elytris rude punctatis, linea utrinque media, elevata, tenui, lunata, glaberrima, albidula.

Long° 9 1/2, Lat°, 4 mill. Philippines.

Clytus lunatus, Newm. The Entomol. p. 247.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 288, N° 169.

Clytus succinctus. Dej. Cat. 3e éd. p. 357.

De la collection de l'auteur.

139. *Epipedocera affinis.*

Simillima *E. lunatæ*, confertissime et rotunde punctata, nigra, opaca ; antennis (art. quatuor ultimis cinereis), pedibus corporeque infra nitidis ; scutello, fascia media intus abbreviata in singulo elytro, macula metathoracis et pectoris, luteis vel albis ; elytris ad apicem intus oblique truncatis ac breviter quadridentatis.

Long° 9, Lat° 2 1/2 mill. Neelgheries.

Très-semblable à l'*E. lunata*, mais en différant d'abord par la bande des élytres qui, au lieu d'être entière, étroite et blanche, est jaune, élevée et plus large ; elle avoisine la marge et est limitée vers le milieu de l'étui ; l'extrémité de ce dernier

est obliquement tronquée et ne présente que deux petites épines, au lieu de deux grandes d'égale longueur, etc.

D'un noir mat, chargée d'une ponctuation ronde, relevée sur les bords, formant un réseau sur le prothorax. *Tête* granuleuse, transversalement élevée au milieu des antennes et déprimée peu après. *Antennes* d'un noir brillant, ayant les quatre derniers articles cendrés, courts et anguleux d'un côté seulement. *Prothorax* obtusément arrondi et avancé sur le milieu latéral. *Ecusson* étroit, long, jaune. *Elytres* opaques, d'un noir légèrement brillant sur le sommet; un peu au-delà du milieu se détache près de la marge une bande élevée lisse, d'un jaune d'ivoire, dont le début est mince et qui s'élargit intérieurement. *Corps* en dessous et *Pattes* d'un noir brillant; une petite tache en dehors de la hanche antérieure, une 2e sur le métathorax, enfin une 3e placée sur l'angle postérieur de la poitrine, sont d'un blanc soyeux.

M. Guérin-Méneville, l'un de mes plus anciens amis, m'a généreusement accordé le 2e exemplaire de sa collection.

140. *Epipedocera Hardwickii.*

Rufa, thorace rotundato, elytris fascia flava irregulari ornatis.

Longo 10, Lato 3 mill. Inde bor.

Clytus Hardwickii. Ad. White, Cat. Brit. Mus., p. 288, N° 168.

Clytus undulatus. Hope in Gray's Zool. Misc. p. 28 (nec Say.)

De la collection de l'auteur.

141. *Epipedocera cruentata.*

Subdepressa, atra, prothorace macula magna circa scutellum abdomineque sanguineis.

Longo 8, 9 mill., Lato 2, 2 1/2 mill. Malaca.

Clytus cruentatus. Pascoe, Trans. Ent. Soc. Lond. vol. IV, p. 239.

De la collection de M. le comte Mniszech.

142. *Epipedocera setulosa.*

Punctata, picea; prothorace confertissime granulato, margine infero usque ad angulum posticum supra elytrisque maculis duabus (una humerali, altera apicali) serieco-albidis; his fasciola

media elevata et abbreviata, eburnea ; elytris 4-spinosis, ad basin rufis, subseriatim punctatis et subsulcatis, punctis basalibus asperis, in dimidia parte postica albo-setosis.

Long° 5, Lat° 1 1/2 mill. Ceylan.

C'est la plus petite des cinq espèces de couleur de poix. *Tête* bituberculée entre les antennes. *Yeux* petits, noirs. *Antennes* ne dépassant pas le tiers antérieur des élytres, moins larges et moins anguleuses que chez les autres espèces ; 1^er^, 3^e^ à 6^e^ art. allongés, 7^e^ un peu plus court, 8^e^ à 11^e^ moniliformes. *Prothorax* globuleux, très-resserré sur la base, granuleux, à bord postérieur d'un blanc jaunâtre soyeux depuis le milieu de la base jusqu'à la hanche antérieure. *Elytres* quadri-épineuses au sommet, rousses et aplanies sur la base, ornées chacune de deux taches d'un blanc jaunâtre soyeux : l'une allongée sur l'épaule, l'autre au sommet de la marge ; une petite tache transverse, élevée, lisse, d'un jaune d'ivoire et médiane, n'atteint ni la marge ni la suture ; couvertes d'une ponctuation serrée, presque disposée en ligne, grande et scabre sur le tiers antérieur avec des sillons latéraux ; des séries de soies blanches redressées apparaissent et s'étendent sur un peu plus de la moitié postérieure. *Corps* en dessous un peu plus clair qu'en dessus, recouvert de cendré ; bord inférieur des segments abdominaux d'un blanc soyeux.

Unique dans la collection de M. le comte Mniszech.

143. *Tillomorpha mœstula.*

Griseo-holosericea, elytris singulis fascia media subtransversa, velutino-nigra, ab humero decurrente ; antennis articulo 1° elongato.

Long° 7 mill. Australie.

Tillomorpha mœstula. Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 290, N° 5.

144. *Aridæus thoracicus.*

Niger, capite antennisque fusco-rubris ; elytris macula lata baseos, fascia media apiceque cum pedibus fusco-rubris ; femoribus basi obscuris.

Long° 11, 21, Lat° 3, 7 mill. Australie (Sydney).

Clytus thoracicus. Donov. Epitome of the Ins. of New Holl.

Boisduval, Voy. de l'Astrol. Ins. tom. 2, p. 482 n° 1,

Lap. et Gory, Mon.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 266, n° 72.

Aridæus thoracicus. J. Thoms.

De la collection de l'auteur.

145. *Dere thoracica*.

Atro-cyanea, thorace miniaceo, dorsi marginibus antico et postico nigris, elytris ad suturam depressis, singulis apice emarginatis et bimucronatis.

Chine septentrionale.

Dere thoracica. Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 248, 1, pl. 18, fig. 1.

De la collection de l'auteur.

146. *Obrida fascialis*.

Nigro-purpurea ; elytris medio fascia lata aurantiaca, externe latiore ; pedibus posticis nigris, cæteris rubris, genubus tarsisque obscuris, antennarum art° 7° et 8° albis, reliquis nigris.

Long° 9, Lat° 5, mill. Australie.

Obrida fascialis. Ad. White in Stokes' Voyage ; App. 1, p. 510, pl. 2, fig. 4.

Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 888, 1.

De la collection de l'auteur.

Espèces, décrites sous le nom de Clytus, *que l'auteur n'a pas connues et dont la place reste incertaine.*

147. *Clytus ascendens*.

Angustatus ; prothorace nigricante, sub-globoso, confertim punctulato ; elytris atris, humeris fasciisque duabus (altera media, altera apicali) canis ; linea basali arcuata alba.

Long. 10 mill. Ceylan. An *Xylotrechus ?*

Pascoe, Trans. Ent. Soc. Lond. vol. IV, part. VI, pag. 239,

148. *Clytus mustela*.

Niger, elongatus ; capite, prothorace elytrisque basi rufo-brun-

neis ; elytrorum linea basali arcuata fascia postica continuata maculaque apicali oblonga, viridi-luteis.

Longo 15 mill. Borneo.

Pascoe, Trans. Ent. Soc. Lond. vol. V, part. 1, p. 27.

149. *Clytus Balyi.*

Subelongatus, fulvo-aureus ; elytris singulis maculis tribus atris ; antennis longis, setaceis ; femoribus tibiisque posticis apice fuscis ; mesosterno abdomineque pube flava argentea tectis.

Longo 12 mill. Indes or.

Hope in Gray's Zool. Miscell. p. 28 ; White Cat. 286. 158.

150. *Clytus assimilis.*

Virescens, thorace trimaculato, elytrisque nigro-maculatis.

Nepaul.

Hopé in Gray's Zool. Misc. p. 28 ; White, Cat. 285, 156.

151. *Clytus bicinctus.*

Rufus, capite nigro, thorace globoso, elytris strigis tribus undatis, albis.

India sept.

Newm. The Entom. page 246 ; White, Cat. Brit. Mus. p. 284, 151.

152. *Clytus Phidias.*

Capite, antennis, thorace pedibusque nigricantibus, pilis albidis obsitis ; elytris piceis, vitta utrinque mediana lata nigra, lineisque tribus lanuginosis albidis : 1ª sublaterali literam C mentiente, 2ª pone medium obliqua, 3ª abbreviata subapicali.

Iles Philippines.

Newm. The Entom. p. 246 ; Ad. White, Cat. Brit. Mus. p. 286, N° 159.

153. *Clytus* (*Anthoboscus* ?) *incanus.*

Niger ; elytris cinereo-signatis, utrinque linea basali, fere circulari, macula inclusa nigra, fascia lata mediana communi, altera apicali, cinereis

Iles Philippines.

Description d'un nouveau genre de Lamiaires.

ANCYLISTES.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX :

Corps ailé, ramassé. *Tête* large, tronquée en avant. *Mandibules* étroites, minces, arquées. *Lèvre* carrée. *Chaperon* largement cintré. *Yeux* espacés, petits, ronds, peu saillants, entiers. *Antennes* poilues : 1er article fort long, cylindrique, arqué, terminé par un crochet ; suivants grêles ; le 2e n'ayant tout au plus que le 5e de longueur du 3e qui égale en étendue le premier ; 4e et 5e égaux, d'un quart plus courts que les précédents ; 6e moitié moins long que le 5e ; les suivants font défaut. *Prothorax* droit aux extrémités, globuleux, inerme, fortement resserré à sa base, couvert de rides longitudinales. *Ecusson* arrondi. *Elytres* rectangulaires en dehors de l'épaule, acuminées sur l'angle huméral, courtes, assez larges, arrondies sur le sommet de la marge, presque rectangulaires sur l'extrémité de la suture, ayant de chaque côté au-dessous de la base une élévation aiguë qui se recourbe un peu en arrière. *Pattes* de moyenne longueur ; *Cuisses* minces à leur naissance, assez fortement renflées, les postérieures ne dépassant pas les étuis ; genoux simples ; jambes minces, subitement arquées à leur base, droites ; les médianes garnies sur le quart extérieur, au sommet, d'un feutre noir et court, avec un léger sillon longitudinal peu apparent sur cette partie seule ; tarses à 1er article court, conique, 2e un peu plus large que haut, 3e fortement bilobé, dernier assez long ; crochets rentrants, aigus. *Sternum* étroit, allongé, prolongé jusqu'au milieu des hanches médianes, tronqué en arrière, subitement élargi vers le haut. *Hanches antérieures* arrondies, allongées et un peu pyriformes en dessus. *Cavités cotyloïdes* oblongo-transversales, anguleuses en dehors.

L'insecte qui constitue ce genre, bien que sa forme générale rappelle un Clytide voisin des *Tittomorpha*, appartient sans aucun doute à la tribu des Lamiaires. Nous placerons ce genre près du *Beltista* Thomson (*Cosmotoma* Dej.).

Ancylistes bicuspis.

Niger, opacus ; antennis (articulo 1° curvato , uncinato) pedibusque nitidis ; prothorace globoso rugis longitudinalibus tecto ; elytris ad humerum uncinatis , infra basin bispinosis , fortiter punctatis et quadristriatis , fascia transversa tenui alba , antice quadrifida , in medio creberrime punctatis , apice lævigatis.

Long° 7, Lato 3 mill. Indes or.

Chevrol. Rev. et Mag. Zool. 1858 , p. 82 , 5.

154. *Scopodus ? bicuspis.*

D'un noir terne. *Antennes* et *Pattes* d'un noir luisant. *Prothorax* globuleux , inerme , fortement resserré sur la base , couvert de rides longitudinales. *Ecusson* arrondi. *Elytres* à base droite , rectangulaires sur le dehors de l'épaule , acuminées sur cette partie , offrant sur chaque étui, au-dessous de la base, un cône aigu à pointe dirigée en arrière ; quatre séries de points sont séparées par deux lignes longitudinales blanches; une ligne transversale de même couleur , un peu arquée, est située avant le milieu ; la partie médiane est chargée d'une ponctuation serrée et rugueuse; le quart apical est presque lisse et sa bordure supérieure présente une sorte de bande grise.

Cette singulière et charmante espèce, qui a la forme des derniers Clytides , m'a été généreusement offerte par M. Wachanru de Marseille.

LISTE MÉTHODIQUE

DES

CLYTIDES

CITÉS OU DÉCRITS DANS CE TRAVAIL.

		Pages.
1.	Callichromopsis telephoroides.	255
2.	Prothema signata.	»
3.	» funerea.	256
4.	» leucaspis.	»
5.	Plagithmisus attenuatus.	»
6.	Psilomerus angustus.	257
7.	» macilentus.	258
8.	» brachialis.	»
9.	Acrocyrta annulicornis.	259
10.	» clytoïdes.	260
11.	» semiluctuosa.	»
12.	» macilenta.	»
13.	» erythrops.	261
14.	» Brahmina	262
15.	» viverra.	»
16.	Perissus X-littera.	263
17.	» femoralis.	264
18.	» trizonatus.	265
19.	» glaucinus.	»
20.	» Andreæ.	266
21.	» myops.	267
22.	» scutellatus.	»
23.	Demonax nigrofasciatus.	269
24.	» mustelinus.	»
25.	» luridicornis.	270
26.	» Bowringii.	271
27.	» Walkeri.	»
28.	» elongatulus.	»
29.	» divisus.	»
30.	» pudicus.	272
31.	» aureicollis.	»
32.	» chrysoderes.	»
33.	» Delesserti.	273
34.	» lineola.	274
35.	» persimilis.	275
36.	Rhaphuma quadricolor.	276
37.	» fallax.	»
38.	» placida.	277
39.	» præcana.	»
40.	» quinquenotata.	278
41.	» sexnotata.	279
42.	» dimidiata.	»
43.	» geniculata.	280
44.	» trimaculata.	281
45.	» glauca.	»
46.	Rhaphuma Wiedemanni.	282
47.	» semi-scutellata.	»
48.	» dominula.	»
49.	» distinguenda.	»
50.	» russicollis.	»
51.	Sclethrus amœnus.	284
52.	» Newmanni.	»
53.	Grammographus lineatus.	286
54.	» Horsfieldii.	287
55.	Arcyphorus histrio.	288
56.	» semiclathratus.	289
57.	Chlorophorus annularis.	290
58.	» bidens.	291
59.	» cognatus.	»
60.	» agnatus.	292
61.	» nepos.	293
62.	Anthoboscus ornatus.	294
63.	» Douei.	»
64.	» 14-maculatus.	295
65.	» Faldermanni.	296
66.	» marginalis.	»
67.	» macausnensis.	297
68.	» austerus.	»
69.	» japonicus.	298
70.	» plebejus.	299
71.	» melancholicus.	»
72.	» mœstus.	300
73.	» gracilipes.	301
74.	» lituratus.	»
75.	» sumatrensis.	302
76.	» latefasciatus.	»
77.	» perspicillum.	»
78.	» nigerrimus.	»
79.	» quinquefasciatus.	303
80.	» signaticollis.	»
81.	» oppositus.	304
82.	» Curtisii.	305
83.	» Durvillei.	»
84.	» damascenus.	»
85.	» 13-maculatus.	»
86.	» Ottii.	306
87.	» alboscutellatus.	307
88.	» Sapho.	»
89.	» albicinctus.	»
90.	» maculicollis.	308

	Pages.
91. Anthoboscus rubricollis.	308
92. » alphabeticus.	»
93. Clytus lugubris.	309
94. » Bobelayei.	»
95. » scalaris.	310
96. » floralis.	»
97. » sexmaculatus.	»
98. Xylotrechus. altaicus.	313
99. » chinensis.	»
100. » imperfectus.	»
101. » subditus.	314
102. » quadripes.	315
103. » javanicus.	316
104. » vicinus.	»
105. » carinifrons.	»
106. » Smei.	317
107. » subscutellatus.	»
108. » siamensis.	318
109. » australis.	319
110. » crucicollis.	»
111. » ocellatus.	320
112. » Putzeysi.	»
113. » insipiens.	321
114. » Buqueti.	322
115. » filiformis.	323
116. » brevicillus.	»
117. » Ibex.	324
118. » pantherinus.	»
119. » adspersus.	»
120. » Grayi.	325
121. » capricornis.	»
122. » hircus.	»
123. » fuscipennis.	»
124. » aper.	326
125. Amauraesthes fuliginosus.	328
126. » subdepressus.	329
127. » arciferus.	330
128. » incurvatus.	331
129. Ischnodora macra.	332
130. Sphegesthes ciliciensis.	334
131. » capra.	335
132. Epodus humerosus.	336
133. Oligoenoplus ventralis.	337
134. Anaglyptus caucasicus.	339
135. Clytellus methocoides.	»
136. Clytellus Westwoodii.	»
137. Epipedocera zona.	340
138. » lunata.	341
139. » affinis.	»
140. » Hardwickii.	342
141. » cruentata.	»
142. » setulosa.	»
143. » Tillomorpha mœstula.	343
144. Aridacus thoracicus.	»
145. Dere thoracica.	344
146. Obrida fascialis.	»
147. Clytus ascendens.	»
148. » mustela.	»
149. » Balyi.	345
150. » assimilis.	»
151. » bicinctus.	»
152. » Phidias.	»
153. » incanus.	»
LAMIAIRE.	
154. Ancylista bicuspis.	347

V. — *De l'ellipsoïde.*

PAR

J.-P. MICHAËLIS,

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE DE LUXEMBOURG.

1. La recherche des propriétés de l'ellipsoïde est souvent simplifiée, si l'on représente cette surface par les équations

$$x = a\cos\alpha,\ y = b\cos\beta,\ z = c\cos\gamma.$$

α, β, γ étant les angles qu'une droite mobile fait avec les axes rectangulaires.

Ces trois équations équivalent à l'équation unique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. Si, sur une droite, à partir d'un point M, on prend les distances MC = c, MB = b, MA = a, et que l'on assujettisse cette droite à se mouvoir de manière que le point C s'appuie sur le plan XY, le point B sur le plan XZ, et le point A sur le plan YZ, le lieu géométrique du point M sera l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Car si α, β, γ sont les angles que la droite mobile fait, dans une de ses positions, avec les axes, les équations du point M seront $x = a\cos\alpha$, $y = b\cos\beta$, $z = c\cos\gamma$. —

Les équations de la droite mobile sont

$$x - a\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(z - c\cos\gamma),\ y - b\cos\beta = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(z - c\cos\gamma)$$

Les traces de cette droite sur le plan XY sont représentées par les équations $x = (a - c)\cos\alpha \quad y = (b - c)\cos\beta$.

Si l'on considère les positions dans lesquelles la droite fait avec l'axe OZ un angle constant γ, le point M décrit l'ellipse horizontale $z = c\cos\gamma$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\gamma$, et la trace horizontale C décrit l'ellipse $\frac{x^2}{(a-c)^2} + \frac{y^2}{(b-c)} = \sin^2\gamma$.

3. *Théorie des diamètres conjugués.*

Une corde parallèle au diamètre qui passe par le point ($a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$) a pour équations

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + \frac{m}{a}, \quad \ldots \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + \frac{n}{b}.$$

Les coordonnées du milieu de cette corde seront

$$\frac{z_1}{c} = -\frac{m}{a}\cos\alpha\cos\gamma - \frac{n}{b}\cos\beta\cos\gamma$$

$$\frac{y_1}{b} = -\frac{m}{a}\cos\alpha\cos\beta - \frac{n}{b}\cos^2\beta + \frac{n}{b}$$

$$\frac{x_1}{a} = -\frac{m}{a}\cos^2\alpha - \frac{n}{b}\cos\alpha\cos\beta + \frac{m}{a}$$

Pour éliminer m et n, afin d'avoir le lieu géométrique des milieux d'une série de cordes parallèles, on ajoutera ces équations, après avoir multiplié la première par cos γ, la seconde par cos β, la troisième par cos α ; ce qui donne

$$\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\cos\beta + \frac{z}{b}\cos\gamma = 0$$

On satisfait à cette relation en prenant sur l'ellipsoïde des points fournis par les coordonnées $x = a\cos\mathrm{M}$, $y = b\cos\mathrm{N}$, $z = c\cos\mathrm{P}$ pourvu que l'on ait

$$\cos\alpha\cos\mathrm{M} + \cos\beta\cos\mathrm{N} + \cos\gamma\cos\mathrm{P} = 0$$

c'est-à-dire que la droite déterminée par les angles M, N, P, qu'elle fait avec les axes soit perpendiculaire à la droite déterminée par les angles α, β, γ.

Ainsi, ayant mené par le centre une droite déterminée par les angles α, β, γ, si l'on mène par le centre un plan perpendiculaire à

cette droite, les droites menées dans ce plan par le centre feront avec les axes des angles qui satisfont à la relation $\cos\alpha \cos M + \cos\beta \cos N + \cos\gamma \cos P = o$, et fourniront des points $x = a\cos M$, $y = b\cos N$, $z = c\cos P$ situés sur l'ellipsoïde et dans un plan conjugué du point $x = a\cos\alpha$, $y = b\cos\beta$, $z = c\cos\gamma$.

Concevons maintenant un trièdre trirectangle dont le sommet se trouve au centre et dont les côtés font avec les axes les angles

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \alpha',\ \beta',\ \gamma';\ \alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$$

les points déterminés sur l'ellipsoïde par les coordonnées

$$\begin{array}{lll} x_1 = a\cos\alpha & x_2 = a\cos\alpha' & x_3 = a\cos\alpha'' \\ y_1 = b\cos\beta & y_2 = b\cos\beta' & y_3 = b\cos\beta'' \\ z_1 = c\cos\gamma & z_2 = c\cos\gamma' & z_3 = c\cos\gamma'' \end{array}$$

sont trois points conjugués, jouissant de la propriété que les cordes parallèles au diamètre qui passe par l'un de ces points sont partagées en deux parties égales par le plan des deux diamètres menés aux deux autres points. On prévoit donc que si l'on rapporte la surface à ces trois demi-diamètres obliques comme axes, et qu'on nomme a', b', c' les longueurs de ces demi-diamètres, l'équation de la surface sera nécessairement de la forme

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1.$$

Pour vérifier ce résultat par la transformation des coordonnées, observons que l'axe a' ou X′ fait avec les axes X, Y, Z des angles A, B, C tels que $x = a\cos\alpha = a'\cos A$, $y = b\cos\beta = a'\cos B$, $z = c\cos\gamma = a'\cos C$, d'où $\cos A = \frac{a}{a'}\cos\alpha$, $\cos B = \frac{b}{a'}\cos\beta$, $= \cos C = \frac{c}{a'}\cos\gamma$

L'axe b' ou Y′ fait de même avec les axes X, Y, Z des angles tels que $\cos A' = \frac{a}{b'}\cos\alpha'$ $\cos B' = \frac{b}{b'}\cos\beta'$ $\cos C' = \frac{c}{b'}\cos\gamma'$, et l'axe c' ou Z′ fait avec les anciens axes des angles tels que $\cos A'' = \frac{a}{c'}\cos\alpha''$ $\cos B'' = \frac{b}{c'}\cos\beta''$ $\cos C'' = \frac{c}{c'}\cos\gamma''$.

Les formules de transformation des coordonnées sont donc les suivantes :

$$x = x'\frac{a}{a'}\cos\alpha + y'\frac{a}{b'}\cos\alpha' + z'\frac{a}{c'}\cos\alpha''$$

$$y = x'\frac{b}{a'}\cos\beta + y'\frac{b}{b'}\cos\beta' + z'.\frac{b}{c'}\cos\beta'' \qquad (a)$$

$$z = x'.\frac{c}{a'}\cos\gamma + \gamma'.\frac{c}{b'}\cos y' + z'.\frac{c}{c'}\cos\gamma''.$$

Les angles α, β, γ ; α', β', γ', $\alpha'', \beta'', \gamma''$ étant les angles que trois droites rectangulaires entre elles font avec les trois axes rectangulaires, on a les relations

$$\left.\begin{array}{l}
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,;\ \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0\\
\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1\,;\ \cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' = 0\\
\cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1\,;\ \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0\\
\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1\,;\ \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma = 0\\
\cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1\,;\ \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\beta'\cos\gamma' = 0\\
\cos^2\gamma + \cos^2\gamma'' + \cos^2\gamma'' = 1\,;\ \cos\alpha''\cos\beta'' + \cos\alpha''\cos\gamma'' + \cos\beta''\cos\gamma'' = 0
\end{array}\right\} 1$$

d'où l'on déduit encore la relation $(\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma')^2 = \cos^2\alpha$ et ses analogues.

Au moyen des formules de transformation, et ayant égard aux relations (1). l'équation de l'ellipsoïde devient

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1$$

Observation sur l'équation du plan tangent. Il résulte de cette équation que le plan $x' = a'$ est tangent à la surface à l'extrémité de l'axe a'. En repassant aux anciens axes, on trouvera pour l'équation du plan tangent au point $(a\cos\alpha, b\cos\beta, (\cos\gamma)$ $\frac{x\cos\alpha}{a} + \frac{y\cos\beta}{b} + \frac{z\cos\gamma}{c} = 1$; ce qu'on trouve facilement en ajoutant les équations (a) après avoir multiplié la première par $\frac{\cos\alpha}{a}$ la seconde par $\frac{\cos\beta}{b}$, la troisième par $\frac{\cos\gamma}{c}$.

La normale au même point de la surface fait avec les axes principaux des angles A, B, C tels que

$$\frac{a\cos A}{\cos\alpha} = \frac{b\cos B}{\cos\beta} = \frac{c\cos C}{\cos\gamma}.$$

Il est maintenant facile de déduire des formules précédentes les trois formules principales relatives aux diamètres conjugués.

a) On a $\left.\begin{aligned} a'^2 &= a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma \\ b'^2 &= a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma' \\ c'^2 &= a^2\cos^2\alpha'' + b^2\cos^2\beta'' + c^2\cos^2\gamma'' \end{aligned}\right\}$ d'où $a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2$

b) Le triangle dont les deux côtés, issus du centre, sont b' et c' se projette sur le plan YZ suivant un triangle dont la surface, exprimée par les coordonnées des sommets, est $\frac{bc}{2}(\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma')$. La projection sur YZ du parallèlogramme dont b' et c' sont les côtés a donc pour surface

$$\text{Proj} = bc(\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma').$$

Le plan diamétral contenant les droites b' c' a pour équation $\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\cos\beta + \frac{z}{c}\cos\gamma = 0$. Ce plan fait avec le plan YZ un angle dont le cosinus a pour carré $\frac{b^2c^2\cos^2\alpha}{b^2c^2\cos\alpha + a^2c^2\cos^2\beta + a^2b^2\cos^2\gamma}$.

Si T est la surface du parallèlogramme b' c' $\sin\widehat{(b'\,c')}$, on a donc $T^2 = \frac{(\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma')^2}{\cos^2\alpha}(b^2c^2\cos^2\alpha + a^2c^2\cos^2\beta + a^2b^2\cos^2\gamma)$ ou, à cause de $(\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma')^2 = \cos^2\alpha$,

$T^2 = b'^2c'^2\sin^2\widehat{(b'\,c')} = b^2c^2\cos^2\alpha + a^2c^2\cos\beta + a^2b^2\cos^2\gamma$ . . . . . et de même

$T^{12} = a'^2\,c'^2\,\sin^{12}\widehat{(a'\,c')} = b^2\,c^2\cos\alpha' + a^2\,c^2\cos^2\beta' + a^2\,b^2\cos^2\gamma'$

$T''^2 = a'^2\,b'^2\sin^2\widehat{(a'\,b')} = b^2\,c^2\cos^2\alpha'' + a^2\,c^2\cos^2\beta'' + a^2\,b^2\cos^2\gamma''$.

De là, par les relations (1), $T^2 + T'^2 + T''^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

Observ. Nommons p la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent $\frac{x\cos\alpha}{a} + \frac{y\cos\beta}{b} + \frac{z\cos\gamma}{c} = 1$, lequel est parallèle au plan diamétral b' c', cette perpendiculaire fait avec les axes des angles tels que

$$\cos A = \frac{p}{a}\cos\alpha,\ \cos B = \frac{p}{b}\cos\beta,\ \cos C = \frac{p}{c}\cos\gamma$$

d'où $b\,c\cos\alpha = \frac{abc}{p}\cos A$, $a\,c\cos\beta = \frac{abc}{p}\cos B$, $a\,b\cos\gamma = \frac{abc}{p}\cos C$.

et l'expression de T^2 devient $T^2 = \frac{a^2b^2c^2}{p^2}$ ou $T = \frac{abc}{p}$.

D'après cela, pour les trois points conjugués, il vient

$$T + T' + T'' = abc\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}\right).$$

c) Le parallélipipède dont les arêtes sont $a'\,b'\,c'$ a pour mesure sa base T multipliée par sa hauteur p. Si l'on désigne ce parallélipipède par S, on a $S = Tp = a\,b\,c$.

4) *Propriétés diverses des diamètres conjugués et des diamètres rectangulaires.*

Si pour un point de l'ellipsoïde, déterminé par les angles α, β, γ une grandeur g est exprimée par l'équation linéaire $g = m\cos\alpha + n\cos\beta + p\cos\gamma$, et les grandeurs analogues pour les points conjugués par les équations $g' = m\cos\alpha' + n\cos\beta'\ p\cos\gamma'$, $g'' = m\cos\alpha'' + n\cos\beta'' + p\cos\gamma''$, on obtient, en vertu des relations (1) du n° précédent la relation de constance

$$g^2 + g'^2 + g''^2 = m^2 + n^2 + p^2$$

Une observation analogue s'applique à des diamètres rectangulaires.

Déduisons quelques conséquences de cette observation.

a) Si un diamètre fixe fait avec les axes les angles M, N, P, comme l'axe a' fait avec les mêmes axes les angles dont les cosinus sont $\frac{a}{a'}\cos\alpha$, $\frac{b}{a'}\cos\beta$, $\frac{c}{a'}\cos\gamma$, on aura pour l'angle V compris entre le diamètre fixe et le diamètre a', l'équation

$$\cos V = \frac{a\cos\alpha\cos M + b\cos\beta\cos N + c\cos\gamma\cos P}{a'}$$

d'où pour trois points conjugués $a'^2\cos^2 V + b'^2\cos^2 V' + c'^2\cos^2 V'' = a^2\cos^2 M + b^2\cos^2 N + c^2\cos^2 P$, c'est-à-dire que la *somme des carrés de projections de trois diamètres conjugués sur un diamètre fixe est constante.* On déduit aussi de là que la *somme des carrés des distances de trois points conjugués à un diamètre fixe est constante.*

b) Le diamètre fixe rencontre le plan tangent $\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{c}\cos\beta$

$+\frac{z}{c}\cos\gamma = 1$ en un point $x = \frac{\cos M}{D}, y = \frac{\cos N}{D}; z = \frac{\cos P}{D}$.....,

en faisant $D = \cos M \frac{\cos\alpha}{a} + \cos N \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos P \cos\gamma}{c}$.

Si l'on fait $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$,

$$\frac{1}{d} = \frac{\cos M \cos\alpha}{a} + \frac{\cos N \cos\beta}{b} + \frac{\cos P \cos\gamma}{c},$$

et pour trois points conjugués $\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d'^2} + \frac{1}{d''^2} = \frac{\cos^2 M}{a^2} + \frac{\cos^2 N}{b^2} + \frac{\cos^2 P}{c^2}$

Ainsi la *somme des carrés des inverses des segments interceptés sur un diamètre fixe par trois plans tangents conjugués est constante.*

c) Si nous considérons α, β, γ comme constants, le plan tangent intercepte sur un diamètre le segment $\frac{1}{\delta} = \cos M \frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos N \cos\beta}{b} + \frac{\cos P \cos\gamma}{c}$. Pour trois diamètres rectangulaires, on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\delta} &= \frac{\cos M \cos\alpha}{a} + \frac{\cos N \cos\beta}{b} + \frac{\cos P \cos\gamma}{c} \\ \frac{1}{\delta'} &= \frac{\cos M' \cos\alpha}{a} + \frac{\cos N' \cos\beta}{b} + \frac{\cos P' \cos\gamma}{c} \\ \frac{1}{\delta''} &= \frac{\cos M'' \cos\alpha}{a} + \frac{\cos N'' \cos\beta}{b} + \frac{\cos P'' \cos\gamma}{c} \end{aligned}\right| \text{ de là } \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta'^2} + \frac{1}{\delta''^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}.$$

Ainsi la *somme des carrés des inverses des segments interceptés par un plan tangent sur trois diamètres rectangulaires est constante pour le même plan tangent.*

d) Le plan tangent $\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\cos\beta + \frac{z}{c}\cos\gamma = 1$ rencontre les axes aux points $x = \frac{a}{\cos\alpha}, y = \frac{b}{\cos\beta}, z = \frac{c}{\cos\gamma}$.

Pour trois points conjugués on a

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} = \frac{1}{a^2}; \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y'^2} + \frac{1}{y''^2} = \frac{1}{b^2}; \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z'^2} + \frac{1}{z''} = \frac{1}{c^2}.$$

e) La trace sur le plan XY d'une normale au point $x = a\cos\alpha$, $y = b\cos\beta$, $z = c\cos\gamma$ a pour équation

$$x - a\cos\alpha = -\frac{c^2}{a}\cos\alpha \quad y - b\cos\beta = -\frac{c^2}{b}\cos\beta.$$

La portion n depuis le point de contact jusqu'au plan XY est

exprimée par $n^2 = \frac{c^4}{a^2}\cos^2\alpha + \frac{c^4}{b^2}\cos^2\beta + \frac{c^4}{c^2}\cos^2\gamma$, et en trois points conjugués $n^2 + n'^2 + n''^2 = c^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) = \text{const.}$

On peut aussi exprimer n en fonction des angles A, B, C que la normale fait avec les trois axes, puisqu'on a

$\frac{a\cos A}{\cos\alpha} = \frac{b\cos B}{\cos\beta} = \frac{c\cos C}{\cos\gamma}$, d'où

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos A}{\sqrt{a^2\cos^2 A + b^2\cos^2 B + c^2\cos^2 C}};\quad \frac{\cos\beta}{b} =$$

$$\frac{\cos B}{\sqrt{a^2\cos^2 A + b^2\cos^2 B + c^2\cos^2 C}};\quad \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{\cos C}{\sqrt{a^2\cos^2 A + b^2\cos^2 B + c^2\cos^2 C}}$$

d'où $\frac{1}{n^2} = \frac{a^2\cos^2 A + b^2\cos^2 B + c^2\cos^2 C}{c^4}$; et pour trois normales perpendiculaires entre elles.

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \frac{1}{n''^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{c^4}.$$

Obs. Pour les points de la surface où $\gamma = \text{const}$, la normale trace sur le plan XY la courbe $x = \frac{a^2-c^2}{a}\cos\alpha$, $y = \frac{b^2-c^2}{b}\cos B$ ou l'ellipse $\frac{a^2\,x^2}{(a^2-c^2)^2} + \frac{b^2\,y^2}{(b^2-c^2)^2} = \sin^2\gamma$.

f) Si un diamètre fait avec les axes les angles M, N, P, il rencontre la surface au point

$$z^2 = \frac{\cos^2 P}{\frac{\cos^2 M}{a^2} + \frac{\cos^2 N}{b^2} + \frac{\cos^2 P}{c^2}},\qquad y^2 = \frac{\cos^2 N}{\frac{\cos^2 M}{a^2} + \frac{\cos^2 N}{b^2} + \frac{\cos^2 P}{c^2}}$$

$$x^2 = \frac{\cos^2 M}{\frac{\cos^2 M}{a^2} + \frac{\cos^2 N}{b^2} + \frac{\cos^2 P}{c^2}}.$$

Pour trois diamètres rectangulaires $2d$, $2d'$, $2d''$ on a donc la relation de constance

$$\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d'^2} + \frac{1}{d''^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Corol. Si l'on prend les directions d, d', d'' pour nouveaux axes X', Y', Z' le plan passant par les extrémités de ces diamètres a pour équation $\frac{x'}{d} + \frac{y'}{d'} + \frac{z'}{d''} = 1$; et pour l'expression de la perpendiculaire menée sur ce plan par l'origine

$$p^2 = \frac{1}{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d'^2} + \frac{1}{d''^2}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}.$$

— Ainsi *le plan qui passe par les extrémités de trois diamètres rectangulaires, roule sur une sphère.*

g) Le plan tangent au point x', y', z' a pour équation $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1$.

Si on prend pour point de contact l'extrémité de d, les coordonnées sont, comme on vient de le voir,

$$x' = \frac{\cos M}{\sqrt{\frac{\cos^2 M}{a^2} + \frac{\cos^2 N}{b^2} + \frac{\cos^2 P}{c^2}}}, \quad y' = \frac{\cos N}{\sqrt{\frac{\cos^2 M}{a^2} + \frac{\cos^2 N}{b^2} + \frac{\cos^2 P}{c^2}}},$$

$$z' = \frac{\cos P}{\sqrt{\frac{\cos^2 M}{a^2} + \frac{\cos^2 N}{b^2} + \frac{\cos^2 P}{c^2}}},$$

Les équations des plans tangents menés aux extrémités des diamètres rectangulaires d, d', d'' sont donc

$$\frac{x \cos M}{a^2} + \frac{y \cos N}{b^2} + \frac{z \cos P}{c^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 M}{a^2} + \frac{\cos^2 N}{b^2} + \frac{\cos^2 P}{c^2}}$$

$$\frac{x \cos M'}{a^2} + \frac{y \cos N'}{b^2} + \frac{z \cos P'}{c^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 M'}{a^2} + \frac{\cos^2 N'}{b^2} + \frac{\cos^2 P'}{c^2}}$$

$$\frac{x \cos M''}{a^2} + \frac{y \cos N''}{b^2} + \frac{z \cos P''}{c^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 M''}{a^2} + \frac{\cos^2 N''}{b^2} + \frac{\cos^2 P''}{c^2}}$$

Ajoutant les carrés de ces trois équations, on a

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

pour *le lieu des sommets d'un angle trièdre dont les faces sont tangentes aux extrémités de trois diamètres rectangulaires.*

Si les trois points de contact sont trois points conjugués, les trois plans tangents ont pour équation $\frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\cos\beta + \frac{z}{c}\cos\gamma = 1$, $\frac{x}{a}\cos\alpha' + \frac{y}{b}\cos\beta' + \frac{z}{c}\cos\gamma' = 1$, $\frac{x}{a}\cos\alpha'' + \frac{y}{b}\cos\beta'' + \frac{z}{c}\cos\gamma'' = 1$, et pour le lieu des sommets d'un pareil trièdre circonscrit on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$$

h) Les trois côtés du triangle formé par les extrémités de trois diamètres conjugués étant désignés par d, d', d'', on a

$$d^2 = a^2(\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + b^2(\cos\beta - \cos\beta')^2 + c^2(\cos\gamma - \cos\gamma')^2$$
$$= a'^2 + b'^2 - 2a^2\cos\alpha\cos\alpha' - 2b^2\cos\beta\cos\beta' - 2c^2\cos\gamma\cos\gamma',$$
$$d'^2 = c'^2 + b'^2 - 2a^2\cos\alpha'\cos\alpha' - 2b^2\cos\beta'\cos\beta'' - 2c^2\cos\gamma'\cos\gamma'',$$
$$d''^2 = c'^2 + a'^2 - 2a^2\cos\alpha\cos\alpha'' - 2b^2\cos\beta\cos\beta'' - 2c^2\cos\gamma\cos\gamma'',$$

d'où

$$d^2 + d'^2 + d''^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

Les coordonnées du centre de gravité du même triangle sont

$$x_1 = \frac{a}{3}(\cos\alpha + \cos\alpha' + \cos\alpha''), \quad y_1 = \frac{b}{3}(\cos\beta + \cos\beta' + \cos\beta''),$$

$$z_1 = \frac{c}{3}(\cos\gamma + \cos\gamma' + \cos\gamma'')$$

d'où

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

i) *Trièdre trirectangle circonscrit à l'ellipsoïde.* — Si A, B, C sont les angles que fait avec les axes la perpendiculaire p menée du centre sur le plan tangent au point ($a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$), on a

$$p\cos\alpha = a\cos A\ ;\ p\cos\beta = b\cos B\ ;\ p\cos\gamma = c\cos C,$$

d'où, pour trois plans tangents quelconques,

$$p^2 = a^2 \cos^2 A + b^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 C ,$$
$$p'^2 = a^2 \cos^2 A' + b^2 \cos^2 B' + c^2 \cos^2 C' ,$$
$$p''^2 = a^2 \cos^2 A'' + b^2 \cos^2 B'' + c^2 \cos^2 C''.$$

Si les trois plans tangents sont perpendiculaires entre eux, les droites p, p', p'' le sont aussi, et l'on a

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Or p, p', p'' sont les coordonnées du sommet du trièdre trirectangle par rapport aux trois droites rectangulaires p, p', p'' ; ainsi le *lieu du sommet du trièdre est une sphère.*

Observation. — A cause des relations $\cos A = \frac{p \cos \alpha}{a}$, $\cos B = \frac{p \cos \beta}{b}$, $\cos C = \frac{p \cos \gamma}{c}$, on a $\frac{1}{p^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2}$; donc, pour trois plans tangents en des points conjugués,

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p'^2} + \frac{1}{p''^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

5) *Théorème de Steiner.*

Si l'on rapporte l'ellipsoïde à trois axes rectangulaires qui se coupent en un point intérieur O ($x = m$, $y = n$, $z = p$), et qui font avec les anciens axes les angles M, N, P ; M', N', P' ; M'', N'', P'' ; l'équation de la surface sera

$$\frac{(m + x \cos M + y \cos M' + z \cos M'')^2}{a^2}$$
$$+ \frac{(n + x \cos N + y \cos N' + z \cos N'')^2}{b^2}$$
$$+ \frac{(p + x \cos P + y \cos P' + z \cos P'')^2}{c^2} = 1$$

L'axe OX' coupe la surface en deux points A, A' déterminés par l'équation

$$x^2 (b^2 c^2 \cos^2 M + a^2 c^2 \cos^2 N + a^2 b^2 \cos^2 P)$$
$$+ 2x (m b^2 c^2 \cos M + n a^2 c^2 \cos N + p a^2 b^2 \cos P)$$
$$= a^2 b^2 c^2 - m^2 b^2 c^2 - n^2 a^2 c^2 - p^2 b^2 c^2 ;$$

On a donc

$$\left(\frac{AA'}{OA\,.\,OA'}\right)^2 = \frac{4\,(m\,b^2c^2\cos M + n\,a^2c^2\cos N + p\,a^2b^2\cos P)^2}{(a^2b^2c^2 - m^2b^2c^2 - n^2a^2c^2 - p^2b^2c^2)^2}$$

Si B, B'; C, C' sont les points où l'ellipsoïde est coupée par les axes Y', Z', on a de même

$$\left(\frac{BB'}{OB\,.\,OB'}\right)^2 = \frac{4\,(m\,b^2c^2\cos M' + n\,a^2c^2\cos N' + p\,a^2b^2\cos P')^2}{(a^2b^2c^2 - m^2b^2c^2 - n^2a^2c^2 - p^2b^2c^2)^2};$$

$$\left(\frac{CC'}{OC\,.\,OC'}\right)^2 = \frac{4\,(m\,b^2c^2\cos M'' + n\,a^2c^2\cos N'' + p\,a^2b^2\cos P'')^2}{(a^2b^2c^2 - m^2b^2c^2 - n^2a^2c^2 - p^2b^2c^2)^2};$$

partant

$$\left(\frac{AA'}{OA\,.\,OA'}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{OB\,.\,OB'}\right)^2 + \left(\frac{CC'}{OC\,.\,OC'}\right)$$

$$= \frac{4\,(m^2b^4c^4 + n^2a^4c^4 + p^2a^4b^4)}{(a^2b^2c^2 - m^2b^2c^2 - n^2a^2c^2 - p^2b^2c^2)^2} = \text{const.}$$

6) *Théorème de Joachimstal.*

Si par un point intérieur ($x = m$, $y = n$, $z = n$) on veut mener à l'ellipsoïde une normale qui le coupe au point ($a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$), les équations de la normale sont

$$m - a\cos\alpha = \frac{c\,.\,\cos\alpha}{a\,.\,\cos\gamma}(p - c\cos\gamma);$$

$$n - b\cos\beta = \frac{c\,.\,\cos\beta}{b\,.\,\cos\gamma}(p - c\cos\gamma).$$

La grandeur N de la normale sera

$$N^2 = (p - c\,.\cos\gamma)^2\,\frac{c^2}{\cos^2\gamma}\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)$$

Mais si P est la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent au point $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$, on a (n° 4, *i*)

$$\frac{1}{P^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}.$$

Ainsi

$$N^2P^2 = \frac{c^2}{\cos^2\gamma}(p - c\cos\gamma)^2.$$

Le point (m, n, p) étant intérieur à l'ellipsoïde on a $p < c\cos\gamma$; on prendra donc

$$\mathrm{NP} = \frac{c}{\cos\gamma}(c\cos\gamma - p) = c^2 - \frac{pc}{\cos\gamma}.$$

Les équations de la normale donnent $\cos\alpha = \dfrac{ma\cos\gamma}{pc+(a^2-c^2)\cos\gamma}$, $\cos\beta = \dfrac{nb\cos\gamma}{pc+(b^2-c^2)\cos\gamma}$, ou, si l'on fait $\dfrac{1}{\cos\gamma} = u$,

$$\cos\alpha = \frac{ma}{pcu+a^2-c^2},\quad \cos\beta = \frac{nb}{pcu+b^2-c^2},\quad \cos\gamma = \frac{1}{u},$$

d'où l'équation :

$$\frac{m^2a^2}{(pcu+a^2-c^2)^2} + \frac{n^2b^2}{(pcu+b^2-c^2)^2} + \frac{1}{u^2} = 1.$$

L'équation étant du sixième degré, il peut y avoir six normales menées du point (m, n, p).

Les deux premiers termes de l'équation sont :

$$p^4c^4u^6 + 2p^5c^5(a^2+b^2-2c^2)u^5 + \cdots\cdots$$

La somme des six racines est donc $\dfrac{4c^2-2a^2-2b^2}{pc}$.

Comme $u = \dfrac{1}{\cos\gamma}$ et $\mathrm{NP} = c^2 - \dfrac{pc}{\cos\gamma}$, on aura, pour les six normales,

$$\mathrm{N_1P_1} + \mathrm{N_2P_2} + \mathrm{N_3P_3} + \mathrm{N_4P_4} + \mathrm{N_5P_5} + \mathrm{N_6P_6} = 6c^2 - 4c^2 + 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2+b^2+c^2).$$

7) *Points correspondants.* — On appelle ainsi deux points situés sur deux ellipsoïdes concentriques et ayant leurs coordonnées proportionnelles aux axes de deux surfaces. Par les notations qui précèdent, ce sont des points qui, sur les deux surfaces, correspondent aux mêmes valeurs des angles α, β, γ.

a) Soit M un point du premier ellipsoïde ayant pour coordonnées $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$; son correspondant m du second ellipsoïde aura pour coordonnées $a'\cos\alpha$, $b'\cos\beta$, $c'\cos\gamma$.

M′ un point du second ellipsoïde . . . . $a'\cos\varphi$, $b'\cos\psi$, $c'\cos\chi$

m' son correspondant du premier ellipsoïde . . . . . $a\cos\varphi$, $b\cos\psi$, $c\cos\chi$.

On aura

$$MM'^2=(a\cos\alpha-a'\cos\varphi)^2+(b\cos\beta-b'\cos\psi)^2+(c\cos\gamma-c'\cos\chi)^2,$$

de même

$$mm'^2=(a'\cos\alpha-a\cos\varphi)^2+(b'\cos\beta-b\cos\psi)^2+(c'\cos\gamma-c\cos\chi)^2.$$

Si les deux ellipsoïdes sont *homofocaux;* c'est-à-dire si $a^2-b^2=a'^2-b'^2$, $a^2-c^2=a'^2-c'^2$ ou $a^2-a'^2=b^2-b'^2=c^2-c'^2=d^2$, les valeurs de MM'^2 et mm'^2 deviennent identiques, en remplaçant a^2, b^2, c^2, respectivement par a'^2+d^2, b'^2+d^2, c'^2+d^2.

b) Les coefficients angulaires des droites Mm et $M'm'$ sont $\frac{a-a'}{c-c'}$; $\frac{b-b'}{c-c'}$; ces deux droites sont donc parallèles.

c)
$$OM^2 = R^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma,$$
$$Om^2 = r^2 = a'^2\cos^2\alpha + b'^2\cos^2\beta + c'^2\cos^2\gamma,$$
$$R^2-r^2=(a^2-a'^2)\cos^2\alpha+(b^2-b'^2)^2\cos^2\beta+(c^2-c'^2)\cos^2\gamma.$$

Si les deux ellipsoïdes sont homofocaux, $a^2-a'^2=b^2-b'^2=c^2-c'^2=d^2$; et dans ce cas

$$R^2-r^2 = d^2 = \text{const.}$$

d) Pour le cosinus de l'angle V des droites R, R', on a

$$RR'\cos V = xx'+yy'+zz'$$
$$= aa'\cos\alpha\cos\varphi+bb'\cos\beta\cos\psi+cc'\cos\gamma\cos\chi.$$

Pour l'angle v des droites r, r', on aura la même expression; donc

$$RR'\cos V = rr'\cos v.$$

e) $MM'^2=R^2+R'^2-2RR'\cos V$, $mm'^2=r^2+r'^2-2rr'\cos v$.

Dans le cas des ellipsoïdes homofocaux, on a $MM'^2=mm'^2$, et comme $RR'\cos V=rr'\cos v$, on a

$$R^2+R'^2 = r^2+r'^2$$

8) Si l'on désigne, comme précédemment, par p la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, la normale fait avec les axes des angles M, N, P, tels que

$$\cos M = \frac{p}{a}\cos\alpha\ ,\quad \cos N = \frac{p\cos\beta}{b}\ ,\quad \cos P = \frac{p\cos\gamma}{c}.$$

Considérons sur la surface un second point $a\cos\alpha'$, $b\cos\beta'$, $c\cos\gamma'$; la corde qui joint ce second point au point $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$, fait avec les axes des angles A, B, C, tels que

$$\frac{\cos A}{\cos C} = \frac{a(\cos\alpha' - \cos\alpha)}{c(\cos\gamma' - \cos\gamma)}, \quad \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{b(\cos\beta' - \cos\beta)}{c(\cos\gamma' - \cos\gamma)}.$$

Soit fait pour abréger $\cos\alpha' = \cos\alpha + t$, $\cos\beta' = \cos\beta + u$, $\cos\gamma' = \cos\gamma + w$; d'où

$$t^2 + u^2 + w^2 + 2t\cos\alpha + 2u\cos\beta + 2w\cos\gamma = 0,$$

et

$$\frac{\cos A}{\cos C} = \frac{at}{cw}, \quad \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{bu}{cw};$$

$$\cos A = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2+b^2u^2+c^2w^2}}, \quad \cos B = \frac{bu}{\sqrt{a^2t^2+b^2u^2+c^2w^2}},$$

$$\cos C = \frac{cw}{\sqrt{a^2t^2+b^2u^2+c^2w^2}}.$$

Un plan perpendiculaire à la corde déterminée par les angles A, B, C, et passant par l'extrémité $a\cos\alpha'$, $b\cos\beta'$, $c\cos\gamma'$ de cette corde a pour équation

$$(x-a\cos\alpha')\cos A + (y-b\cos\beta')\cos B + (z-c\cos\gamma')\cos C = 0$$

ou

$$(x-a\cos\alpha)\,at + (y-b\cos\beta)\,bu + (z-c\cos\gamma)\,cw = a^2t^2 + b^2u^2 + c^2w^2.$$

Ce plan rencontre la normale menée au point $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$ en un point pour lequel

$$z - c\cos\gamma = -\frac{2\cos\gamma}{c} \cdot \frac{a^2t^2+b^2u^2+c^2w^2}{t^2+u^2+w^2}.$$

ou, à cause de

$$t^2 = \frac{\cos^2 A}{a^2}(a^2t^2+b^2u^2+c^2w^2), \quad u^2 = \frac{\cos^2 B}{b^2}(a^2t^2+b^2u^2+c^2w^2),$$

$$w^2 = \frac{\cos^2 C}{c^2}(a^2t^2+b^2u^2+c^2w^2);$$

on a

$$z - c\cos\gamma = -\frac{2\cos\gamma}{c}\cdot\frac{1}{\frac{\cos^2 A}{a^2}+\frac{\cos^2 B}{b^2}+\frac{\cos^2 C}{c^2}},$$

$$y - b\cos\beta = -\frac{2\cos\beta}{b}\cdot\frac{1}{\frac{\cos^2 A}{a^2}+\frac{\cos^2 B}{b^2}+\frac{\cos^2 C}{c^2}},$$

$$x - a\cos\alpha = -\frac{2\cos\alpha}{a}\cdot\frac{1}{\frac{\cos^2 A}{a^2}+\frac{\cos^2 B}{b^2}+\frac{\cos^2 C}{c^2}}.$$

Si nous désignons par R la distance du point $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$, au point x, y, z, il vient

$$R^2 = \frac{\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)}{\left(\frac{\cos^2 A}{a^2}+\frac{\cos^2 B}{b^2}+\frac{\cos^2 C}{c^2}\right)^2} = \frac{\frac{4}{p^2}}{\left(\frac{\cos^2 A}{a^2}+\frac{\cos^2 B}{b^2}+\frac{\cos^2 C}{c^2}\right)^2},$$

et

$$\frac{1}{R} = \frac{p}{2}\left(\frac{\cos^2 A}{a^2}+\frac{\cos^2 B}{b^2}+\frac{\cos^2 C}{c^2}\right).$$

Telle est l'expression de la portion de la normale depuis le point de contact jusqu'au point où elle est rencontrée par le plan mené perpendiculairement à l'extrémité de la corde qui est déterminée par les angles A, B, C.

Il résulte de cette expression que si par *un point fixe de l'ellipsoïde on mène trois cordes rectangulaires contre elles et par l'extrémité de chacune un plan perpendiculaire à ces cordes, ces plans rencontrent la normale en trois distances* R, R′, R″, *telles que*

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''} = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Si l'on considère sur la surface trois points conjugués et que par chacun on mène une corde déterminée par les mêmes angles A, B, C, l'expression $R^2 = \frac{4\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)}{\left(\frac{\cos^2 A}{a^2}+\frac{\cos^2 B}{b^2}+\frac{\cos^2 C}{c^2}\right)^2}$ conduit à la relation $R^2 + R_1^2 + R_2^2 = \text{const.}$

9) Les formules du n° précédent s'appliquent à la détermination du *rayon de courbure d'une section normale de l'ellipsoïde.* Il suffit pour cela de considérer le point $a\cos\alpha'$, $b\cos\beta'$, $c\cos\gamma'$ comme se rapprochant indéfiniment du point $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$. Les angles A, B, C sont alors ceux que fait avec les axes la tangente menée à une section plane passant par la normale. Le rayon de courbure de cette section sera

$$\frac{1}{R} = \frac{p}{2}\left(\frac{\cos^2 A}{a^2} + \frac{\cos^2 B}{b^2} + \frac{\cos^2 C}{c^2}\right).$$

Les angles A, B, C sont liés par les relations $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ et $\frac{\cos\alpha}{a}\cos A + \frac{\cos\beta}{b}\cos B + \frac{\cos\gamma}{c}\cos C = 0$, cette dernière résultant de ce que la tangente à la section normale est perpendiculaire à la normale n, et elle équivaut à l'équation $t\cos\alpha + u\cos\beta + w\cos\gamma = 0$.

Au moyen de ces deux relations qui existent entre les angles A, B, C, on pourrait exprimer $\frac{1}{R}$ en fonction d'une seule variable indépendante. Par le point considéré sur la surface, concevons deux droites perpendiculaires à la normale et entre elles, et faisant avec les axes les angles M′, N′, P′, M″, N″, P″ ; la normale faisant les angles M, N, P.

Prenons la première de ces droites pour axe des X′, la seconde pour axe des Y′, et la normale pour axe des Z′. La tangente située dans le plan X′Y′ fait avec les nouveaux axes les angles φ, $90^0-\varphi$, 90^0, et l'on a

$$\cos A = \cos\varphi\cos M' + \sin\varphi\cos M'',$$
$$\cos B = \cos\varphi\cos N' + \sin\varphi\cos N'',$$
$$\cos C = \cos\varphi\cos P' + \sin\varphi\cos P''.$$

A cause de la relation $\cos M'\cos M'' + \cos N'\cos N'' + \cos P'\cos P'' = 0$, la substitution de ces valeurs de cos A, cos B, cos C dans l'expression de $\frac{1}{R}$ conduira à l'équation bien connue de la forme

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi.$$

Observ. — Si l'on considère deux sections normales passant par le point $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$ et perpendiculaires entre elles, on aura pour ces deux sections

$$\frac{1}{R} = \frac{p}{2}\left(\frac{\cos^2 A}{a^2} + \frac{\cos^2 B}{b^2} + \frac{\cos^2 C}{c^2}\right),$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{p}{2}\left(\frac{\cos^2 A'}{a^2} + \frac{\cos^2 B'}{b^2} + \frac{\cos^2 C'}{c^2}\right).$$

On a entre les angles les équations $\cos^2 A + \cos^2 A' + \cos^2 M = 1$, $\cos^2 B + \cos^2 B' + \cos^2 N = 1$, $\cos^2 C + \cos^2 C' + \cos^2 P = 1$, donc

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{p}{2}\left(\frac{\sin^2 M}{a^2} + \frac{\sin^2 N}{b^2} + \frac{\sin^2 P}{c^2}\right) = \text{const.}$$

10) *Rayon de courbure de la surface.*

Les normales aux points $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$; $a\cos\alpha'$, $b\cos\beta'$, $c\cos\gamma'$ ont pour équations

$$x - a\cos\alpha = \frac{c\cos\alpha}{a\cos\gamma}(z - c\cos\gamma),$$

$$y - b\cos\beta = \frac{c\cos\beta}{a\cos\gamma}(z - c\cos\gamma);$$

$$x - a\cos\alpha' = \frac{c\cos\alpha'}{a\cos\gamma'}(z - c\cos\gamma')$$

$$y - b\cos\beta' = \frac{c\cos\beta'}{a\cos\gamma'}(z - c\cos\gamma').$$

Pour que les deux normales se rencontrent on doit avoir la condition

$$\frac{cz}{(w + \cos\gamma)\cos\gamma} = \frac{(c^2 - a^2)\,t}{t\cos\gamma - w\cos\alpha} = \frac{(c^2 - b^2)\,u}{u\cos\gamma - w\cos\beta}$$

en faisant, comme plus haut, $\cos\alpha' - \cos\alpha = t$, $\cos\beta' - \cos\beta = u$, $\cos\gamma' - \cos\gamma = w$.

Si les deux points considérés sont infiniment voisins, on a (n° 8), $t\cos\alpha + u\cos\beta + w\cos\gamma = 0$.

Posons, pour un moment, $\frac{t}{w} = X = \frac{\frac{\cos A}{a}}{\frac{\cos C}{c}}$, $\frac{u}{w} = Y = \frac{\frac{\cos B}{b}}{\frac{\cos C}{c}}$

(n° 8), on a les deux équations

$$\frac{(c^2 - a^2)\,X}{X\cos\gamma - \cos\alpha} = \frac{(c^2 - b^2)\,Y}{Y\cos\gamma - \cos\beta}$$

et

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + \cos\gamma = 0.$$

Si l'on élimine successivement Y et X, on a

$$(b^2-a^2)\,X^2\cos\alpha\cos\gamma + [(b^2-a^2)\cos^2\gamma + (c^2-a^2)\cos^2\beta + (c^2-b^2)\cos^2\alpha]\,X + (c^2-b^2)\cos\alpha\cos\gamma = 0,$$

$$(b^2-a^2)\,Y^2\cos\beta\cos\gamma + [(b^2-a^2)\cos^2\gamma - (c^2-a^2)\cos^2\beta - (c^2-b^2)\cos^2\alpha]\,Y - (c^2-a^2)\cos\beta\cos\gamma = 0.$$

Le produit des deux valeurs de X est $X'X'' = \frac{c^2 - b^2}{b^2 - a^2}$;

Le produit des deux valeurs de Y est $Y'Y'' = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - a^2}$.

A cause de $X = \frac{c\cos A}{a\cos C}$, $Y = \frac{c\cos B}{b\cos C}$, il vient donc

$$\frac{\cos A'\cos A''}{\cos C'\cos C''} = \frac{(c^2 - b^2)\,a^2}{(b^2 - a^2)\,c^2}, \qquad \frac{\cos B'\cos B''}{\cos C'\cos C''} = \frac{(a^2 - c^2)\,b^2}{(b^2 - a^2)\,c^2};$$

et de là

$$\cos A'\cos A'' + \cos B'\cos B'' + \cos C'\cos C'' = 0,$$

ce qui démontre qu'il y a deux directions perpendiculaires entre elles suivant lesquelles on peut passer d'un point de la surface à un point infiniment voisin tel que la normale au second point rencontre la première. Ces directions sont déterminées par les équations obtenues du second degré.

Pour la grandeur R du rayon de courbure on a

$$\frac{cz}{\cos^2\gamma} = \frac{(c^2 - a^2)\,X}{X\cos\gamma - \cos\alpha};$$

d'où

$$z - c\cos\gamma = \frac{\cos\gamma}{c}\cdot\frac{c^2\cos\alpha - a^2\,\mathrm{X}\cos\gamma}{\mathrm{X}\cos\gamma - \cos\alpha},$$

$$y - b\cos\beta = \frac{\cos\beta}{b}\cdot\frac{c^2\cos\alpha - a^2\,\mathrm{X}\cos\gamma}{\mathrm{X}\cos\gamma - \cos\alpha},$$

$$x - a\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{a}\cdot\frac{c^2\cos\alpha - a^2\,\mathrm{X}\cos\gamma}{\mathrm{X}\cos\gamma - \cos\alpha},$$

$$\mathrm{R}^2 = \left(\frac{c^2\cos\alpha - a^2\,\mathrm{X}\cos\gamma}{\mathrm{X}\cos\gamma - \cos\alpha}\right)^2 \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)$$

ou bien

$$\mathrm{R}p = \frac{c^2\cos\alpha - a^2\,\mathrm{X}\cos\gamma}{\mathrm{X}\cos\gamma - \cos\alpha},$$

p désignant, comme plus haut, la perpendiculaire menée du centre sur le plan tangent, et X étant déterminé par l'équation du second degré obtenue plus haut.

11) *Lignes de courbure de l'ellipsoïde.*

La condition pour que deux normales infiniment voisines se rencontrent est

$$\frac{(c^2 - a^2)\,t}{t\cos\gamma - w\cos\alpha} = \frac{(c^2 - b^2)\,u}{u\cos\gamma - w\cos\beta},$$

où

$$t\cos\alpha + u\cos\beta + w\cos\gamma = 0.$$

On satisfait à cette équation de condition en prenant

$\cos\alpha = m\cos\varphi$, $\cos\gamma = n\sin\varphi$; } m et n étant des indéterminées, et φ une nouvelle variable.

$$t = \cos\alpha' - \cos\alpha = m(\cos\varphi' - \cos\varphi)$$
$$= -2m\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi);$$

φ' ne diffèrent de φ que d'une quantité infiniment petite, soit

$\varphi' - \varphi = \varepsilon$, d'où $\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$ et $t = -m\sin\varphi\,.\,\varepsilon$;

de même

$$w = \cos\gamma' - \cos\gamma = n\,(\sin\varphi' - \sin\varphi) = n\cos\varphi\,.\,\varepsilon\,;$$

et comme

$$t\cos\alpha + u\cos\beta + w\cos\gamma = 0\,,$$

$$-m^2\sin\varphi\cos\varphi.\varepsilon + u\sqrt{1-m^2\cos^2\varphi-n^2\sin^2\varphi} + n^2\sin\varphi\cos\varphi.\varepsilon = 0,$$

$$u = \frac{(m^2-n^2)\sin\varphi\cos\varphi\,.\,\varepsilon}{\sqrt{1-m^2\cos^2\varphi-n^2\sin^2\varphi}}.$$

L'équation de condition devient donc

$$\frac{-(c^2-a^2)\,m\sin\varphi}{-mn\sin^2\varphi - mn\cos^2\varphi} = \frac{\dfrac{(c^2-b^2)(m^2-n^2)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-m^2\cos^2\varphi-n^2\sin^2\varphi}}}{\dfrac{n(m^2-n^2)\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-m^2\cos^2\varphi-n^2\sin^2\varphi}} - n\cos\varphi\sqrt{1-m^2\cos^2\varphi-n^2\sin^2\varphi}},$$

ou

$$c^2-a^2 = \frac{(c^2-b^2)(m^2-n^2)}{(m^2-n^2)\sin^2\varphi - (1-m^2\cos^2\varphi-n^2\sin^2\varphi)},$$

ou encore

$$(a^2-b^2)\,m^2 + (b^2-c^2)\,n^2 = a^2-c^2.$$

Les points de la surface qui correspondent aux valeurs $\cos\alpha = m\cos\varphi$, $\cos\gamma = n\sin\varphi$ ont pour coordonnées parallèles aux axes X et Z

$$x = a\cos\alpha = am\cos\varphi \quad , \qquad z = c\cos\gamma = cn\sin\varphi\,;$$

ces points se projettent sur le plan XZ suivant les ellipses

$$\frac{x^2}{a^2m^2} + \frac{z^2}{c^2n^2} = 1.$$

Les axes de ces ellipses sont $A = am$, $B = cn$; ces axes sont liés entre eux par la relation

$$(a^2 - b^2)\, m^2 + (b^2 - c^2)\, n^2 = a^2 - c^2,$$

ou

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} A^2 + \frac{b^2 - c^2}{c^2} C^2 = a^2 - c^2.$$

On déduit de cette analyse les différents résultats obtenus par Monge sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Si l'on veut obtenir les projections de lignes de courbure sur le plan XY, on remarquera que

$$y^2 = b^2 \cos^2 \beta = b^2 (1 - m^2 \cos^2 \varphi - n^2 \sin^2 \varphi)$$
$$= b^2 \left[1 - \frac{m^2 x^2}{a^2 m^2} - \frac{n^2 (a^2 m^2 - x^2)}{a^2 m^2} \right],$$

ou

$$a^2 m^2 y^2 + b^2 (m^2 - n^2)\, x^2 = a^2 b^2 m^2 (1 - n^2).$$

12) Dans ce qui précède, on a remplacé l'équation unique de l'ellipsoïde par les trois équations $x = a \cos \alpha$, $y = b \cos \beta$, $z = c \cos \gamma$. Il sera souvent commode d'employer une notation analogue pour la recherche des propriétés des trois sections coniques. Ainsi l'ellipse est souvent représentée par les deux équations

$$x = a \cos \varphi \quad , \qquad y = b \sin \varphi.$$

L'hyperbole pourra être représentée par les deux équations

$$x = \frac{a}{\cos \varphi} \quad , \qquad y = b \operatorname{tang} \varphi.$$

La parabole pourra être représentée par les deux équations

$$y = p \operatorname{tang} \varphi \quad , \qquad x = \frac{p}{2} \operatorname{tang}^2 \varphi.$$

VI. *Percussions initiales produites sur les affûts dans le tir des Bouches à Feu*,

PAR

COQUILHAT,

Lieutenant Colonel d'Artillerie,

COMMANDANT DU MATÉRIEL DE LA PLACE D'ANVERS.

PREMIÈRE PARTIE.

MORTIERS.

AVANT-PROPOS.

Les bouches à feu considérées sous le rapport de leur mode de fixation sur l'affût, forment deux classes bien distinctes : dans l'une, les mortiers, sont invariablement liés à une plaque ou semelle, ou bien reposent sur l'affût par des tourillons placés en arrière de la bouche à feu vers la culasse : dans l'autre classe, comprenant les canons, les canons-obusiers et à bombes, et les obusiers, les tourillons sont à une certaine distance de la culasse et plus rapprochés du centre de gravité de la pièce.

La vis de pointage et le coussinet de pointage se trouvent dans les mortiers entre les tourillons et la bouche de la pièce

tandis qu'aux canons, canons obusiers, etc., la vis de pointage est placée en arrière des tourillons sous la culasse.

De là résultent deux modes d'action de la bouche à feu sur l'affût.

Nous nous en occuperons successivement, en commençant par les mortiers, qui sont les plus faciles à traiter.

L'ouvrage de Poisson, est sans doute le plus savant sur ce sujet, mais nous ne partageons pas entièrement sa manière de voir : et ses formules sont trop compliquées parce qu'il a voulu les rendre générales, en considérant tous les problèmes comme des cas particuliers d'un seul. Nous avons donc composé directement nos formules pour chacun des cas particuliers, ce qui en a facilité la mise en équation.

Nous croyons devoir rappeler dans des préliminaires les principales formules et des propositions qui nous sont nécessaires. Nous y avons ajouté quelques démonstrations qu'on ne rencontre pas dans les ouvrages élémentaires, et notamment celle qui se rapporte au moment de la quantité du mouvement de rotation d'un corps, pris par rapport à une droite quelconque parallèle à l'axe de rotation. Cette dernière démonstration est d'autant plus utile que Poisson exprime le théorème d'une manière peu intelligible.

Les percussions que nous calculons sont celles initiales produites au premier instant du recul : elles résultent de l'action de la charge de poudre considérée comme force instantanée. On obtient ainsi pour les diverses parties de l'affût l'expression des premiers chocs qui sont les plus importants à connaître.

Ces chocs ou percussions instantanés ont une grandeur finie et sont incomparablement supérieurs à l'action de la pesanteur, qui doit être négligée pendant le temps extrêmement court du trajet du projectile dans l'âme.

Lorsque les quantités initiales de mouvement sont communiquées, le système de la pièce et de l'affût, se meut avec les vitesses acquises et subit l'influence de la pesanteur : il en résulte sur les diverses parties de ce système des pressions beaucoup moindres que les chocs primitifs, mais dont nous ne nous occuperons pas.

La pesanteur étant négligeable devant les percussions produites dans le tir, nous supposerons, pour abréger le discours, que le recul a lieu sur un terrain horizontal, avec une inclinaison

quelconque de l'axe de la bouche-à-feu, et nous désignerons par forces verticales et horizontales, celles qui sur un terrain incliné, seraient respectivement normales ou parallèles au sol.

Mais si l'on peut faire abstraction de la pesanteur, il n'en est pas de même des frottements des appuis de l'affût sur le sol, parce que ces frottements sont proportionnels aux percussions verticales produites sur ces appuis, et ont une valeur finie.

Tout est symétrique à droite et à gauche du plan vertical du tir, et la quantité de mouvement de recul de la pièce a une résultante dirigée suivant l'axe de l'âme; les forces que nous avons à considérer sont donc comprises tout entières dans ce plan, ou sont dirigées dans des plans parallèles.

Les forces contenues dans ces plans parallèles agissent sur les tourillons, les roues et les flasques de l'affût; elles sont deux à deux parallèles, égales, de même sens, et symétriquement placées à droite et à gauche du plan vertical du tir; et leurs résultantes sont dirigées dans ce plan. Toutes les forces peuvent donc être projetées sur le plan de symétrie du système, et les conditions de l'équilibre sont ramenées à celles des forces qui agissent dans un même plan.

Les corps solides jouissent à des degrés différents de certaines propriétés physiques telles que la rigidité, la dureté, l'élasticité, etc., mais aucun ne les possède d'une manière absolue, ils sont plus ou moins flexibles, compressibles, élastiques, etc. L'état actuel de la science ne permet pas l'expression analytique de ces propriétés, ni leur introduction dans les problèmes physico-mathématiques, et cependant il faut appliquer la mécanique rationnelle aux objets qui existent réellement, sans quoi cette science ne serait d'aucune utilité. On satisfait aux nécessités de cette analyse en supposant que les corps sont doués d'un nombre limité de propriétés, faciles à introduire dans les équations, et les possèdent d'une manière absolue. Nous supposons donc, que les solides considérés, bouches-à-feu, affûts, roues, sont des corps d'une rigidité et d'une dureté absolues et complètement dénués d'élasticité.

Ces suppositions ne sont pas entièrement d'accord avec la réalité, puisqu'elles font abstraction des propriétés particulières du métal à canon, du fer et du bois qui entrent dans la composition des affûts, mais elles conduisent à des formules qui donnent une idée approchée de quelques unes des lois qui

régissent le problème. Les hypothèses faites, il faut y rester fidèle, et en admettre toutes les déductions ; on tomberait dans l'empirisme en agissant autrement, et la théorie n'aurait plus de logique.

Les propriétés attribuées à la matière de la bouche à feu et de l'affût sont applicables au sol que nous supposons inébranlable et incapable de restituer une quantité quelconque de mouvement.

Afin de simplifier les formules et d'éviter les fonctions irrationnelles, nous admettons que le coëfficient du frottement du sol sous la crosse est le même que celui du frottement sous les roues ; qu'on peut négliger le frottement de roulement, celui dû à la pénétration dans le sol, le frottement des tourillons dans leurs encastrements et celui de l'essieu dans les boîtes de roue.

Nous considérons aussi les roues comme des corps de révolution dont la matière est symétriquement répartie autour de l'axe de rotation, sur lequel se trouve le centre de gravité. Les axes des roues sont censés horizontaux et dans le prolongement l'un de l'autre. Le jeu est nul entre les fusées et les boîtes de roue dont les axes se confondent. Tantôt l'affût glisse sur le sol en conservant ses appuis et restant parallèle à lui-même, tantôt il est soulevé vers sa partie antérieure du côté de la bouche de la pièce, tandis que sa partie postérieure, la crosse, reste en contact avec le sol et glisse avec une certaine vitesse que nous déterminerons.

Il y a mouvement de translation dans les deux cas ; mais dans le premier l'affût est comprimé sur ses appuis contre le terrain, tandis que dans le second il est soulevé par sa partie antérieure et tourne sur ses appuis postérieurs comme sur une charnière : delà deux sortes de problèmes pour chacune des deux grandes classes de bouches-à-feu, et pour chaque espèce d'affût.

PRÉLIMINAIRES.

§ 1. ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE DES FORCES DIRIGÉES DANS UN MÊME PLAN.

Lorsque des forces qui agissent sur un corps solide sont dirigées dans un même plan et se font équilibre, les conditions de l'équilibre, sont au nombre de trois.

1° Les forces étant remplacées par leurs composantes parallèles à deux axes situés dans ce plan, la somme des composantes parallèles à chacun des axes est nulle, ce qui conduit à deux équations.

2e La somme des moments de ces forces pris relativement à un point quelconque situé dans ce plan, est nulle, d'où il résulte une 3me équation.

Représentons ces conditions par des formules, soient :

$P, P', P'' \ldots\ldots\ldots\ldots$ les forces considérées

$\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots\ldots\ldots\ldots$ les angles que ces forces font avec l'axe des x.

$x, y : x', y' : x'', y'' : \ldots\ldots$ les coordonnées des points d'application de ces forces, rapportées à deux axes rectangulaires situés dans leur plan, axes que nous ferons passer par le point relativement auquel on prend les moments.

$p, p', p'' \ldots\ldots\ldots\ldots$ les bras de levier des forces relativement à l'origine des coordonnées.

Les équations d'équilibre sont :

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots\ldots = 0 \qquad (I)$$

$$P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots\ldots = 0 \qquad (II)$$

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots = 0 \qquad (III)$$

Nous pouvons remplacer l'équation des moments, (III), par une autre en substituant aux forces P, P′, P″ . . . . leurs composantes P cos α et P sin α : P′ cos α' et P′ sin α' : P″ cos α'' et P″ sin α'' . . . . . : et formant l'équation des moments relativement à ces composantes.

Remarquons à cet effet qu'au point x, y; où agit la force P, la composante P cos α, parallèle à l'axe des x, a un bras de levier égal à y, et un moment égal à Py cos α. D'ailleurs le moment Py cos α tend à faire tourner en sens contraire au moment Px sin α, qui est celui de l'autre composante P sin α.

Les moments de ces deux composantes étant de sens contraires, doivent avoir des signes différents, et le moment Pp peut être remplacé par Py cos α — Px sin α = P(y cos α — x sin α).

De même on peut remplacer le moment P′p' par P′(y' cos α'— x' sin α') et ainsi de suite.

Au lieu de l'équation (III) nous pouvons écrire :

$$P(y\cos\alpha - x\sin\alpha) + P'(y'\cos\alpha' - x'\sin\alpha') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\sin\alpha'') + \ldots\ldots = 0 \qquad (IV)$$

Cette équation sera équivalente à la précédente si l'on a

$$p = y\cos\alpha - x\sin\alpha \quad p' = y'\cos\alpha' - x\sin\alpha'$$
$$p'' = y''\cos\alpha'' - x''\sin\alpha'' \ldots\ldots \text{ etc.}$$

C'est ce que nous démontrerons dans le paragraphe suivant.

§ 2. Déterminer la longueur de la perpendiculaire menée de l'origine des coordonnées sur une droite passant par le point x, y et faisant l'angle α avec l'axe des abscisses.

Soient :

a, b Les coordonnées courantes relativement à deux axes rectangulaires.

L'équation de la droite donnée sera :

$$b - y = tg\,\alpha\,(a - x) \qquad (1)$$

Faisons passer par l'origine des coordonnées une droite formant l'angle β avec l'axe des abscisses : l'équation de cette droite sera

$$b = a\,tg\,\beta. \qquad (2)$$

Cette droite auxiliaire sera perpendiculaire sur la droite donnée si l'on a

$$1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta = 0 \qquad (3)$$

Les coordonnées a et b du point d'intersection de ces droites doivent satisfaire aux équations (1) et (2) en même temps. En les résolvant par rapport à a et b et éliminant $tg\,\beta$ à l'aide de l'équation (3) il vient

$$a = \frac{tg\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}\,(x\,tg\,\alpha - y)$$

$$b = \frac{y - x\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}$$

où à cause de

$$\frac{1}{1 + tg^2\,\alpha} = \cos^2\alpha$$

on a

$$a = -\sin\alpha\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$$
$$b = \cos\alpha\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$$

Appelons p la partie de la droite auxiliaire comprise depuis l'origine jusqu'au point d'intersection a, b : cette partie sera la

longueur cherchée de la perpendiculaire menée de l'origine sur la droite donnée, et aura pour expression.

$$p = \sqrt{a^2 + b^2}$$

d'où par la substitution des valeurs de a et b

$$p = y \cos \alpha - x \sin \alpha \qquad \text{(V)}$$

ce qu'il fallait démontrer.

On trouverait de même.

$$p' = y' \cos \alpha' - x' \sin \alpha' \qquad p'' = y'' \cos \alpha'' - x'' \sin \alpha''$$

et ainsi de suite.

L'équation IV est donc équivalente à l'équation III.

---

§ 5. AYANT EXPRIMÉ LES CONDITIONS DE L'ÉQUILIBRE ENTRE DES FORCES SITUÉES DANS UN MÊME PLAN, A L'AIDE DES ÉQUATIONS I, II, et III OU IV DU PARAGRAPHE (1), SI L'ON PREND LES MOMENTS DE CES FORCES RELATIVEMENT A UN SECOND POINT SITUÉ DANS CE PLAN, LA NOUVELLE ÉQUATION DES MOMENTS COMBINÉE AVEC LES TROIS PREMIÈRES EST IDENTIQUEMENT NULLE, ET NE CONTIENT AUCUNE NOUVELLE RELATION ENTRE LES FORCES.

Soient (Fig. I).

$o\,X$, $o\,Y$ } Les axes des coordonnées relatives aux équations I, II, III et IV.

o' le second point par rapport auquel on veut prendre les moments des forces P, P′, P″ etc.

$o\,a = a$, $o\,b = b$ } les coordonnées du point o' relativement aux axes $o\,X$ et $o\,Y$.

Faisons passer par le point o' deux axes $o'\,X'$ et $o'\,Y'$, parallèles à $o\,X$ et $o\,Y$, et soient :

$x_1, x_1', x_1'', \ldots\ldots$
$y_1, y_1', y_1'', \ldots\ldots$ } les coordonnées des points d'application des forces P, P′, P″ . . . . par rapport aux nouveaux axes $o'X'$ et $o'Y'$

$p_1, p_1', p_1'', \ldots\ldots$ les bras de levier des forces P, P′, P″, . . par rapport au point o'.

L'équation des moments des forces relativement au point O′ est

$$P\,p_1 + P'\,p_1' + P''\,p_1'' + \ldots\ldots = 0.$$

En appliquant la formule V on a

$$P_1 = y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha \qquad P_1' = y_1' \cos\alpha' - x_1' \sin\alpha'$$
$$P_1'' = y_1'' \cos\alpha'' - x_1'' \sin\alpha'' \ldots\ldots$$

L'introduction de ces valeurs dans l'équation précédente donne

$$P(y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha) + P'(y_1' \cos\alpha' - x_1' \sin\alpha') + (y_1'' \cos\alpha'' - x_1'' \sin\alpha'') + \ldots\ldots = 0.$$

D'un autre côté on a entre les anciennes et les nouvelles coordonnées les relations

$$x_1 = x - a \qquad x_1' = x' - a \qquad x_1'' = x'' - a \ldots\ldots$$
$$y_1 = y - b \qquad y_1' = y' - b \qquad y_1'' = y'' - b \ldots\ldots$$

Ces valeurs substituées dans la dernière équation des moments donne

$$\left.\begin{array}{l} P\{(y-b)\cos\alpha - (x-a)\sin\alpha\} + \\ +P'\{(y'-b)\cos\alpha' - (x'-a)\sin\alpha'\} + \\ +P''\{(y''-b)\cos\alpha'' - (x''-a)\sin\alpha''\} + \\ + \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} P(y\cos\alpha - x\sin\alpha) + P'(y'\cos\alpha' - x'\sin\alpha') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\sin\alpha'') + \ldots \\ + a(P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots\ldots) - \\ - b(P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots\ldots) \end{array}\right\} = 0$$

Mais en vertu des équations I, II et IV, chacune des trois lignes de cette formule est nulle séparément, et par conséquent la formule elle-même ne contient aucune nouvelle relation entre les forces.

§ 4. PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

D'après le principe de d'Alembert il y a équilibre entre les *forces motrices* qui agissent sur tous les points d'un système de points matériels en mouvement, et les *forces* auxquelles sont dues les accroissements infiniment petits de vitesse qui ont lieu à chaque instant.

Ce principe est également appliquable aux chocs ou percussions qui ne sont autre chose que des forces motrices agissant avec de très-grandes intensités pendant des instants excessivement courts.

Les forces étant mesurées par les quantités de mouvement qu'elles produisent, si nous étendons le principe de d'Alembert aux percussions, nous voyons qu'il y a équilibre entre les chocs ou percussions auxquels un système de points matériels est soumis et les quantités de mouvements transmises à ces points matériels.

Représentons par des forces les résistances que le sol oppose au mouvement des affûts et appliquons cette proposition au recul des bouches-à-feu.

Il y a équilibre entre la réaction de la charge contre le fond de l'âme et la résistance du sol au mouvement de l'affût d'une part; et les quantités de mouvement dont la bouche-à-feu et l'affût sont réellement animés d'autre part : et s'il s'agit d'un mortier à plaque, la bouche-à-feu et l'affût seront considérés comme ne constituant qu'un seul corps solide.

En remplaçant par des forces la résistance des encastrements des tourillons et celle de la vis ou du coussinet de pointage, il y a équilibre entre la réaction de la charge contre le fond de l'âme, et la résistance contre les tourillons et le point de contact de la vis de pointage, ou du coussinet de pointage d'une part, et les quantités de mouvement dont la bouche-à-feu est réellement animée d'autre part.

On peut aussi considérer l'affût isolément. Il y a équilibre entre les chocs transmis suivant les axes des tourillons et de la vis de pointage et les résistances au point d'appui de la crosse et sur

l'axe de l'essieu d'une part, et les quantités de mouvement dont l'affût est réellement animé d'autre part.

On établira d'une manière analogue l'équilibre qui doit exister entre les chocs exercés sur les roues par l'essieu et les résistances du sol d'une part, et les quantités de mouvement dont les roues sont réellement animées d'autre part.

Cette marche conduira à autant d'équations différentes qu'il y aura d'inconnues dans les problèmes à traiter.

---

§ 5. Centres de gravité.

Le centre de gravité d'un corps est le point par lequel passe la résultante de toutes les actions de la pesanteur sur les divers points matériels de ce corps, quelle que soit sa position.

Soient :

m, m', m'', ... les masses d'un certain nombre de corps.

x, x', x'', ... les distances des centres de gravité de ces masses à un plan donné.

M, ... la masse réunie de tous ces corps.

x_1. . . . . la distance du centre de gravité de la masse M au plan donné.

y, y', y'', ... les distances des masses m, m', m'', à un autre plan.

y_1 . . . . . la distance du centre de gravité, de la masse M à ce second plan.

On a les relations :

$$\mathrm{M}\,x_1 = m\,x + m'\,x' + m''\,x'' + \ldots$$
$$\mathrm{M}\,y_1 = m\,y + m'\,y' + m''\,y'' + \ldots$$

Passons aux molécules élémentaires des corps, les masses m, m', m'', ... représenteront les éléments de leurs masses, et nous aurons pour déterminer les coordonnées x_1 et y_1 du centre de gravité de leur masse totale M :

$$M = \int dm.$$
$$M\,x_1 = \int x\,dm.$$
$$M\,y_1 = \int y\,dm.$$

Lorsque les plans relativement auxquels on prend les coordonnées x_1 et y_1 passent par le centre de gravité du corps M, les distances x_1 et y_1 sont nulles, et l'on a relativement à ces plans :

$$\int x\,dm = 0.$$
$$\int y\,dm = 0.$$

---

§ 6. Des moments d'inertie.

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite quelconque est la somme des produits de chacun des éléments de sa masse par le carré de leurs distances respectives à cette droite. En d'autres termes, le moment d'inertie d'un corps est l'expression analytique

$$\int r^2\,dm\ ;$$

dans laquelle on représente par
dm l'élément différentiel de la masse M du corps considéré : r la distance de l'élément dm à la droite relativement à laquelle on prend les moments d'inertie.

Concevons un plan perpendiculaire à la droite par rapport à laquelle on prend les moments d'inertie, et dans ce plan traçons deux axes rectangulaires qui se coupent sur cette droite, et sur lesquels nous compterons les coordonnées x et y des diverses molécules élémentaires de la masse M ; nous aurons

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\int r^2\,dm = \int (x^2 + y^2)\,dm.$$

Soient :

$\int r^2\,dm$ le moment d'inertie du corps de masse M relativement à une droite donnée.

$M\ k^2$ le moment d'inertie du corps relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à la droite donnée.

r_1 la distance du centre de gravité du corps M à la droite donnée.

x_1, y_1 les coordonnées du centre de gravité du corps M.

On a les relations :

$$\int r^2\,dm = M\,(k^2 + r_1^2) = M\,(k^2 + x_1^2 + y_1^2)$$

---

§ 7. Du mouvement de rotation que le choc fait prendre a un corps solide retenu par un axe fixe.

Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe fixe, auquel il est invariablement attaché, tous les points de ce corps décrivent des cercles, dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de rotation, et dont les centres sont situés sur cet axe.

Les positions relatives entre les différents points du corps ne variant pas, il en résulte que tous les cercles sont décrits dans le même temps, et que les arcs de cercle décrits au bout d'un temps quelconque mesurent tous le même angle au centre.

Les arcs de cercle parcourus dans le même temps ayant des longueurs proportionnelles à leurs rayons respectifs, chaque point du corps se meut avec une vitesse proportionnelle à sa distance à l'axe.

La vitesse de chaque point est à chaque instant dirigée suivant la tangente au cercle qu'il décrit.

La vitesse angulaire du corps est celle des points situés à l'unité de distance de l'axe de rotation : en d'autres termes, c'est la vitesse des points qui décrivent autour de l'axe des cercles qui ont l'unité pour rayon.

Soient :

ω la vitesse angulaire d'un corps.

r la distance d'un point quelconque de ce corps à l'axe de rotation.

La vitesse absolue du point est exprimée par

$$r\ \omega$$

Soit en outre :

dm la masse de ce point.

La quantité de mouvement dont le point est animé a pour expression :

$$r\ \omega\ dm$$

Multiplions cette quantité de mouvement par la distance r de l'élément dm à l'axe de rotation, le produit

$$r^2\omega\ dm$$

est le moment de la quantité de mouvement dont l'élément dm est animé, pris relativement à l'axe de rotation.

En étendant cette expression à la masse entière du corps au moyen d'une intégration, et mettant ω en dehors de l'intégrale, parce que cette vitesse ne varie pas d'un point à un autre, la formule

$$\omega \int r^2\ dm$$

exprime le moment relativement à l'axe de rotation de la quantité de mouvement d'un corps qui tourne avec une vitesse angulaire ω.

Soient actuellement :

μ l'intensité du choc qui a communiqué la vitesse angulaire ω au corps considéré.

l le bras de levier de ce choc, ou la distance de sa direction à l'axe de rotation.

Le moment du choc par rapport à l'axe de rotation est

$$l\ \mu$$

Les conditions de l'équilibre qui doit exister entre les forces et les quantités de mouvement produites, exigent que le moment de ce choc soit égal à celui de la quantité de mouvement de rotation imprimée. On a donc la relation :

$$l\ \mu = \omega \int r^2\ dm :$$

d'où
$$\omega = \frac{l\,\mu}{\int r^2\,dm} \qquad \text{(VI)}$$

Mais l'intégrale $\int r^2\,dm$ est le moment d'inertie du corps relativement à l'axe de rotation, et l'on a, en conservant les notations du paragraphe précédent

$$\omega = \frac{l\,\mu}{M\,(k^2 + r_1^2)} = \frac{l\,\mu}{M\,(k^2 + x_1^2 + y_1^2)} \qquad \text{(VII)}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$l\,\mu = \omega\,M\,(k^2 + r_1^2) = \omega\,M\,(k^2 + x_1^2 + y_1^2) \qquad \text{(VIII)}$$

Cette formule fait voir que le moment du choc qui produit le mouvement de rotation d'un corps, est égal au produit de la vitesse angulaire du corps par son moment d'inertie relativement à l'axe de rotation.

L'élément dm du corps, dont les coordonnées sont x et y, se meut perpendiculairement au rayon r mené de l'axe au point x, y : cet élément fait avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus sont :

$\frac{-y}{r}$ cosinus de l'angle que fait la vitesse de l'élément dm avec l'axe des x (IX)

$\frac{x}{r}$ cosinus de l'angle que fait la vitesse de l'élément dm avec l'axe des y.

La quantité de mouvement $\omega\,r\,dm$ de l'élément dm a respectivement pour composantes parallèles aux axes des x et des y,

$$\omega\,r\,dm\,.\frac{-y}{r} = -\omega\,y\,dm$$

$$\omega\,r\,dm\,.\,\frac{x}{r} = \omega\,x\,dm$$

Soient :

X la résultante des quantités de mouvement parallèles à l'axe des x, dont les molécules dm sont animées.

Y la résultante des quantités de mouvement parallèles à l'axe des y, dont les molécules dm sont animées.

On a

$$\left.\begin{aligned} X &= -\omega \int y\, dm = -\omega\, M\, y_1 \\ Y &= \omega \int x\, dm = \omega\, M\, x_1 \end{aligned}\right\} \qquad (XI)$$

Les forces X et Y sont généralement situées dans des plans différents, et ne se coupent pas, quoique leurs directions soient perpendiculaires à l'axe de rotation : nous allons démontrer que l'on peut, sans changer en rien, le mouvement de rotation du corps, transporter ces forces parallèlement à elles-mêmes sur un plan quelconque perpendiculaire à l'axe de rotation, que nous prendrons pour plus de simplicité pour celui des $x\ y$, et que ces forces peuvent se combiner entr'elles comme si elles étaient réellement comprises dans un seul et même plan.

Soient en effet : (fig. 2)

$o\ z$ l'axe de rotation du corps.

$o\ x$, $o\ y$ les axes des coordonnées perpendiculaires à l'axe de rotation.

a le point où la force + Y rencontre le plan des $x\ z$.

b la projection de a sur le plan des $y\ z$.

c la projection de a sur le plan des $x\ y$

On a par construction :

$$o\,b = a\,c \qquad a\,b = o\,c.$$

Au point c menons deux forces + Y^1 et — Y^1, dans le prolongement l'une de l'autre, égales et parallèles à la force + Y.

Les deux forces + Y^1 et — Y^1 s'entredétruiront et ne changeront en rien le mouvement de rotation du corps.

Cela posé, remarquons que la force + Y agit autour de l'axe de rotation avec le bras de levier $a\ b$, qui est égal au bras de levier $a\ c$ de la force — Y^1. Les deux couples qui en résultent et qui tendent à faire tourner le corps en sens contraires, s'entredétruisent et ne peuvent modifier en rien le mouvement de rotation du corps : tout ce qu'il peut en résulter ce sont des pressions en deux points de l'axe fixe, pressions dont nous ne nous occuperons pas.

Il ne reste donc que la force + Y^1, qui est la force + Y transportée parallèlement à elle-même sur le plan des $x\ y$.

La force X pourrait par un procédé semblable être transportée sur le même plan sans qu'il y eût rien de changé dans le mouvement de rotation du corps.

Ceci démontré, représentons par :

R la résultante des forces X et Y, ou la résultante des quantités de mouvement de rotation dont les molécules de M sont animées.

On a en vertu des relations connues et de celles (XI)

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$R = \omega M \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \omega M r_1 \qquad \text{(XII)}$$

Soit :

α l'angle que fait la résultante R avec l'axe des X : α doit satisfaire aux équations

$$X = R \cos \alpha$$
$$Y = R \sin \alpha$$

d'où en vertu des équations (XI) et (XII)

$$\cos \alpha = \frac{X}{R} = \frac{-\ y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{Y}{R} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\ \frac{x_1}{y_1}$$

Soit en outre

β l'angle que fait avec l'axe des x la droite menée de l'origine au centre de gravité.

Les coordonnées du centre de gravité étant x_1 et y_1 nous poserons

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_1}{x_1}$$

Mais par suite des valeurs de α et de β, la relation suivante est satisfaite d'elle-même.

$$1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1 - \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{y_1}{x_1} = 0$$

Il en résulte que les droites qui font les angles α et β avec l'axe des x sont perpendiculaires entr'elles, ce qui signifie que :

« La direction de la résultante R de toutes les quantités de » mouvement de rotation du corps, est perpendiculaire à la » droite qui mesure la plus courte distance du centre de gravité » du corps à l'axe de rotation. »

---

§ 8. SI L'ON CONSERVE LES NOTATIONS PRÉCÉDENTES, LE MOMENT DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT DE ROTATION D'UN CORPS, RELATIVEMENT A UNE DROITE QUELCONQUE PARALLÈLE A L'AXE DE ROTATION ET PASSANT PAR LE POINT $x\ y$, EST EXPRIMÉ PAR

$$q\,\mathrm{R} = \omega\,\mathrm{M}\,(k^2 + x_1^2 + y_1^2 - x\,x_1 - y\,y_1) \quad \text{(XIII)}$$

q ÉTANT LE BRAS DE LEVIER DE LA FORCE R RELATIVEMENT A LA DROITE PASSANT PAR LE POINT x, y.

—

Représentons par

λ le bras de levier de la force R relativement à l'axe de rotation.

Le produit λ R est le moment de la force R par rapport à l'axe de rotation, moment qui est aussi exprimé par la formule (VIII).

Il en résulte

$$\lambda\,\mathrm{R} = \omega\,\mathrm{M}\,(k^2 + x_1^2 + y_1^2)$$

Substituant à R sa valeur équation (XII) il vient

$$\lambda = \frac{k^2 + x_1^2 + y_1^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \qquad \text{(XIV)}$$

Soient actuellement (fig. 3)

o l'origine des coordonnées et la projection de l'axe de rotation du corps M.

$o\,\mathrm{X}$, $o\,\mathrm{Y}$ les axes rectangulaires des coordonnées.

$o\ i$ une droite menée de l'origine au centre de gravité du corps projeté sur le plan des coordonnées en x_1 , y_1.

d le point où la direction de R occupe la droite $o\ i$.

$d\ k$ la direction de la force R perpendiculaire sur $o\ i$.

$o\ d = \lambda$ le bras de levier de R relativement à l'axe de rotation projeté en o.

a la projection sur le plan des coordonnées, de la droite parallèle à l'axe de rotation relativement à laquelle on prend le moment de R.

$o\ b = x$
$o\ c = y$ } les coordonnées de a.

$a\ e = q$ la perpendiculaire menée du point a sur la direction $e\ k$ de la force R.

En d'autres termes q est le bras de levier de R relativement à la droite projetée en a.

α l'angle $d\ o\ k$ que fait la direction de λ avec l'axe des x.

β l'angle $o\ k\ d$ que fait la direction de R avec l'axe des x.

Les angles α et β sont complémentaires l'un de l'autre, parce que $d\ k$ est perpendiculaire sur $o\ d$.

Formons les rectangles $a\ e\ h\ g$ et $a\ b\ o\ c$; nous aurons les relations :

$$o\ d = \lambda = o\ k \cos \alpha$$

$$o\ k = \frac{\lambda}{\cos\ \alpha}$$

$$b\ g = a\ b \operatorname{tg} (b\ a\ g) = y \operatorname{tg} (b\ a\ g)$$

Mais l'angle $(b\ a\ g)$ est égal à celui $d\ o\ k = \alpha$, parce que les côtés du premier angle sont perpendiculaires sur ceux du second ; donc :

$$b\ g = y \operatorname{tg} \alpha$$

On a aussi

$$g\ k = o\ k - o\ b - b\ g$$

$$g\ k = \frac{\lambda}{\cos\ \alpha} - x - y \operatorname{tg} \alpha$$

$$q = a\,e = g\,h = g\,k\cos\alpha$$
$$q = \lambda - x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

D'ailleurs x_1 et y_1 étant les coordonnées du centre de gravité du corps, centre qui est sur la droite $o\,i$, il vient :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\sin\alpha = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

Substituant dans l'expression de la valeur de q à sin α et cos α leurs valeurs en fonction de x_1 et y_1 et à λ sa valeur équation (XIV), il vient

$$q = \frac{k^2 + x_1^2 + y_1^2 - x\,x_1 - y\,y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \qquad \text{(XV)}$$

Multipliant cette équation membre à membre par celle (XII) on obtient

$$q\,\mathrm{R} = \omega\,\mathrm{M}\,(k^2 + x_1^2 + y_1^2 - x\,x_1 - y\,y_1) \qquad \text{(XIII)}$$

C Q F D.

La formule XIII donne la valeur absolue du moment q R, dont le signe dépendra du sens de la direction de R, comparée aux autres forces dont on prend le moment.

En supposant $x = o$, $y = o$ dans l'équation (XIII), ce qui revient à prendre le moment de R relativement à l'axe de rotation, on retombe sur la formule (VIII).

Les coordonnées x et y doivent être affectées des signes qui leur conviennent dans les équations (XIII) et (XV). Par exemple, si le point x_1 y, relativement auquel on prend le moment de la force R, était situé au-dessous de l'axe des x, l'ordonnée y deviendrait négative et l'on aurait

$$q = \frac{k^2 + x_1^2 + y_1^2 + y\,y_1 - x\,x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \qquad (\text{XV}^{\text{bis}})$$

$$q\,\text{R} = \omega\,\text{M}\,(k^2 + x_1^2 + y_1^2 + y\,y_1 - x\,x_1) \qquad (\text{XIII}^{\text{bis}})$$

Nous pouvons en faire une démonstration directe au moyen de la figure 4, dans laquelle le point a tombe au-dessous de l'axe des x : nous conserverons d'ailleurs les notations précédentes.

On a :

$o\,d = \lambda$

$a\,c = o\,b = x$

$a\,b = o\,c = y$

$a\,e = q$ valeur cherchée.

$\alpha =$ angle $(d\,o\,l) =$ angle $(b\,a\,g)$

$\beta =$ angle $(d\,k\,o)$ complément de α.

$\lambda = o\,d = o\,k \cos\alpha$

$$o\,k = \frac{\lambda}{\cos\alpha}$$

$o\,g = a\,b \operatorname{tg} (b\,a\,g)$

$b\,g = y \operatorname{tg}\alpha$

$o\,g = o\,b - b\,g$

$o\,g = x - y \operatorname{tg}\alpha$

$g\,k = o\,k - o\,g$

$$g\,k = \frac{\lambda}{\cos\alpha} - x + y \operatorname{tg}\alpha$$

$q = a\,e = g\,h = g\,k \cos\alpha$

$q = \lambda - x\cos\alpha + y \sin\alpha$

Substituant à cos α et sin α leurs valeurs en fonction de x_1 et y_1 et à λ sa valeur (XIV), il vient

$$q = \frac{k^2 + x_1^2 + y_1^2 + y\,y_1 - x\,x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$q\,\mathrm{R} = \omega\,\mathrm{M}\,(k^2 + x_1^2 + y_1^2 + yy_1 - x\,x_1)$$

C Q F D.

---

§ 9. LES COORDONNÉES DU CENTRE DE GRAVITÉ DE LA BOUCHE-A-FEU ÉTANT CONNUES, LORSQUE L'AME EST HORIZONTALE, EN DÉDUIRE LES COORDONNÉES DE CE CENTRE POUR UNE INCLINAISON QUELCONQUE θ DE L'AXE DE L'AME.

—

Dans le plan vertical du tir et par l'axe des tourillons comme origine faisons passer deux droites, l'une horizontale et l'autre verticale qui seront les axes des coordonnées.

Soient (fig. 5)

o la projection de l'axe des tourillons et l'origine des coordonnées.

$o\,\mathrm{X}$ l'axe des x.

$o\,\mathrm{Y}$ l'axe des y.

m la position du centre de gravité de la pièce lorsque l'âme est horizontale.

$m\,x = a$ l'ordonnée verticale du point m.

$o\,x = a'$ l'abscisse horizontale de m.

L'axe de l'âme ayant été placé dans la direction horizontale, si nous lui donnons ensuite une élévation θ en faisant tourner la pièce sur les tourillons comme charnière, tous les points de la bouche à feu décriront autour de l'axe des tourillons des arcs de cercle dont les angles au centre seront tous égaux à θ : et les distances de ces points à l'axe des tourillons ne varieront pas.

Le centre de gravité de la pièce est sensiblement sur l'axe de l'âme, et il est placé au dessus de l'axe des tourillons lorsque l'âme est horizontale, et un peu en arrière vers la culasse. Le centre de gravité m s'abaissera lorsque l'on élèvera l'axe de l'âme, et viendra occuper la position m' : et, sa distance à l'axe des tourillons étant invariable, on aura :

$$o\,m = o\,m'$$

Représentons par

$d = m'\,x'$ l'ordonnée verticale de la nouvelle position du centre de gravité correspondante à l'angle θ du tir.

$d' = o\,x'$ l'abscisse horizontale de la nouvelle position du centre de gravité.

φ l'angle auxiliaire ($m'\,o\,x$).

Les formules de trigonométrie rectiligne donnent

$$\sin(\varphi - \theta) = \sin\varphi\cos\theta - \sin\theta\cos\varphi$$
$$\cos(\varphi - \theta) = \sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta$$

Il résulte des triangles rectangles $m\,o\,x$ et $m'\,o\,x'$;

$$\sin(\varphi - \theta) = \frac{m'\,x'}{o\,m'}$$

$$\cos(\varphi - \theta) = \frac{o\,x'}{o\,m'}$$

et à cause de $o\,m' = o\,m$

$$\sin(\varphi - \theta) = \frac{m'\,x'}{o\,m}$$

$$\cos(\varphi - \theta) = \frac{o\,x'}{o\,m}$$

on a aussi

$$\sin\varphi = \frac{m\,x}{o\,m}$$

$$\cos\varphi = \frac{o\,x}{o\,m}$$

Substituant les valeurs de ces quatre dernières lignes trí-

gonométriques dans les deux premières formules et supprimant le dénominateur commun $o\,m$, on obtient

$$m'\,x' = m\,x\,\cos\theta - o\,x\,\sin\theta$$
$$o\,x' = m\,x\,\sin\theta + o\,x\cos\theta$$

et mettant à la place des lignes $m'\,x'$, $m\,x$, $o\,x$, $o\,x'$ et $m\,x$, les lettres qui les représentent il vient :

$$\left.\begin{aligned} d &= a\cos\theta - a'\sin\theta \\ d' &= a\sin\theta + a'\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (\text{XVI})$$

---

§ 10. DÉTERMINER LA LONGUEUR DE LA PERPENDICULAIRE ABAISSÉE DE LA CROSSE SUR L'AXE INCLINÉ DU CANON

Dans le plan vertical du tir menons deux axes des coordonnées, l'un vertical et l'autre horizontal qui se couperont au point d'appui de la crosse sur le sol, lequel sera l'origine.

Soient (Fig. 6.)

$o\,x$ l'axe des abscisses.

$o\,y$ l'axe des ordonnées.

o l'origine au point de contact de la crosse sur le sol.

m le centre de gravité du canon situé sur l'axe de l'âme.

θ l'angle d'élévation du canon.

$m\,y$ une parallèle à l'axe des x.

$y = o\,y = m\,x$ l'ordonnée du centre de gravité de la bouche à feu.

$x = o\,x = m\,y$ l'abscisse du centre de gravité de la bouche à feu.

$m\,n$ l'axe incliné du canon.

$\gamma = o\,n$ la perpendiculaire cherchée menée du point o sur $m\,n$.

On a en vertu de l'équation V

$$\gamma = y\cos\theta - x\sin\theta$$

Nous représentons dans la suite de ce mémoire les coordonnées du centre de gravité du *canon* par les lettres suivantes :

$$c + d = y$$
$$c' - d' = x$$

Il en résulte

$$\gamma = (c + d)\cos\theta - (c' - d')\sin\theta \quad \text{(XVII)}.$$

Ces lettres ont les significations suivantes :

d ordonnée verticale, d' abscisse horizontale — du centre de gravité du canon rapportée à deux axes qui se coupent sur l'axe des tourillons.

c ordonnée verticale, c' abscisse horizontale — de l'axe des tourillons rapportée à deux axes qui se coupent au point d'appui de la crosse sur le sol.

Les lignes d et d' ont des valeurs variables exprimées dans les équations XVI en fonction des données de construction de la bouche à feu et de l'angle θ. Substituant ces valeurs dans l'équation XVII il vient

$$\gamma = a + c\cos\theta - e'\sin\theta \quad \text{(XVIII)}.$$

Dans les mortiers sur affûts traineaux, l'axe de l'âme coupe celui des tourillons, en sorte que la ligne a, qui dans les canons exprime l'abaissement de l'axe des tourillons relativement à celui de l'âme, est nulle pour les mortiers.

En faisant donc $a = 0$, dans la formule XVIII, on aura pour la valeur de γ relative aux mortiers

$$\gamma = c\cos\theta - c'\sin\theta \qquad \text{(XIX)}.$$

---

§ 11. Déterminer la longueur de la perpendiculaire abaissée de la tête de la vis de pointage sur l'axe incliné du canon.

Soient :

n la longueur cherchée de la perpendiculaire abaissée de la tête de la vis de pointage sur l'axe incliné du canon.

$d + c - e$ la distance de la tête de la vis de pointage au plan horizontal passant par l'axe des tourillons.

$c' - d' - e'$ la distance de la tête de la vis de pointage au plan vertical passant par l'axe des tourillons.

Appliquons la formule V (§ 2) dans laquelle x et y ont pour valeurs.

$$x = c' - d' - e'$$
$$y = c + d - e$$

Il vient

$$n = (c + d - e)\cos\theta - (c' - d' - e')\sin\theta$$

Mettons à la place de d et d' leurs valeurs équation XVI on a :

$$n = a + (c - e)\cos\theta - (c' - e')\sin\theta \quad (XX)$$

Lorsqu'il s'agit de mortiers, l'abaissement de l'axe des tourillons est nul, ou $a = 0$, et n représente la distance du centre du coussinet de pointage à l'axe de l'âme ; on a dans ce cas

$$n = (c - e)\cos\theta - (c - e')\sin\theta \quad (XXI)$$

Mais la valeur de n est généralement connue d'avance lorsqu'il s'agit des mortiers, parce que c'est ordinairement par le renfort, à sa partie cylindrique, que les bouches à feu de cette espèce appuient sur le coussinet de pointage. La perpendiculaire n dans ce cas est égale au demi diamètre extérieur de la pièce.

---

§ 12. QUANTITÉ DE MOUVEMENT DE RECUL DU CANON PENDULE.

Lors du tir, la force expansive des gaz, provenant de la combustion de la poudre, réagit en tous sens : elle procure au boulet sa vitesse initiale, et, par sa pression sur le fond de l'âme, elle communique au canon une certaine quantité de mouvement μ, dirigée suivant l'axe de l'âme, en sens opposé au chemin suivi par le projectile.

La bouche à feu, si elle n'était reliée à l'affût, reculerait avec une certaine vitesse v, que l'on déduit de la quantité μ au moyen de la relation.

$$v = \frac{\mu}{c}$$

c étant la masse de la pièce.

On appelle *quantité de mouvement de recul du canon pendule*, le produit $vc = \mu$ de la masse de la bouche à feu par la vitesse qu'elle prendrait lors du tir si elle n'était pas retenue par l'affût.

Il importe de ne pas confondre cette quantité de mouvement avec celle du boulet au sortir de l'âme, parce que celle-ci est toujours moindre.

Il n'y a pas de formule analytique ou empirique assez exacte pour exprimer l'une de ces quantités en fonction de l'autre. On en est donc réduit à une détermination pratique au moyen du canon pendule.

Cet appareil ainsi que son nom l'indique, est un pendule composé du canon suspendu à un axe fixe et horizontal.

L'âme de la pièce est horizontale quand le pendule est au repos.

Lors du tir, la réaction de la charge, contre le fond de l'âme, met ce pendule en mouvement, et l'on en déduit la quantité de mouvement de recul par des formules connues, dont nous avons donné une démonstration dans notre ouvrage sur la fabrication des canons.

PREMIÈRE PARTIE.

PERCUSSIONS PRODUITES

SUR LES AFFUTS

DANS LE TIR DES MORTIERS.

ARTICLE I.

MORTIER A PLAQUE. — Percussions qui ont lieu lorsque le mortier conserve ses appuis sur le sol et qu'il prend un mouvement de recul parallèlement au terrain.

§ 15. DONNÉES SUR LES MORTIERS A PLAQUE.

Il est une sorte de mortiers dépourvus de tourillons, nommés mortiers à plaque, parce qu'ils sont fixés à une plaque ou semelle qui tient lieu d'affût.

Souvent la bouche à feu et la semelle sont coulées d'une pièce.

La partie inférieure de la plaque, parfaitement dressée, est en contact avec la plate forme, lorsque la pièce est en batterie.

La pièce et la plaque n'ont pas d'articulation entr'elles, mais forment un système invariable ; il s'ensuit que le mortier à plaque tire constamment sous le même angle, qui est ordinairement de 45°, parce que c'est l'angle de plus grande portée.

Cependant pour quelques tirs particuliers tels que celui des fusées, celui des boulets munis de cordages pour établir une communication avec les navires en danger, etc., l'élévation de l'âme varie, et descend même jusqu'à 20° et au dessous

§ 14. NOTATIONS.

Nous supposons que la plaque n'a que deux arêtes de contact avec la plate forme : l'une à la partie antérieure vers la bouche du mortier, l'autre à la partie postérieure vers le cul de la pièce.

Ces arêtes sont parallèles entr'elles et perpendiculaires au plan vertical du tir.

La somme des percussions verticales exercées sur les arêtes de contact donnera la résultante des percussions verticales produites sur la plate forme, et le point d'application de cette résultante se déterminera conformément aux règles relatives aux forces parallèles.

Soient :

V la vitesse du recul parallèlement au sol.

M la masse du mortier.

h la hauteur du centre de gravité du mortier au dessus de la plate-forme.

h' la distance de la verticale passant par le centre de gravité du mortier à l'arête postérieure de contact de la plaque avec le sol.

r' la distance entre les deux arêtes de conctact de la plaque avec le sol.

Q la résistance normale du sol sur l'arête postérieure de contact de la plaque avec la plate forme.

f Q la résistance du sol produite par le frottement de l'arête postérieure de la plaque contre la plate forme : frottement dû à la percussion Q.

E la résistance normale du sol sur l'arête antérieure de la plaque en contact avec la plate forme.

f E la résistance du frottement contre la plate forme provenant de la percussion E.

θ l'angle que fait l'axe du mortier avec l'horizon.

μ l'impulsion ou la quantité de mouvement communiquée au mortier par la réaction de la charge.

γ la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'arête postérieure de la plaque sur l'axe de l'âme. Cette perpendiculaire AB fig. 7 et 8, sera considérée comme positive lorsqu'elle rencontrera l'axe de l'âme au dessus du sol comme à la figure (7), et négative lorsque cette rencontre aura lieu au dessous du sol comme à la figure (8). Notre démonstration s'appliquera à la figure (7). Les formules auxquelles nous parviendrons conviendront pour la figure (8) en changeant le signe de γ.

§ 15. MOUVEMENT ET PERCUSSIONS INITIALES QUI ONT LIEU.

Le mortier se meut parallèlement à lui-même et au sol tout en conservant le contact de la plaque avec la plate forme sur tous ses points d'appui.

La plate forme reçoit deux chocs verticaux, l'un Q à l'arête postérieure, l'autre E à l'arête antérieure. Ces chocs engendrent les frottements $f\,Q$ et $f\,E$, qui agissent tangentiellement au sol en sens contraire au recul.

§ 16. MISE EN ÉQUATION DES PERCUSSIONS PRODUITES.

La résistance du sol aux arêtes d'appui de la plaque peut être représentée par des forces. En les introduisant dans les calculs nous pouvons faire abstraction de cette résistance et supposer le mortier comme un corps libre soumis à ces forces et à l'impulsion μ, et établir les conditions de l'équilibre qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement qui sont réellement imprimées.

Les composantes verticales des forces sont :

$$\mu \sin \theta$$
$$- Q$$
$$- E$$

Les composantes horizontales des forces sont :

$$\mu \cos \theta$$
$$-fQ$$
$$-fE$$

La vitesse horizontale V que prend le mortier produit la quantité de mouvement MV, appliquée au centre de gravité de la pièce.

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu \sin \theta - Q - E = 0 \qquad (1)$$
$$\mu \cos \theta - fQ - fE = MV \qquad (2)$$

Pour 3me équation nous formerons celle des moments relativement à l'arête postérieure de la plaque du mortier, pour laquelle les moments des forces Q, fQ et fE sont nuls.

Les bras de levier des forces μ, E et MV sont respectivement γ, r' et h : il en résulte

$$\mu\gamma + Er' = MVh \qquad (3)$$

En résolvant ces équations on obtient :

$$Q + E = \mu \sin \theta \qquad (4)$$
$$Q = \mu \sin \theta - E \qquad (5)$$
$$\frac{V}{\mu} = \frac{\cos \theta - f \sin \theta}{M} \qquad (6)$$
$$E = \frac{MVh - \mu\gamma}{r'} \qquad (7)$$
$$\frac{E}{\mu} = \frac{h(\cos \theta - f \sin \theta) - \gamma}{r'} \qquad (8)$$

§ 17. OBSERVATIONS SUR LES FORMULES PRÉCÉDENTES.

L'équation (4) montre que la somme E + Q des percussions verticales contre les deux arêtes extrêmes de la plaque du mortier est égale à la composante verticale $\mu \sin \theta$ de la quantité de mouvement de recul produite par la réaction de la charge.

Il résulte des équations (4) et (5), que la percussion Q diminue lorsque E augmente et réciproquement. D'ailleurs connaissant E on en déduit Q et vice-versa.

L'équation (6) donne la vitesse V en fonction des données au mortier et de l'impulsion μ.

Connaissant V, l'équation (7) donne la valeur de E. Ainsi tout est connu. D'ailleurs on peut calculer E directement au moyen de la formule (8).

Ces diverses relations donnent lieu à plusieurs observations importantes concernant le tir des mortiers.

Les équations (6), (8) et (5) font voir que la vitesse du recul V et les percussions E et Q sont proportionnelles à l'effort μ de la charge contre la bouche à feu. Cette observation s'applique à toute percussion ou vitesse quelconque résultant du tir, et nous la généralisons dès maintenant pour ne plus y revenir.

La vitesse V (équation 6)

$$\frac{V}{\mu} = \frac{\cos\theta - f\sin\theta}{M}$$

est en raison inverse de la masse M de la bouche à feu.

Chaque fois que l'espace est restreint, comme à bord des navires, dans les batteries blindées, etc., on diminue la vitesse du recul en donnant une forte masse à la pièce.

La vitesse V augmente lorsque le coëfficient f décroit et réciproquement. Des plates-formes mouillées par la pluie, ou enduites d'une fine couche d'argile détrempée, deviennent glissantes : il en résulte de petites valeurs pour le coëfficient f, et par suite une vitesse de recul plus considérable.

La plus petite valeur du coëfficient f répond au tir sur de

la glace, parce que le frottement μ est sensiblement nul. En faisant $f = 0$ dans l'équation (6) on obtient :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{\cos\theta}{M} \qquad (9)$$

Cette formule donne la vitesse de recul la plus grande que le mortier puisse acquérir, pour un angle quelconque θ du tir, et dans l'hypothèse que la plaque conserve ses appuis sur la plate-forme.

On reconnaît à l'inspection du numérateur du second membre de l'équation (6) que V diminue lorsque θ augmente. Les mortiers tirent ordinairement sous des angles fort élevés et ont des reculs modérés. La valeur de θ qui donne la plus petite valeur de V se trouve en posant $V = 0$ dans l'équation (6) d'où

$$\cos\theta - f\sin\theta = 0$$

et par suite

$$tg\,\theta = \frac{1}{f} \qquad (10)$$

Ainsi le recul est anéanti lorsque l'angle du tir est égal à celui du frottement. Mais l'équation de condition :

$$\cos\theta - f\sin\theta = 0$$

introduite dans l'équation (8) donne pour E une valeur négative, ce qui signifie que la plaque du mortier est soulevée par la partie antérieure lorsque le recul est arrêté. Il s'en suit qu'en augmentant successivement l'angle du tir, la vitesse du recul diminue progressivement, et que, avant que cette vitesse ne devienne tout-à-fait nulle, on arrive à une inclinaison où la plaque du mortier perd son contact avec la plate-forme vers l'arête antérieure d'appui.

Si nous faisons $\theta = 0$ nous obtenons pour la plus grande valeur de V.

$$\frac{V}{\mu} = \frac{1}{M}$$

et l'influence du coëfficient du frottement a complètement disparu.

Mais pour que le mortier ne soit pas soulevé il faut qu'en faisant $\theta = 0$ dans l'équation (8) ce qui donne

$$\frac{E}{\mu} = \frac{h - \gamma}{r'}$$

on obtienne pour E une valeur positive, laquelle ne sera possible que pour autant que l'on aura

$$h - \gamma = \text{ ou } > 0.$$

Cette condition est remplie lorsque le centre de gravité du mortier est sur ou au-dessus de l'axe de l'âme. Mais cette hypothèse n'est jamais réalisée avec les bouches à feu en usage.

Ces considérations sont vraies pour des valeurs positives de γ, c'est-à-dire lorsque l'axe de l'âme prolongé coupe le sol en arrière de l'arête postérieure d'appui du mortier, comme c'est le cas de la fig. (7). Mais si γ était négatif, c'est-à-dire si l'axe de l'âme prolongé coupait le sol entre les deux arêtes d'appui du mortier fig. (8) il faudrait tenir compte de ce changement de signe.

Examinons l'équation (8)

$$\frac{E}{\mu} = \frac{h(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r'}$$

qui donne la percussion verticale E sur l'arête antérieure d'appui de la plaque du mortier.

La valeur de E doit être positive afin que la plaque ne soit pas soulevée à sa partie antérieure : cette condition exige que l'on ait :

$$h(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma = \text{ ou } > 0 \qquad (11)$$

Dans cette formule γ joue un rôle important. En effet si γ est plus grand que $h(\cos\theta - f\sin\theta)$ la percussion E devient négative. Lorsque l'axe de l'âme, suffisamment prolongé passe au-dessus de l'arête postérieure de la plaque du mortier en contact avec le sol il y a une tendance au soulèvement qui ne peut être empêché que pour autant que l'on ait

$$h(\cos\theta - f\sin\theta) = \text{ ou } > \gamma$$

Tel est le cas de la figure (7).

On prévient le soulèvement du mortier en allongeant la plaque en arrière du cul de la bouche à feu et reculant ainsi l'arête postérieure.

En procédant graduellement la perpendiculaire γ, diminue constamment ; elle devient nulle lorsque l'axe de l'âme prolongé rencontre l'arête postérieure de la plaque ; enfin γ change

de signe, lorsqu'elle est située sous la plaque, comme à la figure 8. La stabilité du mortier en est augmentée, car au lieu de la formule (8) nous aurons celle (8^{bis})

$$\frac{E}{\mu} = \frac{h(\cos\theta - f\sin\theta) + \gamma}{r'} \quad (8^{bis}).$$

La condition d'avoir la percussion E positive est ramenée à celle

$$h(\cos\theta - f\sin\theta) + \gamma = \text{ou} > 0 \quad (11^{bis})$$

relation plus facile à satisfaire que celle (8).

Concluons que dans le tir des mortiers à plaque, il importe que l'arête postérieure de la plaque soit assez éloignée du cul de la pièce pour que l'axe de l'âme suffisamment prolongé, vienne rencontrer le sol en avant de cette arête.

Il est essentiel pour la conservation de la plate forme que les percussions Q et E soient égales. Dans cette hypothèse l'équation (4) donne :

$$Q = E = \tfrac{1}{2}\mu\sin\theta.$$

Cette valeur de E substituée dans l'équation (8) produit

$$\tfrac{1}{2}\sin\theta = \frac{h(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r'}$$

Telle est l'équation de condition pour que les percussions verticales aux extrémités de la plaque du mortier soient égales.

En supposant qu'il s'agisse d'un mortier à plaque tirant sous l'angle de 45°, nous aurons les valeurs suivantes :

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ .\ .$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation de condition pour que les percussions E et Q soient égales, il vient

$$2h(1-f) = r' + \frac{4\gamma}{\sqrt{2}}.$$

Toutes choses égales d'ailleurs, si nous augmentons l'intervalle r' entre les arêtes extrêmes de la plaque, la résultante des efforts verticaux E + Q sera supportée par une plus grande partie de la plate-forme, et celle-ci sera moins exposée à être enfoncée. Il y a donc avantage à avoir des plaques d'une grande

longueur : d'autant plus qu'on peut en profiter pour augmenter la stabilité du mortier.

On déduit de l'équation (2)

$$f(Q + E) = \mu \cos\theta - MV.$$

La résistance produite par le frottement initial de la plaque sur le sol est égale à la composante horizontale $\mu \cos\theta$ de la réaction de la charge, diminuée de la quantité de mouvement de recul M V communiquée à la pièce.

Cette force horizontale $\mu \cos\theta - MV$ indique la résistance dont la plate forme doit être capable pour ne pas glisser sur le sol lors du recul.

ARTICLE II.

MORTIER A PLAQUE. — Percussions qui ont lieu lorsque le mortier est soulevé, prend un mouvement de translation parallèlement au sol et tourne comme sur une charnière autour de l'arête postérieure d'appui de la plaque.

---

§ 18. NOTATIONS.

Indépendamment des notations de l'article précédent, nous représenterons par :

ω la vitesse angulaire initiale du mortier autour de l'arête postérieure de la plaque en arrière du mortier,

$M k^2$ le moment d'inertie du mortier relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'arête de contact de la plaque avec la plate-forme.

$X = M(k^2 + h^2 + h'^2)$ le moment d'inertie (§ 6) du mortier relativement à l'arête du contact de la plaque avec la plate-forme.

---

§ 19. Mise en équation des quantités de mouvement, vitesses et percussions imprimées au mortier et a l'arête d'appui sur le sol.

—

L'arête antérieure de la plaque se détachant du sol, il n'y a pas lieu de s'occuper de la percussion E.

Le mortier ayant une vitesse angulaire ω, il en résulte une quantité de mouvement de rotation exprimée par (§ 7 équation XII)

$$\omega \, M \sqrt{h^2 + h'^2}$$

Les composantes de cette quantité de mouvement sont (§ 7 équation XI)

$$- \omega \, M \, h' \text{ composante verticale,}$$
$$+ \omega \, M \, h \text{ composante horizontale.}$$

La vitesse horizontale du recul V produit une quantité de mouvement M V.

Les forces verticales qui agissent sur le mortier sont :

$$\mu \sin \theta$$
$$- Q$$

Les forces horizontales sont :

$$\mu \cos \theta$$
$$- f Q$$

On en déduit les deux premières équations de l'équilibre qui doit exister entre les forces et les quantités de mouvement réellement imprimées.

$$\mu \sin \theta - Q = - \omega \, M \, h' \qquad (1)$$
$$\mu \cos \theta - f Q = M V + \omega M h \qquad 2)$$

Pour troisième équation formons celle des moments par rapport à l'arête postérieure de la plaque, pour laquelle les moments des forces Q et f Q sont nuls. D'ailleurs la percussion E n'existant pas, il n'y a pas lieu d'en prendre le moment.

Le moment de la réaction μ est $\mu \gamma$: celui de la quantité de

mouvement M V est M V h, et le moment de la quantité de mouvement de rotation est ω M $(k^2 + h^2 + h'^2)$ (§ 7 équation VIII).

Il en résulte la relation :

$$\mu\gamma = \mathrm{M\,V}\,h + \omega\,\mathrm{M}\,(k^2 + h^2 + h'^2) \tag{5}$$

La résolution des équations 1, 2 et 3 donne :

$$\frac{\mathrm{V}}{\mu} = \frac{(\cos\theta - f\sin\theta)\,(k^2 + h^2 + h'^2) - \gamma\,(h + f\,h')}{\mathrm{M}\,\{\,k^2 + h^2 + h'^2 - h\,(h + f\,h')\,\}} \tag{4}$$

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\gamma - h\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{\mathrm{M}\,\{\,k^2 + h^2 + h'^2 - h\,(h + f\,h')\,\}} \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mu} = \sin\theta + \frac{h_1\,\{\,\gamma - h\,(\cos\theta - f\sin\theta)\,\}}{k^2 + h^2 + h'^2 - h\,(h + f\,h')} \tag{6}$$

On trouve aussi les relations :

$$\mathrm{Q} = \mu\sin\theta + \omega\,\mathrm{M}\,h' \tag{7}$$

$$\omega = \frac{\mu\gamma - \mathrm{M\,V}\,h}{\mathrm{M}\,(k^2 + h^2 + h')} = \frac{\mu\,(\cos\ - f\ \sin\ \theta\,) - \mathrm{M\,V}}{\mathrm{M}\,(h + f\,h')} \tag{8}$$

Ces formules prennent une forme plus simple par l'introduction de la valeur de X (§ 18) : elles deviennent :

$$\frac{\mathrm{V}}{\mu} = \frac{\mathrm{X}\,(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma\,\mathrm{M}\,(h + f\,h')}{\mathrm{M}\,\{\,\mathrm{X} - \mathrm{M}\,h\,(h + f\,h')\,\}} \tag{9}$$

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\gamma - h\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{\mathrm{X} - \mathrm{M}\,h\,(h + f\,h')} \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mu} = \sin\theta + \frac{h'\,\mathrm{M}\{\gamma - h\,(\cos\theta - f\sin\theta)\,\}}{\mathrm{X} - \mathrm{M}\,h\,(h + f\,h')} \tag{11}$$

$$\omega = \frac{\mu\gamma - \mathrm{M\,V}\,h}{\mathrm{X}} \tag{12}$$

Ces équations sont établies dans l'hypothèse (fig. 7) que l'axe de l'âme prolongé passe au-dessus de l'arête postérieure de la

plaque. Mais dans le cas ordinaire des mortiers qui tirent sous des angles fort élevés, l'axe de l'âme passe au-dessous de cette arête (fig. 8). Dans ce cas il suffit de changer le signe de γ dans ces formules, qui deviennent

$$\frac{V}{\mu} = \frac{X(\cos\theta - f\sin\theta) + \gamma M(h + f h')}{M\{X - M h(h + f h')\}} \qquad (9^{bis})$$

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\gamma - h(\cos\theta - f\sin\theta)}{X - M h(h + f h')} \qquad (10^{bis})$$

$$\frac{Q}{\mu} = \sin\theta - \frac{h' M\{\gamma + h(\cos\theta - f\sin\theta)\}}{X - M h(h + f h')} \qquad (11^{bis})$$

$$\omega = -\frac{\mu\gamma + M V h}{X} = \frac{\mu(\cos\theta - f\sin\theta) - M V}{M(h + f h')} \qquad (12^{bis})$$

La valeur de ω devant être positive, la première des équations 12bis montre, par la valeur essentiellement négative qui en résulte pour ω, que la supposition du soulèvement du mortier par la partie antérieure est impossible, et que dans le tir sur une plate forme, le mortier présente toute stabilité du moment que l'axe de l'âme prolongé (fig. 8) coupe le sol entre les deux crêtes d'appui de la plaque.

Mais ces équations Nos bis, qui n'ont aucune raison d'être pour le cas ordinaire du tir sur une plate forme, deviendraient d'une utilité pratique, si l'on supposait que la plate forme est remplacée par deux directrices ou rails de chemin de fer, emboîtés par des coulisses qui seraient ménagées sous la plaque du mortier

Le recul se faisant sur ce chemin de fer, et le centre de gravité de la pièce étant supposé sous le chemin de fer, l'ordonnée verticale h de ce centre de gravité change de signe et devient négative. Il est alors possible d'obtenir des valeurs positives pour ω.

Nous ne ferons qu'indiquer cette solution qui trouvera peut-être son application dans l'emploi des affûts sur chassis dont l'usage paraît devoir s'étendre.

§ 20. Observations sur les formules précédentes.

Les deux termes de la fraction

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\gamma - h\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{X - M\,h\,(h + f\,h^1)} \qquad (10)$$

doivent être de mêmes signes, parce que ω est positif. Mais nous avons vu au § 17 de l'article I, que l'affût ne pouvait être soulevé qu'à la condition

$$h\,(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma < o$$

d'où il résulte à la fois :

$$\gamma - h\,(\cos\theta - f\sin\theta) > o$$
$$X - M\,h\,(h + f\,h^1) > o$$

L'équation (10) montre que ω croît en même temps que γ : en d'autres termes, la vitesse angulaire de l'affût augmente lorsque la perpendiculaire sur l'axe de l'âme menée de l'arête postérieure d'appui de la plaque sur le sol devient plus grande. Plus le fond de l'âme est élevé, plus, toutes choses égales d'ailleurs, la perpendiculaire γ croît, et plus la bouche à feu est exposée à être renversée en arrière.

Il importe donc, dans les mortiers à plaque, qui sont dans le cas de la figure 7, que le fond de l'âme soit aussi rapproché que possible de la plate forme. On y parvient en faisant le tracé de la pièce, de manière qu'une partie de l'épaisseur du métal autour de l'âme soit prise dans l'épaisseur de la plaque.

L'équation (12)

$$\omega = \frac{\mu\,\gamma - M\,V\,h}{X}$$

fait voir que ω est en raison inverse du moment d'inertie μ du mortier relativement à l'arête postérieure d'appui de la plaque. On augmente ce moment d'inertie par l'allongement de la plaque en arrière de la pièce, ce qui fait en même temps diminuer γ.

Si nous posons $\omega = o$ l'équation (10) devient :

$$\gamma - h\,(\cos\theta - f\sin\theta) = o \qquad (a)$$

Telle est la relation qui doit être satisfaite pour que la vitesse angulaire ω soit nulle.

Si notre méthode est bonne pour la mise en équation, nous devons obtenir la même formule pour indiquer que la percussion E sur l'arête antérieure d'appui de la plaque est nulle pour le cas où le mortier conserve ses appuis sur le sol : car les formules relatives aux problèmes traités aux articles I et II, doivent coïncider à la limite qui les sépare.

L'équation (8) § 16 de l'article I est

$$\frac{E}{\mu} = \frac{h\,(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r'}$$

L'hypothèse $E = o$ donne $h\,(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma = o$ (b) relation de condition identique avec celle (a)

L'équation (9)

$$\frac{V}{\mu} = \frac{X\,(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma M\,(h + f h')}{M\left\{X - M h\,(h + f h')\right\}}$$

fait voir que V est en raison inverse de M. La vitesse initiale du recul est retardée par la masse de la bouche-à-feu dans le cas du soulèvement tout comme lorsque la pièce conserve ses appuis sur le sol.

La vitesse V est moins rapide lorsque γ est plus grande. Ainsi la grandeur de la perpendiculaire γ, qui favorise la vitesse angulaire ω, est contraire à celle du recul V.

La vitesse V augmente lorsque θ diminue : plus l'angle du tir est faible, plus la direction de l'axe de l'âme se rapproche de l'horizontale, et plus la vitesse du recul est considérable.

Si nous supposons que le coefficient du frottement f, devient assez fort pour arrêter le recul, ou que ce frottement soit remplacé par un obstacle équivalent, comme le serait une charnière à l'arête postérieure de la plaque; dans cette hypothèse on a la relation $V = o$ et l'équation (12) devient

$$\omega = \frac{\mu\,\gamma}{X}$$

Telle serait la vitesse initiale angulaire dans le cas où le recul serait empêché.

Nous venons de voir qu'en ralentissant V on augmentait ω : cependant les nécessités du service exigent un recul modéré parce que la mise en batterie des mortiers est une opération laborieuse. D'ailleurs le soulèvement de la pièce est nuisible à la conservation de la plate forme, parce que la bouche-à-feu en retombant acquiert une force vive qui doit être détruite instantanément.

Comparons la percussion Q qui a lieu lors du soulèvement à celle qui se produit quand la plaque conserve ses appuis.

De l'équation (1) § 19 on déduit

$$Q = \mu \sin \theta + \omega M h^1$$

La percussion verticale Q sur l'arête postérieure de la plaque est, à elle seule, égale à la composante verticale $\mu \sin \theta$ de la réaction de la charge, tandis que d'après l'équation (1) du § 16, relative au cas où la plaque n'est pas soulevée, cette composante verticale $\mu \sin \theta$ se repartit sur les deux arêtes d'appui de la plaque et produit les chocs E et Q.

Le choc Q, lorsqu'il y a soulèvement du mortier, outre la force $\mu \sin \theta$, comprend la composante verticale ω M h^1 de la quantité de mouvement de rotation de la pièce.

Il résulte de cette analyse que le soulèvement de la pièce est destructeur de la plate forme sous plusieurs rapports : parce que la composante verticale $\mu \sin \theta$ agit sur l'arête postérieure de la plaque seulement au lieu de se repartir sur les deux appuis du mortier : parce que le choc vertical sur la plate-forme est plus considérable que cette composante $\mu \sin \theta$: enfin, parce que le mortier en retombant sur le sol acquiert une force vive qui doit être détruite instantanément.

ARTICLE III.

MORTIER A TOURILLONS SUR AFFUT TRAINEAU. — Percussions produites lors du tir dans l'hypothèse que l'affût conserve ses appuis sur la plate-forme.

§ 21. Notations et hypothèses.

Les mortiers sur affûts-traineaux sont la seconde espèce de mortiers. Ils ont des tourillons placés vers l'extrémité de la pièce en arrière du fond de l'âme. L'axe des tourillons coupe celui de l'âme.

L'élévation est donnée par un vis de pointage ou plus généralement par un coin ou coussinet de pointage.

Le contact du coussinet avec la pièce a lieu avec le renfort à la partie cylindrique que présente la forme extérieure de la bouche-à-feu : la résultante de la résistance du coussinet est donc dirigée perpendiculairement à l'axe de l'âme.

Nous supposons, comme pour les mortiers à plaque, que l'affût repose sur la plate-forme suivant deux arrêtes de contact, l'une à la partie antérieure vers la bouche de la pièce, l'autre à la partie postérieure vers le cul du mortier.

Nous représenterons par :

C la masse du mortier,

A la masse de l'affût,

$M = A + C$ les masses réunies du mortier et de l'affût,

μ l'impulsion provenant de la réaction de la charge,

θ l'angle d'élévation de l'axe de l'âme au-dessus de l'horizon,

γ la perpendiculaire menée de l'arête postérieure d'appui de l'affût sur l'axe de l'âme prolongé.

V la vitesse du recul parallèlement au sol,

T la composante verticale de la résultante des percussions exercées par les tourillons sur leurs encastrements.

T' la composante horizontale de la résultante des percussions exercées par les tourillons sur leurs encastrements.

Q la percussion exercée par l'arête postérieure de l'affût normalement à la plate-forme.

fQ le frottement provenant de la percussion Q,

E la percussion exercée par l'arête antérieure de l'affût normalement à la plate-forme.

fE le frottement provenant de la percussion E,

P la résultante des percussions sur le coussinet de pointage, dirigée perpendiculairement à l'axe de l'âme,

r' la distance entre les deux arêtes antérieure et postérieure de l'affût, suivant lesquelles a lieu le contact avec la plate-forme.

c la hauteur de l'axe des tourillons au dessus de la plate-forme,

c' la distance du plan vertical passant par l'axe des tourillons à l'arête d'appui postérieure de l'affût,

e la hauteur du centre du coussinet de pointage au-dessus de la plate-forme : centre par lequel passe la force P,

e' la distance de la verticale passant par le centre du coussinet de pointage à l'arête postérieure d'appui de l'affût,

d la hauteur du centre de gravité du mortier au-dessus du plan horizontal passant par l'axe des tourillons.

d' la distance du centre de gravité du mortier au plan vertical passant par l'axe des tourillons.

a' La distance du centre de gravité du mortier à l'axe des tourillons,

g la hauteur du centre de gravité de l'affût au-dessus de la plate-forme,

g' la distance de la verticale passant par le centre de gravité de l'affût à l'arête postérieure d'appui sur la plate-forme,

$e - c$ la distance du centre du coussinet de pointage au-dessus du plan horizontal passant par l'axe des tourillons.

$e^1 - c^1$ la distance du centre du coussinet de pointage au plan vertical passant par l'axe des tourillons.

h la hauteur du centre de gravité du mortier et de l'affût réunis au-dessus du sol.

On observe les inégalités suivantes dans la construction ordinaire des affûts :

$$c + d > e > c > g$$

$$e^1 > r^1 > c^1 + d^1 > g^1 > c^1$$

---

§ 22. Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au mortier.

—

Si nous remplaçons par des forces la résistance de l'affût suivant l'axe des tourillons et suivant le centre du coussinet de pointage, nous pourrons faire abstraction de l'affût et considérer le mortier comme un corps libre, soumis à ces forces et à la réaction μ de la charge, et établir les conditions de l'équilibre qui doit exister entre ces forces et cette réaction d'une part, et les quantités de mouvement réellement imprimées d'autre part.

Les forces qui agissent sur le mortier sont :

$\mu \sin \theta$ composante verticale $\mu \cos \theta$ composante horizontale	de la réaction μ
$-$ T composante verticale $-$ T' composante horizontale	de la résistance des encastrements des tourillons.

On aura les composantes verticale et horizontale de la force P, en remarquant que cette force est perpendiculaire sur l'axe de l'âme et fait ainsi avec la verticale le même angle θ que l'axe de l'âme fait avec l'horizontale : de plus la composante verticale de P est négative parce qu'elle agit de bas en haut et que nous considérons comme positives les forces dirigées en sens contraire du haut en bas.

$-P\cos\theta$ composante verticale
$P\sin\theta$ composante horizontale
} de la résistance du coussinet de pointage.

Le mortier étant animé de la vitesse horizontale V il en résulte une quantité de mouvement C V, appliquée en son centre de gravité.

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu\sin\theta - T - P\cos\theta = o \qquad (1)$$

$$\mu\cos\theta - T' + P\sin\theta = CV \qquad (2)$$

Pour troisième équation nous formerons celle des moments relativement à l'axe des tourillons, relativement auquel les moments des forces μ, T et T′ sont nuls.

Les bras de levier des composantes $-P\cos\theta$ et $P\sin\theta$ sont respectivement (§ 21) $e' - c'$ et $e - c$. Les moments qui en résultent tendent tous les deux à faire tourner le mortier dans le même sens et sont de mêmes signes.

D'ailleurs le moment de la quantité de mouvement C V imprimée au mortier est C V d, on a donc :

$$P\cos\theta\,(e'-c') + P\sin\theta\,(e-c) = CV\,d \qquad (3).$$

---

§ 23. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU SYSTÈME DU MORTIER ET DE L'AFFUT RÉUNIS.

Considérons le mortier et l'affût réunis comme ne faisant qu'un seul corps solide, il y aura équilibre d'une part entre la réaction μ et la résistance du sol représentée par des forces, et d'autre part entre les quantités de mouvement réellement imprimées.

Les forces qui agissent sur le système du mortier et de l'affût réunis sont :

$\mu\sin\theta$ composante verticale
$\mu\cos\theta$ composante horizontale
} de la réaction μ

$-Q$ résistance normale du sol sur l'arête postérieure de l'affût.

$-fQ$ frottement provenant de la percussion Q

— E résistance normale du sol sur l'arête antérieure de l'affût.

— f E frottement provenant de la percussion E.

La quantité de mouvement imprimée au système du mortier et de l'affût réunis résulte de la vitesse horizontale V et a pour expression $M V = (A + C) V$.

Cette force est appliquée au centre de gravité du mortier et de l'affût réunis, centre dont l'ordonnée verticale est h.

Les deux premières équations de l'équilibre entre les forces et les quantités de mouvement imprimées sont

$$\mu \sin \theta - Q - E = 0 \qquad (4)$$

$$\mu \cos \theta - f E - f Q = M V \qquad (5)$$

Pour troisième équation nous prendrons celle des moments relativement à l'arête postérieure de l'affût, pour laquelle les moments des forces Q, f Q et f E sont nuls. Nous aurons,

$$\mu \gamma + E r' = M V h \qquad (6).$$

---

§ 24. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRÉCÉDENTES.

Les équations (4), (5) et (6) sont exactement les mêmes que celles (1), (2) et (3) du § 15 relatives aux mortiers à plaque, pour le cas où la pièce conserve ses appuis sur le sol. L'élimination devant conduire aux mêmes résultats on a :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{(\cos \theta - f \sin \theta)}{M} \qquad (7)$$

$$\frac{E}{\mu} = \frac{h (\cos \theta - f \sin \theta) - \gamma}{r'} \qquad (8)$$

$$Q = \mu \sin \theta - E \qquad (9)$$

On déduit des équations 1, 2 et 3.

$$P = \frac{C V d}{(e - c) \sin \theta + (e' - c') \cos \theta} \qquad (10)$$

$$T = \mu \sin\theta - P\cos\theta \qquad (11)$$

$$T' = \mu\cos\theta + P\sin\theta - C\,V \qquad (12)$$

Substituons dans les équations (7) et (8) à M sa valeur A + C et à h sa valeur déduite de la relation § (5)

$$M\,h = C\,(c+d) + A\,g \qquad (13)$$

il vient

$$\frac{V}{\mu} = \frac{\cos\theta - f\sin\theta}{A+C} \qquad (14)$$

$$\frac{E}{\mu} = \frac{(\cos\theta - f\sin\theta)\left\{C(c+d)+Ag\right\} - \gamma(A+C)}{r'(A+C)} \qquad (15)$$

Les formules auxquelles nous sommes parvenus sont relatives au cas où l'axe de l'âme prolongé passe au-dessus de l'arête postérieure de l'affût : nous avons vu le cas analogue pour les mortiers à plaque figure (7). C'est ce qui arrive ordinairement dans le tir des mortiers sur affût traineaux avec l'angle de 30° et au dessous.

Mais lorsque l'axe de l'âme est élevé de 45° et au-delà son prolongement passe le plus souvent au-dessous de l'arête postérieure de l'affût et γ change de signe.

Pour nous assurer des circonstances qui font changer γ de signe, exprimons cette perpendiculaire sur l'axe de l'âme à l'aide de l'angle de tir θ et des coordonnées de l'axe des tourillons qui coupe celui de l'âme. Nous trouvons en appliquant la formule V § 2.

$$\gamma = c\cos\theta - c'\sin\theta \qquad (16)$$

et nous voyons que γ sera négatif quand on aura

$$c\cos\theta - c'\sin\theta < 0 \qquad \text{ou}$$

$$-\frac{e}{c'} < tg\,\theta$$

Si nous introduisons cette valeur de γ (*eq* : 16) dans l'équation (8) elle devient

$$\frac{E}{\mu} = \frac{h(\cos\theta - f\sin\theta) - (c\cos\theta - c'\sin\theta)}{r'} \qquad (17)$$

L'équation (17) est applicable à toutes les valeurs de γ, dont le signe dépendra des valeurs numériques de c, c' et $\sin\theta$

---

§ 25. REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS PRÉCÉDENTES.

L'équation (7) $\dfrac{V}{\mu} = \dfrac{\cos\theta - f\sin\theta}{M}$

est la même que l'équation (6) du § (16) relative aux mortiers à plaque. Les observations du § 17 sont entièrement applicables ici. Nous ajouterons que la formule (7) § 24 est indépendante de la position de l'axe des tourillons : il en résulte que le mode de liaison du mortier avec l'affût est sans influence sur la vitesse V du recul et que cette vitesse n'est fonction que de la masse entière M du système de l'angle θ du tir, du coëfficient f du frottement et de la réaction μ produite par la charge.

Les équations (8) et (9) du § (24) sont encore les mêmes que celles (5) et (8) du (§ 16) et il y a lieu de leur appliquer les remarques faites au § (17).

Il importe que les percussions E et Q soient aussi égales que possible, surtout pour les angles de tir élevés pour lesquels les chocs verticaux contre la plate-forme sont les plus considérables.

Il faut à cet effet que la construction du mortier et de l'affût satisfasse à l'équation de condition $E = Q$ tirée des égalités (8) et (9) on en déduit comme au § 17

$$\tfrac{1}{2} r' \sin\theta = h(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma$$

Substituant à γ sa valeur équation (16) on a

$$\tfrac{1}{2} r' \sin\theta = h(\cos\theta - f\sin\theta) - (c\cos\theta - c'\sin\theta)$$

Mettant à la place de θ sa valeur 60° qui est l'angle du tir le plus élevé pour les mortiers ordinaires, on obtient :

$$\tfrac{1}{2} r' \sin 60° = h(\cos 60° - f\sin 60°) - (c\cos 60° - c'\sin 60°)$$

Mais à cause des relations connues

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

la formule précédente devient

$$\tfrac{1}{2} r' = \frac{h - c}{\sqrt{3}} + c' - fh.$$

Lorsque les quantités r', h, f, c et c' satisferont à cette équation, on aura un système de mortiers, qui, sous l'angle de 60° le plus destructeur des plate-formes repartira les percussions normales au sol, également sur tous ses points d'appui.

Une condition essentielle, pour éviter des chocs trop considérables sur l'arête postérieure d'appui de l'affût, ainsi que nous le verrons à l'article suivant, est que l'affût ne soit pas soulevé : à cet effet la percussion E doit être positive ce qui exige (équation 17) l'inégalité.

$$h(\cos\theta - f\sin\theta) - c\cos\theta + c'\sin\theta > 0.$$

Pour que cette condition soit aisément satisfaite il faut que c' soit aussi grand que possible. D'où il résulte que la stabilité du mortier demande que l'intervalle entre l'arête postérieure d'appui de l'affût et la projection horizontale de l'axe des tourillons soit aussi grand que possible.

De plus c doit être aussi petit que la construction de l'affût le permet, c'est-à-dire qu'il faut abaisser l'axe des tourillons. Enfin h doit avoir la valeur la plus forte lorsque $\cos\theta - f\sin\theta$ est positif, et la plus faible lorsque cette quantité devient négative : cette dernière hypothèse n'est d'ailleurs jamais réalisée dans les bouches-à-feu de l'artillerie.

L'équation (10) § (24)

$$P = \frac{C\,V\,d}{(e - c)\sin\theta + (e' - c')\cos\theta}$$

conduit à plusieurs remarques intéressantes.

Nous voyons que la percussion contre le coussinet de pointage est proportionnelle à la masse C du mortier, à la vitesse V du recul, à la hauteur d du centre de gravité du mortier au-dessus

de l'axe des tourillons. Cette percussion est en raison inverse du dénominateur

$$(e - c) \sin \theta + (e' - c') \cos \theta.$$

Ainsi à calibre égal et à même charge et toutes autres choses restant les mêmes, le mortier le plus pesant fatiguera le plus le coussinet de pointage : c'est précisément l'inverse de ce que nous remarquerons plus tard quand nous étudierons les canons.

Le choc P croît quand V augmente. Si le tir avait lieu sur de la glace ou sur une plate-forme graissée ou produisant peu de frottement, la vitesse du recul augmenterait et la percussion P serait plus violente contre le coussinet de pointage.

A mesure que le centre de gravité du mortier se rapproche de l'axe des tourillons, d diminue ainsi que P : et si le centre de gravité se trouvait sur cet axe, P serait nul. Ainsi, pour soulager le coussinet de pointage, il faut faire en sorte que l'axe des tourillons soit aussi rapproché que possible du centre de gravité de la bouche-à-feu.

Si d était négative, c'est-à-dire si le centre de gravité de la pièce, se trouvait au-dessous de l'axe des tourrillons, celui-ci coupant toujours l'axe de l'âme, P serait également négative, et le mortier, au lieu de heurter le coussinet de pointage lors du tir, s'en écarterait au contraire par le relèvement de la volée.

Nous voyons que P s'amoindrit lorsque $e - c$ et $e' - c'$ deviennent plus considérables, c'est-à-dire à mesure que le coussinet de pointage est plus éloigné de l'axe des tourillons et par suite plus rapproché de la plate bande de volée.

Pour apprécier l'influence de l'angle θ, il faudrait, dans la formule (10), substituer à V et d leurs valeurs en fonction θ, et appliquer ensuite la méthode des coëfficients différentiels, pour la recherche des maxima et minima. La valeur de V en fonction de θ est donnée par l'équation (14) : quant à d on trouvera facilement que l'on a $d = a' \sin \theta$: en représentant par a' la distance connue du centre de gravité du mortier à l'axe des tourillons. Cette marche conduirait à une solution que nous ne ferons qu'indiquer. Toutefois l'on peut obtenir un premier rapport entre θ et P. En effet remarquons que $P = 0$ pour $V = 0$. L'hypothèse de $V = 0$ introduite dans l'équation (10) donne

$$\cos\theta - f\sin\theta = 0 \text{ d'où}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{f}$$

On conçoit en effet que lorsque le recul est nul, la percussion sur le coussinet de pointage doit l'être également. Le recul est nul lorsque l'angle du tir est égal à celui du frottement du mortier sur la plate-forme.

L'équation (11)

$$T = \mu\sin\theta - P\cos\theta$$

fait voir que la percussion verticale sur l'axe des tourillons est égale à la composante verticale de l'impulsion μ diminuée de la composante verticale du choc P contre le coussinet de pointage.

Nous voyons par l'équation (13)

$$T' = \mu\cos\theta + P\sin\theta - CV$$

que la composante horizontale T′ des percussions exercées sur l'axe des tourillons est égale à la somme des composantes également horizontales de la réaction μ et de la percussion P diminuée de la quantité de mouvement de recul CV dont le mortier est animé. Il en résulte qu'on soulage les tourillons en favorisant le recul et en augmentant la masse du mortier. Si le recul était entièrement arrêté le choc horizontal contre les tourillons serait un maximum.

ARTICLE IV.

MORTIER A TOURILLONS SUR AFFUT TRAINEAU. — Percussions qui ont lieu lorsque le système du mortier et de l'affût est soulevé par sa partie antérieure et prend un mouvement de translation parallèlement au sol, tout en tournant comme sur une charnière autour de l'arête postérieure d'appui de l'affût.

§ 26. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU MORTIER.

Outre les notations de l'article précédent, nous représentons par :

ω. la vitesse angulaire de l'affût.

CK^2 le moment d'inertie du mortier relativement à une droite passant par le centre de gravité et parallèle à l'axe des tourillons.

AK'^2 le moment d'inertie de l'affût relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe des encastrements des tourillons.

h' la distance entre l'arête postérieure d'appui de l'affût et la verticale passant par le centre de gravité du système formé du mortier et de l'affût réunis.

Si nous remplaçons par des forces la résistance que l'affût oppose au mouvement du mortier suivant l'axe des tourillons et au coussinet de pointage, nous pourrons faire abstraction de l'affût et considérer la bouche-à-feu comme un corps libre soumis à ces forces et à l'impulsion μ et établir les conditions de l'équilibre qui doit exister entre ces forces et cette impulsion d'une part et les quantités de mouvement réellement imprimées d'autre part.

Les forces auxquelles le mortier est soumis sont :

$\mu \sin \theta$ composante verticale
$\mu \cos \theta$ id. horizontale
} de l'impulsion μ

$-T$ composante verticale
$-T'$ composante horizontale
} de la résistance de l'affût suivant l'axe des tourillons.

$-P\cos\theta$ composante verticale
$+P\sin\theta$ id. horizontale
} de la résistance de l'affût suivant le coussinet de pointage.

Le mortier participant à la vitesse angulaire de l'affût, est animé de la vitesse ω autour de l'arête postérieure d'appui de l'affût. Il en résulte une quantité de mouvement de rotation exprimée par $\omega C\sqrt{(c+d)^2+(c'+d')^2}$ dont les composantes sont § 7 équation XI.

$-\omega C(c'+d')$ composante verticale.

$\omega C(c+d)$ id. horizontale.

La composante verticale est négative, parce qu'elle agit de bas en haut, et que nous considérons comme positives les forces verticales qui actionnent de haut en bas. La composante horizontale est positive parcequ'elle agit dans le sens du recul.

La vitesse V de recul de tout le système, produit sur le mortier une quantité de mouvement horizontale CV, dont la résultante est appliquée au centre de gravité de la pièce.

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu\sin\theta - T - P\cos\theta = -\omega C(c'+d') \qquad (1)$$

$$\mu\cos\theta - T' + P\sin\theta = CV + \omega C(c+d) \qquad (2)$$

Pour 3me équation nous prendrons celle des moments de ces forces relativement à l'arête postérieure d'appui de l'affût.

Le bras de levier de la force μ est γ, d'où résulte le moment $\mu\gamma$.

La distance du centre de gravité du mortier à l'arête postérieure d'appui de l'affût est $\sqrt{(c+d)^2+(c'+d')^2}$ et le moment de la quantité de mouvement de rotation de la pièce autour de cette arête est § 7 équation VIII, $\omega C\left\{K^2+(c+d)^2+(c'+d')^2\right\}$.

L'équation des moments est

$$\mu\gamma + T c' - T' c + P e'\cos\theta + P e\sin\theta =$$

$$= \omega C\left\{K^2+(c+d)^2+(c'+d')^2\right\} + VC(c+d) \qquad (3)$$

L'équation (3) a l'inconvénient d'avoir cinq inconnues ce qui

allonge les procédés de l'élimination. On en obtient une autre qui ne renferme que trois inconnues en prenant les moments des forces relativement à l'axe des tourillons pour lequel les moments des chocs T et T′ et μ sont nuls.

Les bras de levier des forces P cos θ, P sin θ, et C V sont respectivement $e' - c'$, $e - c$ et d. Nommons q le bras de levier de la quantité de mouvement de rotation du mortier, pris relativement à l'axe des tourillons, nous aurons l'égalité.

$$P(e'-c')\cos\theta + P(e-c)\sin\theta = CVd + \omega Cq\sqrt{(c+d)^2+(c'+d')^2}$$

Nous déterminerons q au moyen de la formule § 8 équation XV,

$$q = \frac{K^2 + x_1^2 + y_1^2 - x\,x_1 - y\,y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

dans laquelle les lettres ont les significations suivantes :

$$x_1 = c' + d'$$
$$y_1 = c + d$$
$$x = c'$$
$$y = c$$

Substituant ces valeurs il vient

$$q = \frac{K^2 + (c+d)^2 + (c'+d')^2 - c(c+d) - c'(c'+d')}{\sqrt{(c+d)^2+(c'+d')^2}}$$

Au moyen de cette relation l'équation des moments devient :

$$P(e'-c')\cos\theta + P(e-c)\sin\theta =$$

$$= \left[\begin{array}{l} CVd + \\ + \omega C\left\{K^2+(c+d)^2+(c'+d')^2-c(c+d)-c'(c'+d')\right\}^{\frac{1}{2}} \end{array}\right] \quad (14).$$

L'avantage de la formule (14) est manifeste, puisqu'on peut en déduire immédiatement la valeur de P en fonction de V et de ω.

§ 27. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU MORTIER ET A L'AFFUT RÉUNIS.

Le mortier et l'affût ne se séparent pas dans les mouvements de glissement sur le sol et de rotation autour de l'arête postérieure d'appui de l'affût, qui accompagnent le recul : ils peuvent être considérés comme un système invariable libre soumis à l'impulsion μ provenant de la réaction de la charge, et aux forces qui représentent la résistance du sol sous l'arête d'appui de l'affût, et il doit y avoir équilibre entre cette impulsion et ces forces d'une part et les quantités de mouvement réellement imprimées à ce système d'autre part.

Les forces qui agissent sur le mortier et l'affût réunis sont :

$\mu \sin \theta$ composante verticale
$\mu \cos \theta$ id. horizontale
} de la force μ

$-$ Q résistance normale du sol sur l'arête postérieure d'appui de l'affût.

$-f$ Q résistance du sol provenant du frottement produit par la percussion Q.

Les quantités de mouvement imprimées au système du mortier et de l'affût réunis sont :

$MV = (A + C)V$ quantité de mouvement horizontale produite par la vitesse V de recul : cette force est appliquée au centre de gravité du système formé du mortier et de l'affût réunis.

$\omega M \sqrt{h^2 + h'^2}$ (§ 7 équation XII) quantité de mouvement de rotation du mortier et de l'affût réunis.

Les composantes de cette force sont (§ 7 équation XI)

$\omega M h$ composante horizontale de la quantité de mouvement de rotation du mortier et de l'affût réunis, dirigée dans le sens du recul.

$-\omega M h'$ composante verticale de la quantité de mouvement de rotation du mortier et de l'affût réunis, dirigée de bas en haut.

Les deux premières équations de l'équilibre entre les forces et les quantités de mouvement sont :

$$\mu \sin \theta - Q = - \omega M h' \qquad (5)$$

$$\mu \cos \theta - fQ = \omega M h + MV \qquad (6)$$

La 3me équation sera celle des moments que nous prendrons relativement à l'arête postérieure d'appui de l'affût, pour laquelle les moments des forces Q et fQ sont nuls.

Le moment de l'impulsion μ est $\mu\gamma$.

Le moment de la force MV est MVh.

Le moment de la quantité de mouvement de rotation est $\omega M \left\{ x^2 + h^2 + h'^2 \right\}$ en représentant par Mx^2 le moment d'inertie du mortier et de l'affût réunis relativement à une droite passant par le centre de gravité de ce système et parallèle à l'axe des tourillons.

L'équation des moments est

$$\mu\gamma = MVh + \omega M \left\{ x^2 + h^2 + h'^2 \right\} \qquad (7)$$

Il est facile d'exprimer le moment d'inertie Mx^2 du système en fonction des moments d'inertie de chacune des deux parties, mortier et affût, qui le composent.

Nous savons en effet, que le moment d'inertie d'un assemblage de corps relativement à une droite donnée est égal à la somme des moments d'inertie partiels de chacun de ces corps relativement à cette droite. Or le moment d'inertie du mortier relativement à l'arête postérieure d'appui de l'affût est :

$$C \left\{ K^2 + (c+d)^2 + (c'+d')^2 \right\} :$$

le moment d'inertie de l'affût par rapport à cette droite est

$$A \left\{ K'^2 + g^2 + g'^2 \right\}$$

Il en résulte

$$M\left\{x^2+h^2+h'^2\right\} = C\left\{K^2+(c+d)^2+(c'+d')^2\right\} + A\left\{K'^2+g^2+g'^2\right\} \quad (8).$$

§ 28. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRÉCÉDENTES.

On parvient par l'élimination entre les équations (5) (6) et (7) aux valeurs suivantes :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{(x^2 + h^2 + h'^2)(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma(h + fh')}{M\left\{x^2 + h^2 + h'^2 - h(h + fh')\right\}} \tag{9}$$

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\gamma - h(\cos\theta - f\sin\theta}{M\left\{(x^2 + h^2 + h'^2) - h(h + fh')\right\}} \tag{10}$$

$$\frac{Q}{\mu} = \sin\theta + \frac{h'\left\{\gamma - h(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}}{x^2 + h^2 + h'^2 - h(h + fh')} \tag{11}$$

Ces formules deviennent identiques à celles obtenues pour les mortiers à plaque, pour le cas du soulèvement en faisant

$$X = M(x^2 + h^2 + h') = C^2\left\{K^2 + (c+d)^2 + (c'+d')^2\right\} + A\left\{K^2 + g'^2 + g'^2\right\} \tag{12}.$$

L'expression représentée par X est le moment d'inertie du mortier et de l'affût réunis relativement à la droite autour de laquelle ce système tourne. On obtient par l'introduction de X, dans les équations précédentes :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{X(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma M(h \quad fh')}{M\left\{X - Mh(h + fh')\right\}} \tag{9^{bis}}$$

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\gamma - h(\cos\theta - f\sin\theta)}{X - hM(h f + fh')} \tag{10^{bis}}$$

$$\frac{Q}{\mu} = \sin\theta + \frac{h' M\left\{\gamma - h(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}}{X - hM(h + fh')} \tag{11^{bis}}$$

On déduit de l'équation (4)

$$p = \frac{CVd + \omega C\left\{K^2 + (c+d)^2 + (c'+d'^2) - c(c+d) - c'(c'+d')\right\}}{(e - c)\sin\theta + (e' - c')\cos\theta} \tag{12}.$$

Il résulte des équations (1) et (2)

$$T = \mu \sin\theta - P\cos\theta + \omega C(c' + d') \qquad (13)$$

$$T' = \mu \cos\theta + P\sin\theta - CV - \omega C(c + d) \qquad (14)$$

La valeur de P sera connue au moyen de l'équation (12) en y substituant à V et ω leurs valeurs données par les équations (9) et (10).

Connaissant V, ω et P, on tirera les valeurs de T et T' des équations (13) et (14).

---

§ 29. REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS PRÉCÉDENTES.

Les équations (9^{bis})(10^{bis})(11^{bis}) du § 28, qui donnent les valeurs de V, ω et Q sont les mêmes que celles (9) (10) et (11) du § (19), et il y a lieu de leur appliquer les remarques du § (20).

Il en résulte que le mode de réunion du mortier avec l'affût est sans influence sur la vitesse V du recul, sur la vitesse angulaire ω, et sur la percussion Q sur l'arête postérieure de l'affût en contact avec le sol. Les percussions sur l'axe des tourillons et sur le coussinet de pointage ne modifient en rien le mouvement du recul et le choc contre la plate-forme : ces mouvements et cette percussion sont absolument les mêmes (toutes choses égales d'ailleurs) que si le mortier et l'affût ne formaient qu'un seul et même corps solide. Ainsi tombe par l'analyse, cette opinion de quelques artilleurs, que la percussion sur l'axe des tourillons et sur le coussinet de pointage pouvait changer et ralentir le recul en occasionnant des percussions verticales plus violentes.

En effet, dans un système de corps en mouvement, les réactions réciproques de ces corps les uns sur les autres, ne peuvent changer en rien le mouvement du centre de gravité du système.

L'équation (12) montre que la percussion P sur le coussinet de pointage est proportionnelle à la masse C du mortier; cette percussion augmente avec la vitesse V du recul et avec celle ω de rotation. Remarquons qu'en vertu des équations (9)

et (10) V et ω sont en raison inverse de la masse totale M du système.

On en conclut.

1° que la percussion P sur le coussinet de pointage est en raison inverse de la masse totale M du mortier et de l'affût réunis.

2° que la masse M ne variant pas, la percussion P est proportionnelle à la masse C du mortier.

Ainsi contrairement à ce qui a lieu pour les canons (comme nous le verrons plus tard) la percussion sur le coussinet de pointage, pour un poids donné du système, est d'autant plus forte que la masse du mortier est plus considérable.

En développant les binomes du numérateur de la formule (12) et faisant la réduction des termes, on trouve :

$$P = \frac{C V d + \omega C \left\{ K^2 + d(c + d) + d'(c' + d') \right\}}{(e - c)\sin\theta + (e' - c')\cos\theta} \qquad (15)$$

Nous remarquons que la valeur de P est d'autant moins considérable que les ordonnées d et d' du centre de gravité du mortier relativement à l'axe des tourillons sont plus faibles et si le centre de gravité coïncide avec cet axe, la valeur de P est simplement à cause de $d = 0 \quad d' = 0$

$$P = \frac{\omega C K^2}{(e - c)\sin\theta + (e' - c')\cos\theta} \qquad (16)$$

Ainsi plus le centre de gravité du mortier est rapproché de l'axe des tourillons, plus la percussion sur le coussinet de pointage est faible. Nous avons obtenu le même résultat à l'article III relatif au cas où le mortier conserve ses appuis sur le sol ; ainsi qu'on peut le voir dans l'équation 10 du § 24, en y faisant $d = 0$, et comme le confirment nos observations du § 25.

Dans le dénominateur de la formule 12 les facteurs $e - c$, et $e' - c'$ sont les coordonnées du centre du coussinet de pointage relativement à l'axe des tourillons : il en résulte que plus le centre du coussinet de pointage est éloigné de l'axe des tourillons, plus le dénominateur de la formule (12) augmente et plus la percussion P diminue.

Ainsi pour atténuer les percussions sur la vis ou le coussinet de pointage il faut augmenter la distance entre l'axe des tourillons et le coussinet ou la vis de pointage

Il résulte aussi de l'examen de la formule (12) que plus CK^2 augmente, plus la percussion P devient forte. En d'autres termes: la percussion sur le coussinet de pointage croît lorsque le moment d'inertie du mortier relativement à une droite passant par le centre de gravité et parallèle à l'axe des tourillons devient plus considérable, ce qui est encore une propriété contraire à celle que nous remarquerons dans les canons.

En comparant la formule (12) § 28 à celle (10) § 24, nous voyons que la valeur de P est plus grande dans la première de ces formules. On en conclut que, toutes choses égales d'ailleurs, la percussion sur le coussinet de pointage est plus considérable quand l'affût est soulevé que lorsqu'il conserve ses appuis sur le sol.

Examinons la formule (15)

$$T = \mu \sin\theta - P\cos\theta + \omega C(c' + d')$$

Nous remarquons que T augmente

1° avec la composante verticale $\mu \sin\theta$ de la quantité de mouvement due à la réaction de la charge.

2° avec la composante verticale $\omega C(c' + d')$ de la quantité de mouvement de rotation du mortier autour de l'arête de contact de l'affût avec le sol.

Nous observons aussi que T diminue lorsque la composante verticale $P\cos\theta$ de la percussion sur le coussinet de pointage augmente.

La composante verticale de la quantité de mouvement de rotation du mortier $\omega C(c' + d')$, augmente avec $c' + d'$, ou avec la distance entre le centre de gravité du mortier et la verticale passant par l'arête postérieure d'appui de l'affût. Il en résulte, que si l'on augmente la stabilité du système en éloignant le centre de gravité du mortier de l'arête postérieure d'appui de l'affût, par contre cette disposition rend plus violente la percussion verticale contre le coussinet de pointage.

Examinons la formule (14) du § 28.

$$T' = \mu\cos\theta + P\sin\theta - CV - \omega C(c + d)$$

Nous remarquons que la percussion horizontale T′ contre l'axe des tourillons, augmente avec $\mu \cos\theta$ et $P \sin\theta$, c'est-à-dire, avec la composante horizontale de la quantité de mouvement produite par la réaction de la charge μ et la composante de même sens de la percussion P sur le coussinet de pointage.

Nous voyons aussi que T′ diminue lorsque CV et $\omega C(c+d)$ augmentent ; c'est-à-dire lorsque la masse C du mortier devient plus forte, quand la vitesse V du recul est plus rapide et que la composante horizontale de la quantité de mouvement de rotation du mortier $\omega C(c+d)$ est plus considérable.

---

§ 30. RÉSUMÉ.

En comparant les formules obtenues dans les 4 articles dont nous nous sommes occupé, on remarque que les percussions aux points d'appui sur la plate-forme, la vitesse de recul parallèlement au sol, et la vitesse angulaire autour de l'arête d'appui sur la plate-forme, lorsqu'il y a soulèvement, sont exactement les mêmes pour les mortiers à plaque que pour ceux à tourillons sur affût traineau.

Les conditions de soulèvement ou de stabilité sur la plate-forme sont les mêmes pour les deux sortes de mortiers et se réduisent au signe de l'expression.

$$h(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma$$

Lorsque cette formule a une valeur positive le mortier conserve ses appuis sur la plate-forme ; il est soulevé au contraire si cette valeur est négative.

Les formules relatives aux mortiers sur affût traineau comprennent donc implicitement celles concernant les mortiers à plaque, et ne s'en distinguent que par les expressions qui ont rapport aux chocs supportés par les tourillons et le coussinet ou la vis de pointage.

Le tableau suivant résume les formules relatives aux deux

circonstances qui caractérisent les problèmes que nous avons résolus, savoir, la stabilité du mortier qui conserve ses appuis sur le sol ou la vitesse angulaire qu'il acquiert autour de l'arête postérieure d'appui sur la plate-forme, par suite du soulèvement du système à la partie antérieure vers la volée. Ce tableau fait facilement saisir l'ensemble des résultats.

TABLEAU RÉSUMÉ DES FORMULES CONCERNANT

PLAQUE DU MORTIER ET AFFUT COMPRIMÉS SUR LE SOL.

Condition $h(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma = \text{ou} > 0$

$$\frac{V}{\mu} = \frac{(\cos\theta - f\sin\theta)}{M}$$

$$E = \frac{MVh - \mu\gamma}{r'}$$

$$\frac{E}{\mu} = \frac{h(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r'}$$

$$Q = \mu\sin\theta - E$$

Condition pour que les percussions E et Q soient égales

Mortier à plaque	Mortier sur affût traineau.
$\frac{1}{2}r'\sin\theta = h(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma$	$\gamma = c\cos\theta - c'\sin\theta$ $\frac{1}{2}r'\sin\theta = h(\cos\theta - f\sin\theta) - (c\cos\theta - c'\sin\theta)$

$$f(Q + E) = \mu\cos\theta - MV$$

$$P = \frac{CVd}{(e - c)\sin\theta + (e' - c')\cos\theta}$$

$$T = \mu\sin\theta - P\cos\theta$$

$$T' = \mu\cos\theta + P\sin\theta - CV$$

LES PERCUSSIONS ET VITESSES PRODUITES DANS LE TIR DES MORTIERS.

MORTIER ET AFFUT SOULEVÉS PAR LA PARTIE ANTÉRIEURE DU CÔTÉ DE LA VOLÉE.

Condition $\gamma - h(\cos\theta - f\sin\theta) > 0$

$$\frac{V}{\mu} = \frac{X(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma M(h + fh')}{M\{X - Mh(h + fh')\}}$$

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\gamma - h(\cos\theta - f\sin\theta)}{X - Mh(h + fh')}$$

$$\omega = \frac{\mu\gamma - MVh}{X}$$

$$\frac{Q}{\mu} = \sin\theta + \frac{h'M\{\gamma - h(\cos\theta - f\sin\theta)\}}{X - Mh(h + fh')}$$

$$Q = \mu\sin\theta + \omega M h'$$

$$P = \frac{CVd + \omega C\{K^2 + d(c + d) + d'(c' + d')\}}{(e - c)\sin\theta + (e' - c')\cos}$$

$$T = \mu\sin\theta - P\cos\theta + \omega C(c' + d')$$

$$T' = \mu\cos\theta + P\sin\theta - CV - \omega C(c + d)$$

DEUXIÈME PARTIE.

CANONS DE SIÉGE

ET DE

CAMPAGNE.

ARTICLE I.

CANONS DE SIÉGE ET DE CAMPAGNE. — Percussions qui ont lieu lorsque l'affût conserve ses appuis sur le sol, et que le système prend un mouvement de recul parallèlement au terrain.

§ 31. DONNÉES SUR LES CANONS ET LES AFFUTS.

Le canon est relié avec l'affût au moyen des tourillons qui entrent dans des encastrements ménagés dans les flasques de l'affût et de l'appui que la culasse trouve sur la vis de pointage.

Les tourillons sont ainsi nommés parce qu'ils forment un axe autour duquel la pièce peut tourner et prendre diverses inclinaisons sans cesser d'être liée avec l'affût.

L'axe des tourillons est placé à une certaine distance au-dessous de l'axe de l'âme, distance que l'on appelle *abaissement des tourillons*.

Le centre de gravité de la pièce est sensiblement sur l'axe de l'âme ; parce que l'on peut considérer le canon comme un corps de révolution et négliger les petites excentricités occasionnées

par la présence des tourillons, des anses et autres parties extérieures qui ont des masses minimes comparées à celle de la bouche-à-feu.

Lorsque l'âme du canon est horizontale, le centre de gravité de la bouche-à-feu est un peu en arrière de l'axe des tourillons vers la culasse : il en résulte que quand la pièce est suspendue par les tourillons, le poids de la culasse l'emporte sur celui de la volée, et c'est ce que l'on nomme *prépondérance* de la culasse.

La résultante de la force expansive des gazes développés dans le tir réagit sur le fond de l'âme suivant l'axe de la pièce. Cette résultante ne rencontrant pas l'axe des tourillons engendre un couple qui tend à faire tourner le canon autour de cet axe et fait appuyer la culasse contre la vis de pointage. L'action du canon sur l'affût consiste donc dans une percussion sur les tourillons et dans un choc contre la vis de pointage.

Ce choc est d'autant plus faible que l'abaissement des tourillons est moindre, il pourrait devenir négatif, et la pièce saignerait du nez, si l'axe des tourillons était au-dessus de celui de l'âme. Mais cette position vicieuse des tourillons n'est adoptée dans aucune artillerie : nous verrons les autres circonstances qui peuvent déterminer le soulèvement de la culasse.

Il est essentiel que la vis de pointage soit normale à la surface de contact avec la bouche-à-feu pour toutes les inclinaisons de l'âme, afin d'éviter que le choc de la culasse ne fasse glisser la tête de la vis sur le corps de la pièce, ce qui amènerait promptement la destruction de la vis et de son écrou.

On obtient une direction de la vis de pointage constamment normale à la surface de la pièce, en pratiquant sous la culasse un pan coupé, dont la génératrice est la développée d'un arc de cercle, qui a son centre sur l'axe des tourillons et pour rayon la distance de cet axe à la tête de la vis. Nous supposons donc que ce pan coupé existe aux canons. Il faut du reste remarquer, que pour les gros calibres, la surface de contact de la culasse, déterminée ainsi que nous venons de le dire, a une légère courbure et diffère peu de la plate-bande de culasse. D'ailleurs aux canons de campagne, on interpose entre la culasse et la vis de pointage, un coussinet de cuir qui prend l'empreinte de la culasse, en amortit les chocs, et empêche la vis de dévier.

Les affûts de campagne et de siége se composent généralement d'un essieu avec ses deux roues ; d'une flèche, appuyée d'une part sur l'essieu, et reposant d'autre part sur le sol par une partie recourbée et ferrée nommée la crosse ; enfin une troisième partie de l'affût est formée par deux flasques reliés à l'essieu et à la flèche.

Des encastrements sont ménagés dans les flasques pour y loger les tourillons de la bouche-à-feu.

Un écrou propre à recevoir la vis de pointage est fixé sur la flèche, à une position correspondante à celle de la culasse.

Lorsque le canon est monté sur l'affût on remarque généralement que :

1° L'axe des tourillons est en avant de celui de l'essieu.

2° Sous les angles de tir usuels pour les canons, le centre de gravité de la pièce est plus élevé que l'axe des tourillons.

3° La culasse est entre la crosse et l'axe des tourillons.

4° La volée est en avant de la tête de l'affût.

5° Le centre de gravité de l'affût est plus élevé que l'axe de l'essieu.

6° Le centre de gravité de l'affût est entre l'essieu et la vis de pointage.

7° L'axe de la vis de pointage est vertical aux pièces de campagne lorsque l'affût repose sur un plan horizontal.

8° Les pièces, qui doivent tirer sur un chassis ou plate-forme ayant une inclinaison α sur l'horizon, ont la vis de pointage verticale ; celle-ci fait donc un angle α avec la normale à la plate-forme.

---

§ 32. NOTATIONS.

Nous adoptons les notations suivantes :

μ quantité de mouvement de recul transmise à la bouche-à-feu par la réaction de la charge.

T somme des percussions verticales exercées par les tourillons sur leurs encastrements.

T′ somme des percussions horizontales exercées par les tourillons sur leurs encastrements.

P percussion sur la tête de la vis de pointage dirigée suivant l'axe de la vis.

α angle que fait l'axe de la vis de pointage avec la normale au terrain.

Q percussion verticale exercée au point de contact de la crosse avec le sol.

f coëfficient du frottement contre le sol.

f Q frottement de la crosse contre le sol.

E somme des percussions verticales exercées par l'essieu contre les roues.

E' somme des percussions horizontales exercées par l'essieu contre les roues.

R somme des percussions verticales exercées par les roues à leur point de contact avec le sol.

f R frottement des roues contre le sol.

V vitesse horizontale de recul imprimée à tout le système.

φ vitesse angulaire initiale des roues autour de l'essieu.

z vitesse initiale de glissement des roues sur le sol.

A masse de l'affût.

B masse des deux roues réunies

C masse du canon.

M = A + C masse du canon et de l'affût réunis.

B l^2 moment d'inertie des deux roues réunies relativement à l'axe de l'essieu.

c hauteur de l'axe des tourillons au-dessus du sol.

c' distance du plan vertical passant par l'axe des tourillons au point d'appui de la crosse sur le sol.

e hauteur de la tête de la vis de pointage au-dessus du sol.

e' distance de la verticale passant par la tête de la vis de pointage au point d'appui de la crosse sur le sol.

r rayon des roues : hauteur de l'axe de l'essieu au-dessus du sol.

r' distance entre le point d'appui de la crosse et la ligne droite passant par les points d'appui des roues.

La verticale passant par le point de contact de la roue avec le sol rencontre l'axe de l'essieu.

d distance du centre de gravité du canon au plan horizontal passant par l'axe des tourillons.

d distance du centre de gravité du canon au plan vertical passant par l'axe des tourillons.

g hauteur du centre de gravité de l'affût au-dessus du sol.

g' distance de la verticale passant par le centre de gravité de l'affût au point d'appui de la crosse sur le sol.

a abaissement de l'axe des tourillons relativement à l'axe de l'âme.

a' distance du centre de gravité du canon, lorsque l'âme est horizontale au plan vertical passant par l'axe des tourillons.

$\sqrt{a^2 + a'^2} = \sqrt{d^2 + d'^2}$ distance du centre de gravité du canon à l'axe des tourillons.

$c + d$ hauteur du centre de gravité du canon au-dessus du sol.

$c' - d'$ distance de la verticale passant par le centre de gravité du canon au point d'appui de la crosse sur le sol.

$\sqrt{(c+d)^2 + (c'-d')^2}$ distance du centre de gravité du canon au point d'appui de la crosse sur le sol.

h hauteur au-dessus du sol du centre de gravité des masses réunies du canon et de l'affût.

h' distance du point d'appui de la crosse sur le sol à la verticale passant par le centre de gravité des masses réunies du canon et de l'affût.

y hauteur au-dessus du sol du centre de gravité des masses réunies du canon, de l'affût et des roues.

y' distance au point d'appui de la crosse de la verticale passant par le centre de gravité des masses réunies du canon, de l'affût et des roues.

$S = A + B + C$ masses réunies du canon, de l'affût et des roues.

$$h = \frac{C(c+d) + Ag}{A + C} = \frac{C(c+d) + Ag}{M}$$

$$h' = \frac{c(c'-d') + Ag'}{A + C} = \frac{C(c'-d') + Ag'}{M}$$

$$y = \frac{C(c+d) + Ag + Br}{A + B + C} = \frac{C(c+d) + Ag + Br}{S}$$

$$y' = \frac{C(c'-d') + Ag' + Br'}{A + B + C} = \frac{C(c'-d') + Ag' + Br'}{S}$$

θ angle d'élévation de la bouche-à-feu, ou angle que l'axe de l'âme fait au-dessus de l'horizon.

γ' longueur de la perpendiculaire menée du point d'appui de la crosse contre le sol sur l'axe de l'âme prolongé.

$c - e$ distance de la tête de la vis de pointage au plan horizontal passant par l'axe des tourillons.

$c' - e'$ distance de la tête de la vis de pointage au plan vertical passant par l'axe des tourillons.

$d = a \cos \theta - a' \sin \theta$

$d' = a \sin \theta + a' \cos \theta$

$\gamma = a + c \cos \theta - c' \sin \theta$

---

§ 55. PERCUSSIONS QUI ONT LIEU.

La réaction de la charge contre le fond de l'âme, produit un couple qui agit avec un bras de levier égal à l'abaissement des tourillons, pour presser la culasse contre la vis de pointage. Il en résulte que la culasse reste en contact avec la vis de pointage par le choc qui détermine le recul, que la pièce conserve sa position relative avec l'affût, et que le système du canon et de l'affût se comporte comme s'ils ne formaient qu'un seul et même corps solide.

Lors du recul, la crosse reste en contact avec le terrain : le canon et l'affût se meuvent parallèlement au sol.

La crosse comprime le sol et produit un frottement de glissement proportionnel à cette force de compression.

Le choc de l'essieu entraîne les roues sans cependant les détacher de terre : sous cette impulsion elles sont animées d'un double mouvement, l'un de rotation autour de leurs centres, et l'autre de glissement sur le sol : car la force d'inertie des roues s'oppose à ce qu'elles prennent dès le principe, la vitesse de rotation qui répond à celle de translation de tout le système. Il en résulte que la vitesse à la circonférence des roues est moins grande dans les premiers instants de recul que celle de translation de l'essieu.

D'ailleurs la vitesse à la circonférence des roues augmentée de celle de glissement sur le sol est égale à la vitesse de recul.

Le choc de la culasse contre la tête de la vis de pointage

a lieu suivant l'axe de cette vis. En effet, si cela n'était pas, on pourrait remplacer ce choc par deux composantes, l'une rencontrant l'axe des tourillons et l'autre dirigée suivant l'axe de la vis de pointage. La première de ces composantes serait détruite par la résistance que les tourillons éprouvent dans leurs encastrements et il ne resterait que la seconde dirigée, comme nous venons de le dire, suivant l'axe de la vis de pointage.

---

§ 34. MISE EN ÉQUATION DES PERCUSSIONS ÉPROUVÉES PAR LE SYSTÈME DU CANON ET DE L'AFFUT RÉUNIS.

La culasse ne se sépare pas de la vis de pointage ; on peut donc considérer la pièce et l'affût comme ne faisant qu'un seul corps solide. En introduisant dans les calculs des forces égales aux résistances du sol sous la crosse et aux réactions des roues sous l'essieu, nous pouvons faire abstraction de ces résistances et de ces réactions et supposer le canon et l'affût réunis, comme un corps libre soumis à ces forces et à l'impulsion μ, et établir les conditions de l'équilibre qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement réellement imprimées à ce système.

Les composantes verticales des forces sont :

$\mu \sin\theta$ composante verticale de la force μ.

$-Q$ résistance normale du sol sous la crosse.

$-E$ réaction verticale des roues sur l'essieu.

Les composantes horizontales des forces sont :

$\mu \cos$ composante horizontale de la force μ.

$-fQ$ résistance provenant du frottement de la crosse sur le sol.

$-E'$ composante horizontale de la réaction des roues sur l'essieu.

Les quantités de mouvement imprimées au système se réduisent à celle provenant de la vitesse de recul V, ce qui produit la force

$$MV = (A + C)V$$

appliquée au centre de gravité du canon et de l'affût réunis.

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu \sin \theta - Q - E = 0 \qquad (1)$$

$$\mu \cos \theta - f Q - E' = M V \qquad (2)$$

Comme 3^{me} équation d'équilibre nous prendrons les moments des forces relativement au point d'appui de la crosse sur le sol, ce qui fait disparaitre les forces Q et fQ dont les moments sont nuls. Il en résulte la relation :

$$\mu \gamma + E r' - E' r = M V h \qquad (3)$$

Si nous substituons à M et h leurs valeurs § 32, il vient :

$$\mu \gamma + E r' - E' r = V \left\{ C (c + d) + A g \right\} \qquad (4)$$

---

§ 33. MISE EN ÉQUATION DES PERCUSSIONS EXERCÉES SUR LES ROUES.

L'essieu imprime aux roues le choc vertical E et celui horizontal E'.

La résistance du sol aux points d'appui des roues, engendre la résistance verticale — R et le frottement horizontal — fR lequel agit tangentiellement aux cercles des roues.

Le choc horizontal de l'essieu, combiné avec la résistance due au frottement et avec la force d'inertie des roues, fait rouler celles-ci sur le terrain et les fait glisser tout en même temps, et, dans les premiers instants du recul, la vitesse de translation des roues est plus grande que celle de rotation à leur circonférence.

La quantité de mouvement imprimée aux roues consiste donc dans la quantité de mouvement B z due à la vitesse de glissement z, et en une quantité de mouvement de rotation que nous allons déterminer et qui est due à la vitesse angulaire φ.

La vitesse angulaire des roues, résulte du contact successif de toutes les parties de leurs circonférences avec le sol. Il s'en suit que les roues ont un mouvement de rotation instantanée autour de chacun de ces points de contact. Nous allons faire

voir que la vitesse angulaire autour de chacun de ces points est la même que celle de la roue autour de l'essieu.

Dans les deux cas la vitesse de translation de l'essieu doit être la même ; soient donc :

∂ la vitesse de translation de l'essieu.

φ la vitesse angulaire au centre des roues.

φ' la vitesse angulaire instantanée autour du point de contact avec le sol.

r le rayon de la roue.

Dans l'hypothèse que la roue tourne autour de son axe ; la vitesse de translation de l'essieu est égale à celle de rotation à la circonférence et l'on a l'égalité :

$$\varphi\, r = \partial.$$

Dans la supposition que la roue tourne autour de son point de contact avec le sol, ce point est le centre d'un arc de cercle infiniment petit décrit par l'axe de l'essieu avec la vitesse $\varphi' r$, laquelle est aussi égale à ∂. Il en résulte l'égalité :

$$\varphi' r = \partial$$

d'où

$$\varphi = \varphi'$$

Ainsi la vitesse de rotation de la roue autour de l'essieu est la même que celle qui a lieu réellement autour des points de contact successifs de la roue avec le sol.

Remplaçons le choc de l'essieu par ses composantes : $+ \mathrm{E}$ et $+ \mathrm{E}'$, et la résistance du sol par les composantes $- \mathrm{R}$ et $- f\,\mathrm{R}$; nous pouvons faire abstraction de l'essieu et du sol, et considérer les deux roues comme formant un corps solide entièrement libre soumis aux forces qui représentent ces composantes, et établir les conditions de l'équilibre, qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement réellement imprimées. Celles-ci sont :

$\mathrm{B}\,z$ quantité de mouvement horizontale due à la vitesse de glissement z des roues, force appliquée à leur centre de gravité et à leur centre de figure.

$\varphi\,\mathrm{B}\,r$ quantité de mouvement de rotation des roues autour de la ligne de contact avec le sol. Cette quantité de mouvement est horizontale, parce que le centre de gravité de la roue, est sur l'ordonnée verticale du point de contact avec le sol, point

qui sert d'axe instantané de rotation. (L'abscisse x, étant nulle, la composante verticale Y l'est aussi, équation XI 7 et il reste pour toute force la composante horizontale $X = \varphi B r$).

Les deux premières équations de l'équilibre entre les forces et les quantités de mouvement sont :

$$E - R = 0 \qquad (5)$$

$$E' - fR = B z + \varphi B r \qquad (6)$$

Pour troisième équation nous formerons celle des moments relativement à la ligne de contact des roues avec le sol, ce qui fait disparaître les forces E, R et fR dont les moments sont nuls.

Le moment de la force E' est $E' r$.

Le moment de la quantité de mouvement de glissement des roues est $B r z$.

Le moment de la quantité de mouvement de rotation autour de la ligne de contact avec le sol est $\varphi B (l^2 + r^2)$, (§ 7 équation VIII).

On a pour l'équation des moments :

$$E' r = \varphi B (l^2 + r^2) + B r z \qquad (7)$$

D'ailleurs la vitesse de translation de l'essieu est égale à la vitesse de glissement augmentée de celle de rotation à la circonférence, d'où :

$$V = \varphi r + z \qquad (8)$$

---

§ 56. MISE EN ÉQUATION DES PERCUSSIONS EXERCÉES PAR LE CANON SUR LES ENCASTREMENTS DES TOURILLONS ET SUR LA VIS DE POINTAGE.

Représentons par des forces les résistances que la vis de pointage et les encastrements des tourillons opposent au mouvement du canon, nous pouvons faire abstraction de ces résistances, et introduire ces forces dans les calculs et considérer la bouche-à-feu comme un corps libre soumis à leur action et à l'impulsion μ, et établir les conditions de l'équilibre qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement réellement imprimées.

Les composantes des forces sont :

composantes verticales

$\mu \sin \theta$

$-T$

$-P \cos \alpha$

composantes horizontales.

$\mu \cos \theta$

$-T'$

$P \sin \alpha$

La vitesse horizontale V imprimée au canon produit la force CV appliquée en son centre de gravité.

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu \sin \theta - T - P \cos \alpha = 0 \qquad (9)$$

$$\mu \cos \theta - T' + P \sin \alpha = C V \qquad (10)$$

Pour troisième équation formons celle des moments que nous prendrons relativement à l'axe des tourillons, ce qui fera disparaître les forces T et T' dont les moments sont nuls.

Ces moments sont :

μa : moment de la force μ agissant sur un bras de levier égal à a.

$-P \cos \alpha (c' - e')$ moment de la composante verticale $-P \cos \alpha$ agissant sur le bras de levier $c' - e'$.

$-P \sin \alpha (c - e)$ moment de la composante horizontale $P \sin \alpha$, agissant sur le bras de levier $c - e$, en sens contraire du moment μa.

$CV d$ moment de la force CV.

L'équation des moments est

$$\mu a - P \cos \alpha (c' - e') - P \sin \alpha (c - e) = CV d \qquad (11).$$

§ 37. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRÉCÉDENTES.

En résolvant les équations précédentes nous poserons pour abréger.

$$S = A + B + C$$

$$y = \frac{C(c + d) + Ag + Br}{S}$$

Il vient :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{\cos\theta - f\sin\theta}{S} \tag{12}$$

$$R = E = \frac{y\,VS - \mu\gamma}{r' - f\,r} \tag{13}$$

$$E' = BV + f\,E \tag{14}$$

$$Q = \mu\sin\theta - E \tag{15}$$

$$\varphi = \frac{f\,r\,E}{B\,l^2} \tag{16}$$

$$z = V - \varphi\,r \tag{17}$$

$$P = \frac{\mu\,a - CV\,d}{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha} \tag{18}$$

$$T = \mu\sin\theta - P\cos\alpha \tag{19}$$

$$T' = \mu\cos\theta + P\sin\alpha - CV \tag{20}$$

Ces équations sont en nombre égal à celui des inconnues et en donnent les valeurs. L'équation (12) donnera la valeur de V en fonction des données du canon et de l'angle θ du tir et de l'impulsion μ due à l'explosion de la charge. Les autres quantités seront successivement connues en suivant le même ordre que ci-dessus.

§ 38. RÉPERTOIRE DE FORMULES.

Indépendamment des formules que nous venons de donner au § précédent, nous en exposerons d'autres qui peuvent servir soit à trouver directement la valeur de certaines inconnues, soit à faciliter l'analyse du problème, et à reconnaître l'influence que les diverses parties du canon et de l'affût peuvent avoir sur l'intensité des chocs.

Les formules que nous allons écrire formeront donc un répertoire que l'on pourra consulter, en cas de besoin, sans être obligé de recommencer les procédés, parfois si lents, de l'élimination.

$$\frac{E}{\mu} = \frac{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r' - fr} \tag{21}$$

$$\frac{E'}{\mu} = \frac{B(\cos\theta - f\sin\theta)}{S} + f\,\frac{\{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma\}}{r' - fr} \tag{22}$$

$$\frac{Q}{\mu} = \sin\theta - \frac{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r' - fr} \tag{23}$$

$$\frac{\varphi}{\mu} = \frac{fr\{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma\}}{B l^2 (r' - fr)} \tag{24}$$

$$\frac{z}{\mu} = \frac{(\cos\theta - f\sin\theta)}{S} - \frac{fr^2\{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma\}}{B l^2 (r' - fr)} \tag{25}$$

$$\frac{P}{\mu} = \frac{aS - Cd(\cos\theta - f\sin\theta)}{S\{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha\}} \tag{26}$$

$$\frac{T}{\mu} = \sin\theta - \frac{\{aS - Cd(\cos\theta - f\sin\theta)\}\cos\alpha}{S\{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha\}} \tag{27}$$

$$\frac{T'}{\mu} = \cos\theta - \frac{C(\cos\theta - f\sin\theta)}{S} + \frac{\{aS - Cd(\cos\theta - f\sin\theta)\}\sin\alpha}{S\{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha\}} \tag{28}$$

$$Q = \mu\sin\theta - \frac{(y V S - \mu\gamma)}{r' - fr} \tag{29}$$

$$\varphi = \frac{fr\{y V S - \mu\gamma\}}{B l^2 (r' - fr)} \tag{30}$$

$$z = V - \frac{fr(y V S - \mu\gamma)}{B l^2 (r' - fr)} \tag{31}$$

§. 39 OBSERVATIONS SUR LA VITESSE V DU RECUL.

L'équation (12)

$$\frac{V}{\mu} = \frac{\cos\theta - f\sin\theta}{S}$$

est de même forme que les équations 7 du § 24 et (6) du § 16, relatives la première aux mortiers sur affût traineau et la seconde aux mortiers à plaque.

Il en résulte que quels que soient le système de la bouche-à-feu et la forme de l'affût, qu'il s'agisse de mortiers à plaque ou à tourillons, ou de canons, que les affûts soient avec ou sans roues, la vitesse V du recul, pour le cas où l'affût conserve ses appuis sur le sol, est toujours égale au quotient de l'expression $\cos\theta - f\sin\theta$ divisée par la masse entière du système à mouvoir.

Nous ne pouvons que rappeler les conséquences relatives à V que nous avons fait ressortir aux § (17) et (25).

La vitesse V est en raison inverse de la masse totale S du système: sa valeur est entièrement indépendante de la position des axes des tourillons et de la vis de pointage, et des données concernant les roues.

La vitesse V augmente à mesure que θ et f deviennent plus petits.

---

§ 40. Observations sur les percussions E et R exercées sur l'essieu et aux points d'appui des roues.

Examinons les équations (15) et (21) des §§ 37 et 38.

$$\frac{E}{\mu} = \frac{R}{\mu} = \frac{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r' - fr}$$

La première égalité montre que la percussion verticale E sur l'essieu se transmet intégralement aux points d'appui des roues sur le sol, en sorte que $E = R$.

Ces formules sont obtenues dans l'hypothèse que l'affût conserve ses appuis; la valeur de E doit donc être positive, et il faut pour cela que les deux termes de la fraction qui en exprime la valeur soient de mêmes signes.

Dans la pratique, le dénominateur $r' - fr$ est toujours positif, parce que la distance r', entre la crosse et la ligne de terre des roues, est toujours plus grande que le rayon des roues, et *à fortiori* que fr. Le numérateur devant aussi être positif, on doit avoir

$$y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma = \quad \text{ou} \quad > 0$$

Cette inégalité exprime donc la condition à laquelle le système doit satisfaire pour que l'affût ne soit pas soulevé.

Dans le tir horizontal, pour lequel $\theta = 0$, l'affût est toujours soulevé. En effet, pour cette valeur, γ est la distance de l'axe de l'âme au-dessus du sol, distance qui est plus grande que la hauteur y du centre de gravité du système entier au-dessus du terrain. L'affût ne peut donc conserver ses appuis dans le tir, que pour autant que l'angle θ d'élévation de l'âme a une certaine valeur positive, dont la limite minimum se déduit de la relation

$$y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma = 0$$

dans laquelle il faut substituer à γ sa valeur équation XVIII § 10. Cette équation, résolue ensuite par rapport à θ, donnera l'angle minimum du tir, pour lequel la percussion E est nulle sans que pour cela l'affût puisse être soulevé.

On trouverait l'angle θ qui répond à la valeur maximum de E, en traitant l'équation (21) par la méthode des coefficients différentiels, après y avoir substitué à γ sa valeur en fonction de θ (équation XVIII § 10). Nous ne ferons qu'indiquer cette solution.

L'affût a le plus à souffrir lorsqu'il est soulevé, parce que le système en retombant sur le sol acquiert une force vive qui doit être détruite par la résistance des appuis ; il en résulte que le tir horizontal et celui au-dessous de l'horizon fatiguent beaucoup l'affût, principalement l'essieu et les roues.

L'équation (21) fait voir que plus le centre de gravité du système entier est élevé, ou plus l'ordonnée verticale y est grande, plus faible est la percussion E sur l'essieu. Elle montre aussi que E diminue quand f augmente.

Si le frottement, ou la résistance au glissement sur le sol était assez considérable pour arrêter le recul, on aurait :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{\cos\theta - f\sin\theta}{S} = 0$$

En introduisant dans l'équation (21) la relation

$$\cos\theta - f\sin\theta = 0$$

il en résulterait pour E une valeur négative et l'affût serait soulevé. Ainsi lorsque, par suite de la résistance du sol, la vitesse de recul est annulée, l'affût est nécessairement soulevé, ce qui est une circonstance fâcheuse.

Cette conclusion se présente dans la supposition que γ conserve son signe dans l'équation (21), c'est-à-dire que l'axe de l'âme prolongé passe au-dessus du point d'appui de la crosse sur le sol. S'il

en était autrement, c'est-à-dire si l'axe de l'âme prolongé rencontrait le sol entre la crosse et la ligne de terre des roues, γ changerait de signe et la percussion E deviendrait

$$\frac{E}{\mu} = \frac{y(\cos\theta - f\sin\theta) + \gamma}{r' - fr}$$

Cette expression restant positive dans l'hypothèse $V = 0$, ou $\cos\theta - f\sin\theta = 0$, il s'ensuit que l'affût conserverait ses appuis, même si le recul était subitement arrêté.

Le dénominateur $r' - fr$ de l'équation (21) augmente avec r' et diminue avec r : on en conclut que la percussion verticale E sur l'essieu diminue

1° Lorsque la distance r' entre la crosse et la ligne de terre des roues augmente ;

2° Lorsque le rayon r des roues diminue.

Les affûts marins ont des roues fort basses, qui sont remplacées pour ceux de côte de Gribauval par des rouleaux dont les rayons sont encore plus petits : il en résulte que ce matériel est dans des circonstances favorables, pour atténuer l'effort vertical contre celui des deux essieux qui est placé vers la tête de l'affût.

Si nous comparons l'équation (8) du § 24 relative aux mortiers sur affûts traineaux, à l'équation (21) du § 58 concernant les canons, nous voyons que dans la première le dénominateur est r', tandis qu'il est $r' - fr$ dans la seconde : il en résulte que, toutes choses égales d'ailleurs, la percussion verticale sur l'appui antérieur de l'affût, vers la volée de la bouche-à-feu, est plus faible avec les affûts traineaux qu'avec ceux à roues. Ces deux équations ne diffèrent que par leurs dénominateurs et ont pour le reste absolument la même forme.

L'ordonnée verticale y, du centre de gravité du système entier, varie très-peu lorsque l'angle θ du tir augmente, tandis que la perpendiculaire γ, menée de la crosse sur l'axe de l'âme ou son prolongement, diminue beaucoup. En appliquant ces considérations à l'équation (21), on remarque que la percussion verticale E contre l'essieu augmente, à mesure que l'angle θ devient plus considérable.

Si l'axe de l'âme prolongé venait à passer par le point d'appui de la crosse γ serait nul. L'angle θ augmentant toujours, le prolongement de l'axe de l'âme passerait au-dessous de la crosse, γ serait négatif et la percussion E continuerait à croître.

On conclut de ceci, que l'effort vertical sur l'essieu est d'autant plus violent que l'angle du tir est plus élevé.

Lorsque la plate-forme se relève en arrière, ou quand l'affût repose sur un terrain en pente vers la volée, l'angle θ, formé par l'axe de l'âme avec la plate-forme ou le terrain, est égal à l'angle d'élévation de l'âme au-dessus de l'horizon augmenté de l'angle d'inclinaison de la plate-forme ou du sol.

Il en résulte que, toutes choses égales d'ailleurs, la percussion verticale sur l'essieu est plus violente lorsque le tir a lieu sur une plate-forme ou un sol qui se relèvent en arrière, que lorsqu'il a lieu sur un terrain horizontal.

---

§ 41. OBSERVATIONS SUR LA SOMME DES PERCUSSIONS VERTICALES $E + Q$, EXERCÉES SUR LES APPUIS DE L'AFFUT.

L'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$E + Q = \mu \sin \theta$$

Elle fait voir que la somme des percussions verticales, supportées par l'essieu et par la crosse, est égale à la composante normale au sol $\mu \sin \theta$ de la quantité de mouvement communiquée à la bouche-à-feu par la réaction de la charge.

Cette somme $E + Q$ augmente à mesure que l'on pointe sous un angle θ plus considérable : elle est un maximum lorsque $\theta = 90^\circ$; dans ce cas $E + Q = \mu$.

Cette formule signifie que dans le tir vertical la totalité de la quantité de mouvement imprimée à la pièce est détruite par la résistance de l'essieu et de la crosse. Dans cette circonstance il y a lieu de craindre la destruction de l'affût.

Nous avons vu que, lorsque la pièce est en batterie sur un plan incliné, l'angle θ est égal à l'inclinaison de ce plan ajoutée à l'angle d'élévation de l'âme au-dessus de l'horizon : il en résulte que l'essieu et la crosse fatiguent davantage dans le tir sur une plate-forme ou un châssis inclinés et relevés en arrière.

Cependant l'inclinaison des plates-formes et châssis, excède rarement 2° à 3° : elle n'exerce donc qu'une faible influence sur la composante $\mu \sin \theta$: mais il n'en serait plus de même si par suite du système adopté, ou des circonstances, cette inclinaison s'élevait jusqu'à 8° et 10° et au-delà.

L'expression $\mu \sin \theta$, valeur de la somme $E + Q$, ne contient

que les quantités μ et θ: elle est indépendante du tracé de l'affût, pourvu toutefois que l'inégalité

$$y\,(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma > 0$$

soit satisfaite. Il en résulte que la somme $E + Q$ est la même quelle que soit la construction de l'affût.

La seule chose dont le constructeur dispose est la répartition de la composante $\mu \sin\theta$ entre les percussions E et Q; mais il ne peut diminuer l'une d'elles sans augmenter l'autre de la même quantité.

---

§ 42. Observations sur la percussion horizontale E′ exercée sur l'essieu.

L'équation (14)

$$E' = BV + fE$$

fait voir que la percussion horizontale E′, contre l'essieu, est égale à la quantité de mouvement de translation horizontale BV, des roues, augmentée du frottement $fE = fR$, des bandes des roues contre le sol.

La masse B des roues ayant une grande influence sur la valeur de E′, on en conclut que des roues pesantes fatiguent beaucoup l'essieu dans le sens horizontal.

Le choc E′ augmente en même temps que V : ainsi lorsque la vitesse du recul est grande, la percussion horizontale contre l'essieu est plus forte.

L'équation (22)

$$\frac{E'}{\mu} = \frac{B(\cos\theta - f\sin\theta)}{S} + \frac{f\left\{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma\right\}}{r' - fr}$$

montre que E′ augmente à mesure que θ diminue.

Dans le tir ordinaire des canons, l'angle θ ne s'élève qu'à quelques degrés, $\cos\theta$ est bien près de l'unité et $\sin\theta$ est sensiblement nul ; de plus la perpendiculaire γ élevée du point d'appui de la crosse sur l'axe de l'âme prolongé ne diffère pas beaucoup de l'ordonnée verticale y du centre de gravité du système entier. Dans ces conditions la valeur de E, équation 21, est sensiblement nulle, tandis que la valeur E′, équation 22, lui est de beaucoup supérieure. On en conclut, que dans le tir ordinaire des canons, la percussion verticale sur l'essieu est très-faible, tandis que la per-

cussion horizontale est très-violente et qu'elle est sensiblement égale à $\frac{B\mu}{S}$.

Il importe donc que la section droite du corps d'essieu présente une largeur suffisante pour résister au choc horizontal E'.

Dans l'équation (22)

$$\frac{E'}{\mu} = \frac{B(\cos\theta - f\sin\theta)}{S} + \frac{f\left\{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma\right\}}{r' - fr}$$

plusieurs termes sont affectés du coëfficient f à la première puissance, un seul terme négatif du numérateur contient f à la seconde puissance : il en résulte que, E' décroît quand f augmente, ou que la percussion horizontale sur l'essieu est d'autant plus faible que la résistance du frottement sur le sol est plus considérable.

---

§ 43. OBSERVATIONS SUR LA VITESSE ANGULAIRE φ DES ROUES.

Considérons l'équation (16)

$$\varphi = \frac{fr\,E}{B\,l^2}$$

Nous voyons que φ est proportionnel à f, r et E, et en raison inverse du moment d'inertie Bl^2 de la roue relativement à son axe. En d'autres termes, la vitesse angulaire initiale des roues est en raison directe du coëfficient f du frottement, du rayon r des roues, et de la percussion verticale E sur l'essieu : elle est inversement proportionnelle au moment d'inertie Bl^2.

Si l'une de ces trois quantités, le coëfficient f du frottement, le rayon r des roues ou la percussion verticale E, était nulle, la vitesse φ le serait aussi.

Lorsqu'on tire sur la glace ou sur des surfaces bien polies et bien graissées, le frottement est sensiblement nul, la vitesse angulaire φ l'est également, et les roues sont entraînées dans le recul avec l'affût tout en restant sensiblement parallèles à elles-mêmes.

Plus la masse B des roues augmente, plus φ diminue. Les roues très-massives ne prennent pas aussi vite que celles légères, une vitesse de rotation à la circonférence égale à celle de translation de l'essieu.

A masse égale le moment d'inertie des roues Bl^2 est d'autant plus considérable, que la masse des roues est plus reportée vers la cir-

conférence, que les bandes en fer sont plus épaisses et le moyeu moins gros et moins pesant : d'ailleurs plus le moment d'inertie Bl^2 est grand plus faible est la vitesse angulaire initiale φ des roues.

Aux affûts de place-cote, la partie antérieure de l'affût vers la volée, repose sur les moyeux prolongés des roues. Le rayon r des roues est très-petit pour cette espèce d'affût parce qu'il est celui du moyeu, tandis que le moment d'inertie Bl^2 s'applique aux roues entières, et est relativement très-grand : il s'ensuit que lorsque le mouvement du recul commence, les roues restent sensiblement parallèles à elles-mêmes. Ce mode de faire rouler l'affût sur le chassis occasionne donc un frottement de glissement qui fait érailler la semelle en bois du chassis, et il serait utile de préserver cette semelle par des bandes en fer.

---

§ 44. OBSERVATIONS SUR LA VITESSE DE GLISSEMENT z DES ROUES.

L'équation (17)

$$z = \mathrm{V} - \varphi r$$

montre que z décroît lorsque φ et r augmentent.

Les roues d'un grand rayon prennent plus vite la vitesse de rotation correspondante à celle de translation de l'essieu, ce qui diminue la vitesse de glissement produite dans les premiers instants du recul. D'ailleurs z augmente avec V : dans un système léger, où le canon, l'affût et les roues ont ensemble peu de masse, la vitesse V est plus grande, ainsi que z.

---

§ 45. OBSERVATIONS SUR LA PERCUSSION P EXERCÉE SUR LA VIS DE POINTAGE.

La percussion suivant l'axe de la vis de pointage est exprimée par l'équation (18)

$$\mathrm{P} = \frac{\mu a - \mathrm{C\,V}\, d}{(c - e)\sin\alpha + (c' - e')\cos\alpha}$$

La percussion P augmente avec la réaction μ de la charge et l'abaissement a de l'axe des tourillons au-dessous de celui de l'âme.

Cette percussion diminue lorsque le produit C V d augmente ; c'est-à-dire quand la masse C du canon est plus considérable, lorsque la vitesse V du recul est plus rapide, si la différence de niveau d entre le centre de gravité du canon et l'axe des tourillons est plus grande.

On atténue la percussion sur la vis de pointage au moyen d'un système léger d'affût, qui favorise la vitesse du recul, et en augmentant autant que possible la masse de la bouche-à-feu.

Ainsi que nous l'avons annoncé, ce résultat est opposé à ce qui a lieu pour les mortiers, dont les chocs sont d'autant plus violents contre le coussinet de pointage que la bouche-à-feu a plus de masse. Ceci provient de ce que le mortier a son appui sur le coussinet de pointage en avant des tourillons, vers la volée, tandis que le canon porte par la culasse sur la vis de pointage en arrière des tourillons. En d'autres termes le centre de gravité du mortier est en avant des tourillons vers la volée, tandis qu'aux canons, le centre de gravité est en arrière des tourillons vers la culasse.

La percussion P augmente lorsque d diminue.

Examinons les différentes phases qui se présentent suivant les variations de d.

L'affût est toujours soulevé dans le tir horizontal : il ne commence à conserver ses appuis sur le sol qu'à l'angle de tir pour lequel E est nul, c'est-à-dire pour lequel on a (équation 21)

$$y\,(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma = 0$$

En augmentant θ, à partir de l'angle qui répond à cette équation de condition, la hauteur d du centre de gravité du canon au-dessus du plan horizontal passant par l'axe des tourillons diminue constamment, et devient nulle lorsque le centre de gravité de la pièce se trouve sur ce plan.

La percussion P correspondant à la valeur $d = 0$ est exprimée par :

$$\frac{\mu\ a}{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha}$$

La valeur de θ qui répond à $d = o$, se trouve au moyen de l'équation XVI § 9.

$$d = a \cos \theta - a' \sin \theta$$

et posant $$a \cos \theta - a' \sin \theta = o$$

d'où $$tg\, \theta = \frac{a}{a'}$$

Lorsque l'angle du tir aura l'élévation, qui résulte de cette expression, le centre de gravité du canon sera sur le plan horizontal passant par l'axe des tourillons : et la percussion P correspondant à ce cas particulier aura la valeur donnée ci-dessus.

$$P = \frac{\mu\ a}{(c-e) \sin \alpha + (c'-e') \cos \alpha}$$

Si l'on continue à augmenter θ le centre de gravité du canon vient au-dessous du plan horizontal passant par l'axe des tourillons, la distance d change de signe et devient négative et la valeur de P donnée par l'équation (18) continue à croître.

On obtient la valeur de d qui répond au maximum de P en appliquant à l'équation XVI la méthode des coëfficients différentiels. Il vient :

$$\frac{d.d}{d.\theta} = - a \sin \theta - a' \cos \theta = o$$

d'où $$tg\, \theta = \frac{- a'}{a}$$

$$\sin \theta = \frac{- a'}{\sqrt{a^2 + a'^2}} \qquad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a'^2}}$$

$$d = - \sqrt{a^2 + a'^2}$$

Lorsque d a cette valeur, le centre de gravité du canon est dans le plan vertical passant par l'axe des tourillons et au-dessous de cet axe.

Appelons θ' l'angle θ qui répond à cette position du centre de gravité, et θ'' l'angle θ correspondant à $d = o$, nous aurons les relations

$$tg\, \theta' = \frac{- a'}{a} \qquad tg\, \theta'' = \frac{a}{a'}$$

$$l + tg\,\theta'\,tg\,\theta'' = o$$

Ainsi $$\theta' = \theta'' + 90^\circ$$

Si l'on a égard à la condition, que θ doit avoir une certaine valeur positive, pour que l'affût conserve ses appuis, nous trouvons que, dans le problème qui nous occupe, les plus faibles réactions sur la vis de pointage se produisent sous les petits angles de tir ; que ces réactions augmentent à mesure que l'élévation de l'âme au-dessus de l'horizon devient plus considérable ; et enfin ces réactions deviennent un maximum, lorsque le centre de gravité du canon se trouve placé verticalement sous l'axe des tourillons.

La percussion maximum de P se trouve alors exprimée par

$$P = \frac{\mu a + CV\sqrt{a^2 + a'^2}}{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha}$$

Les résultats du calcul appliqués au matériel de l'artillerie conduisent aux remarques suivantes :

1° L'abaissement de l'axe des tourillons est une cause influente de la violence des percussions sur la vis de pointage. Les canons et les canons-obusiers, qui tirent généralement sous des angles élevés, devraient avoir un petit abaissement de l'axe des tourillons, parce qu'ils fatiguent énormément leurs vis de pointage.

Toutefois, la nécessité, où l'on est de tirer sous de grandes élévations de l'âme, avec ces sortes de bouches-à-feu, exige que l'abaissement des tourillons soit assez grand, afin de faciliter la construction de l'affût.

2° Les canons ayant un tir rasant, fatiguent moins leurs vis de pointage que les obusiers et canons-obusiers.

3° La réaction sur la vis de pointage est plus forte pour les canons de campagne que pour ceux de siége.

La valeur de P diminue lorsque le dénominateur de l'équation (18) augmente et réciproquement.

Cherchons l'angle α, qui répond à la valeur maximum de ce dénominateur, il en résultera un minimum pour P.

On trouve par la méthode des coëfficients différentiels.

$$\frac{d\,[(c-e)\sin\alpha+(c'-e')\cos\alpha]}{d\,\alpha}=+(c-e)\cos\alpha-(c'-e')\sin\alpha=o$$

d'où $$tg\,\alpha=\frac{c-e}{c'-e'}$$

Nommons δ l'angle que fait avec l'horizon la droite menée de la tête de la vis de pointage à l'axe des tourillons ; la valeur de δ est donnée par l'équation.

$$tg\,\delta=\frac{c-e}{c'-e'}$$

d'où $$tg\,\delta=tg\,\alpha$$

Ainsi l'angle α, qui répond au minimum de P, fait avec la verticale le même angle, que la droite menée de l'axe des tourillons à la tête de la vis de pointage fait avec l'horizon : d'où il résulte que la direction de la vis de pointage pour laquelle la réaction P est un minimum, est perpendiculaire à la droite menée de la tête de la vis de pointage à l'axe des tourillons.

Dans la construction ordinaire des affûts, l'angle α est nul pour les pièces de campagne, et il est égal à l'inclinaison des plates-formes et chassis sur l'horizon pour les pièces de siége, de place et de côte ; inclinaison qui varie de 2° à 3°, parce que la vis de pointage est verticale, quand l'affût est sur le chassis ou la plate-forme. Il en résulte que, pour les canons, sin α est sensiblement nul, et cos α diffère très-peu de l'unité. En posant donc

$$\cos\alpha=1 \qquad \sin\alpha=o$$

dans l'équation (18) elle devient

$$P=\frac{\mu\ a\ -\ C\ V\ d}{c'-e'}\ ;$$

elle fait voir que la percussion P sur la vis de pointage diminue, à mesure que la distance $c'-e'$, entre la tête de la vis et le plan vertical passant par l'axe des tourillons, augmente.

C'est avec raison qu'aux canons, on place la vis de pointage le plus en arrière possible des tourillons sous la plate-bande de culasse.

Cette distance $c'-e'$ pourra encore devenir plus grande, si

dans le tracé des canons, on a soin de rapprocher l'axe des tourillons de la volée. Mais on en est souvent empêché, parce que les arcs de cercle que décrit la culasse, dans le pointage, concentriquement à l'axe des tourillons, en devenant plus grands, ne seraient possibles qu'avec des affûts plus larges et plus élevés que les besoins du service ne le comportent: les vis de pointage seraient plus longues au détriment de leur solidité et de la rapidité du pointage.

Supposons que l'affût soit appuyé à un obstacle inébranlable, ce qui revient à supposer $V = o$ et admettons en outre, pour plus de simplicité, $\alpha = o$. La réaction sur la tête de la vis de pointage sera la plus forte possible et l'équation (18) deviendra.

$$P = \frac{\mu a}{c' - e'}$$

Cette équation montre l'influence pernicieuse de l'abaissement de l'axe des tourillons, et combien il est avantageux d'augmenter l'intervalle entre les tourillons et la vis de pointage. Elle montre aussi, à quelles réactions désastreuses on s'expose en arrêtant subitement le recul de la bouche-à-feu.

Afin de reconnaître l'influence de la masse totale S du système sur la valeur de P mettons l'équation (26) sous la forme

$$\frac{P}{\mu} = \frac{1}{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha} \cdot \left\{ a - \frac{C\,d}{S}(\cos\theta - f\sin\theta) \right\}$$

Cette équation montre que P diminue, lorsque C augmente et que S devient plus petit.

Représentons les rapports, du poids de la pièce à celui du système de la pièce et de l'affût, respectivement par n et n', pour l'artillerie de campagne et pour celle de siége, en sorte que l'on ait:

$$n = \frac{C}{S} \text{ pour l'artillerie de campagne}$$

$$n' = \frac{C}{S} \qquad \text{id} \qquad \text{siége.}$$

Si les deux systèmes d'artillerie sont dans des rapports égaux, on aura :

$$n = n'$$

et l'expression de la valeur de P ne différera pour les deux systèmes d'artillerie que par le dénominateur.

$$(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha$$

Or les facteurs $(c-e)$ et $(c'-e')$ sont généralement plus grands pour les canons de siége que pour ceux de campagne, d'où il résulte que le dénominateur lui-même est plus grand pour les premiers canons que pour les seconds. Nous avons donc la confirmation de ce que nous venons d'avancer, à savoir qu'à calibre égal, et à mêmes charges, les canons de siége fatiguent moins les vis de pointage que ceux de campagne.

---

§ 46. OBSERVATIONS SUR LA PERCUSSION VERTICALE T EXERCÉE SUR LES ENCASTREMENTS DES TOURILLONS.

Examinons l'équation (19) relative à la percussion verticale T exercée sur les encastrements des tourillons, et substituons à P sa valeur, équation (18), il vient :

$$T = \mu\sin\theta - P\cos\alpha = \mu\sin\theta - \frac{(\mu a - C V d)\cos\alpha}{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha}$$

L'angle α ayant au plus 2° ou 3° on peut le négliger sans erreur sensible. Cette hypothèse de $\alpha = o$ rend ces équations plus faciles à analyser ; elles deviennent :

$$T = \mu\sin\theta - P \qquad (19^{bis})$$

$$T = \mu\sin\theta - \frac{\mu a - C V d}{c'-e'} \qquad (19^{ter})$$

L'équation (19^{bis}) montre que la percussion T est égale à la composante verticale $\mu\sin\theta$ de la réaction de la charge diminuée de la percussion P sur la vis de pointage. Ainsi, on ne peut soulager la vis de pointage, qu'en augmentant la percussion verticale sur les encastrements des tourillons, et réciproquement. Quel que soit le dispositif adopté pour l'affût, la composante verticale de l'impulsion due à la réaction de la

charge doit être détruite par la résistance des appuis du canon sur l'affût. Mais il est essentiel de s'opposer au soulèvement de l'affût qui est si nuisible, et le moyen d'y réussir est de faire en sorte, que le choc T ait une certaine valeur, afin qu'il ne puisse devenir négatif. En outre, l'écrou de la vis de pointage, est le plus souvent fixé à des parties moins susceptibles de résistance, que celles où sont les encastrements des tourillons ; aussi les préoccupations du constructeur ont-elles principalement pour but d'atténuer les percussions sur la vis de pointage.

L'équation (19ter) fait voir que T augmente avec $c' - e'$ et avec le produit $C V d$.

Les circonstances qui accroissent les percussions verticales sur les encastrements des tourillons sont donc celles qui atténuent la percussion sur la vis de pointage.

L'équation (27)

$$\frac{T}{\mu} = \sin\theta - \frac{\left\{ a S - C d (\cos\theta - f \sin\theta) \right\} \cos\alpha}{S \left\{ (c - e) \sin\alpha + (c' - e') \cos\alpha \right\}}$$

fait voir que T augmente en même temps que θ et C, et que T diminue avec S. En langage ordinaire cela signifie, que les percussions verticales sur les encastrements des tourillons sont plus violentes, lorsque l'angle du tir est plus élevé au-dessus de l'horizon, que la masse du canon est plus forte, et que la masse totale du système est moindre.

On peut diminuer la masse totale du système sans changer celle du canon par l'emploi d'un affût aussi léger que possible.

---

§ 47. OBSERVATIONS SUR LA PERCUSSION HORIZONTALE T′ EXERCÉE SUR LES ENCASTREMENTS DES TOURILLONS.

La percussion horizontale T′ sur l'axe des tourillons est donnée par l'équation (20), dans laquelle on peut substituer à P sa valeur équation (18), il vient

$$T' = \mu \cos\theta - C V + P \sin\alpha = \mu \cos\theta - C V + \frac{(\mu a - C V d) \sin\alpha}{(c - e) \sin\alpha + (c' - e') \cos\alpha}$$

Le choc T′ est égal à la composante horizontale de la réaction de la charge, diminuée de la quantité de mouvement horizontale transmise au canon, et augmentée de la composante horizontale de la percussion sur la vis de pointage.

L'angle α étant toujours fort petit, posons $\alpha = 0$, les équations précédentes deviennent :

$$T' = \mu \cos\theta - C\,V \qquad (18^{bis})$$

Cette formule démontre que l'on diminue la percussion horizontale sur les encastrements des tourillons en favorisant la vitesse V de recul de la pièce, et en augmentant sa masse C.

Lorsque l'angle du tir est très-petit, la composante verticale $\mu \sin\theta$ a peu de valeur, et la percussion verticale T, équation (19^{bis}) est sensiblement nulle, si même elle ne devient pas négative ; auquel cas la pièce serait soulevée et viendrait heurter contre les susbandes des encastrements des tourillons. Dans cette même hypothèse de θ fort petit, cos θ est bien près de l'unité, et la percussion horizontale T′ diffère fort peu de $\mu - C\,V$. Il en résulte que dans le tir ordinaire des canons, qui se fait sous de petits angles d'élévation, la percussion horizontale sur les encastrements des tourillons est incomparablement plus forte que la percussion verticale.

On a eu la preuve de cette remarque dans la construction des affûts de place-côte. Les premiers qui ont été essayés avaient les encastrements des tourillons pratiqués dans les montants verticaux. Mais le bois offrant moins de résistance perpendiculairement aux fibres que suivant leur longueur, et l'effort horizontal des tourillons étant le plus violent, les montants se fendaient à l'emplacement des encastrements. On eut alors l'idée de ménager ceux-ci aux extrémités des arcs boutans, qui par suite de leur inclinaison soutinrent l'effort des tourillons à peu près suivant la longueur des fibres, et l'on a pu ainsi construire des affûts suffisamment résistants.

L'équation (28)

$$\frac{T}{\mu} = \cos\theta - \frac{C(\cos\theta - f\sin\theta)}{S} + \frac{\{aS - Cd(\cos\theta - f\sin\theta)\}\sin\alpha}{S\{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha\}}$$

montre, que T′ diminue lorsque C augmente et que S devient

plus petit. Ainsi pour atténuer le choc horizontal contre les encastrements des tourillons, qui est le plus violent, il faut augmenter la masse du canon et diminuer la masse totale du système : ce qui revient à dire que, plus les affûts sont lourds et les canons légers, plus cette percussion est violente.

ARTICLE II.

CANONS DE SIÉGE ET DE CAMPAGNE. — Percussions qui ont lieu lorsque l'affût conserve ses appuis sur le sol, et que les roues sont enrayées.

§ 48. HYPOTHÈSES CONCERNANT LES CHAÎNES D'ENRAYAGE.

Supposons, pour plus de simplicité, que les deux roues sont enrayées, et que les chaînes d'enrayage sont attachées aux points les plus bas des roues et de la crosse. Admettons que ces chaînes sont parallèles entr'elles et au plan vertical du tir ; nous négligeons ainsi les efforts obliques que ces chaînes exercent sur les jantes des roues, mais il sera facile de calculer ces efforts lorsque nous connaîtrons leurs composantes parallèles aux plans des roues.

§ 49. MOUVEMENTS ET PERCUSSIONS QUI ONT LIEU.

La culasse est en contact avec la vis de pointage, et les roues sont comprimées contre le sol ; le canon et l'affût se meuvent parallèlement au terrain, avec une vitesse horizontale V.

La tension des chaînes d'enrayage empêche la rotation des roues ; leur vitesse angulaire étant nulle on a $\varphi = 0$.

Les roues, sont entraînées par le choc de l'essieu, retenues par le frottement des cercles de roues contre le sol, et sollicitées en même temps par la tension des chaînes d'enrayage : sous

l'influence de ces forces, les roues participent au mouvement général de translation de tout le système, tout en restant parallèles à elles-mêmes.

Chaque chaîne d'enrayage éprouve à ses deux extrémités des efforts, qui sont égaux, contraires et directement opposés.

Appelons Q′ la somme des tensions des deux chaînes d'enrayage : la crosse sera sollicitée en sens contraire au recul par une force $-Q'$, tandis que les roues seront tirées par leurs points les plus bas par une force $+Q'$.

Indépendamment de la force $-Q'$, la crosse éprouvera une résistance $-fQ$ provenant du frottement produit par le choc vertical Q.

De même, la percussion verticale R, que les roues éprouvent en leurs points de contact avec le sol, engendre un frottement $-fR$.

---

§ 50. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU CANON.

Nous conservons les notations du § 32 : seulement les roues ne tournent pas, nous n'aurons pas à nous occuper de la vitesse angulaire φ : la vitesse de glissement z devient égale à V.

Représentons, par des forces, les résistances des encastrements des tourillons et de la vis de pointage ; nous pouvons considérer le canon, comme un corps libre soumis à ces forces et à l'impulsion μ, et établir les conditions de l'équilibre, qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement réellement imprimées.

Les composantes verticales de ces forces sont :

$$\mu \sin \theta$$
$$-T$$
$$-P \cos \alpha.$$

Les composantes horizontales sont :

$$\mu \cos \theta$$
$$-T'$$
$$P \sin \alpha$$

La quantité de mouvement imprimée est VC, force horizontale.

Les forces étant les mêmes qu'au § 36, nous aurons les mêmes équations, savoir :

$$\mu \sin\theta - T - P\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$
$$\mu \cos\theta - T' + P\sin\alpha = C\,V \qquad (2)$$
$$\mu\, a - P\cos\alpha\,(c' - e') - P\sin\alpha\,(c - e) = C\,V\,d \qquad (3)$$

---

§ 31. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU CANON ET A L'AFFUT RÉUNIS.

Les forces qui agissent sur le canon et l'affût réunis, considérés comme un seul corps solide, ont les composantes suivantes :

composantes verticales,

$\mu \sin\theta$
$-E$
$-Q$:

composantes horizontales,

$\mu \cos\theta$
$-E'$
$-fQ$
$-Q'$ (effort des chaînes d'enrayage sur la crosse).

La quantité de mouvement produite, est celle horizontale $MV = (A + C)V$, due à la vitesse V du recul. Cette force est appliquée au centre de gravité du système, formé du canon et de l'affût réunis ; et l'ordonnée verticale h de ce centre de gravité a pour valeur § 32.

$$h = \frac{C\,(c + d) + Ag}{M}$$

Les deux premières équations de l'équilibre entre les forces et les quantités de mouvement sont :

$$\mu \sin\theta - Q - E = 0 \qquad (4)$$
$$\mu \cos\theta - fQ - Q' - E' = M\,V \qquad (5)$$

Formons l'équation des moments relativement au point d'appui

de la crosse sur le sol, pour lequel les moments des forces Q, fQ et Q′ sont nuls, il vient :

$$\mu\gamma + \mathrm{E}r' - \mathrm{E}'r = \mathrm{M}\,\mathrm{V}\,h \qquad (6)$$

Les équations (5) et (6) deviennent, en substituant leurs valeurs à M et h,

$$\mu\cos\theta - f\,\mathrm{Q} - \mathrm{Q}' - \mathrm{E}' = (\mathrm{A} + \mathrm{C})\,\mathrm{V} \qquad (7)$$

$$\mu\gamma + \mathrm{E}r' - \mathrm{E}'r = \left\{ \mathrm{C}(c+d) + \mathrm{A}g \right\} \mathrm{V} \qquad (8)$$

---

§ 52. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AUX ROUES.

Les roues ne tournent pas mais participent à la vitesse horizontale de tout le système : elles sont animées de la quantité de mouvement horizontale B V.

Les forces qui agissent sur les roues ont les composantes suivantes :

composantes verticales :

E

— R,

composantes horizontales :

E′

— fR

Q′.

Les deux premières équations de l'équilibre entre les forces et les quantités de mouvement imprimées sont :

$$\mathrm{E} - \mathrm{R} = 0 \qquad (9)$$

$$\mathrm{E}' - f\,\mathrm{R} + \mathrm{Q}' = \mathrm{B}\,\mathrm{V} \qquad (10)$$

Formons l'équation des moments, relativement au point d'appui de la crosse sur le sol, pour lequel les moments des forces Q′ et — fR sont nuls, il vient :

$$-\mathrm{E}r' + \mathrm{E}'r + \mathrm{R}r' = \mathrm{B}\,\mathrm{V}\,r \qquad (11)$$

§ 53. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRÉCÉDENTES ET RÉPERTOIRE DE FORMULES.

La résolution des équations précédentes et l'introduction des valeurs de y et de S conduit aux solutions suivantes :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{\cos\theta - f\sin\theta}{S} \qquad (12)$$

$$R = E = \frac{S\,V\,y - \mu\,\gamma}{r'} \qquad (13)$$

$$Q' = f\,E \qquad (14)$$

$$E' = B\,V \qquad (15)$$

$$Q = \mu\sin\theta - E \qquad (16)$$

$$P = \frac{\mu\,a - C\,V\,d}{(c - e)\sin\alpha + (c' - e')\cos\alpha} \qquad (17)$$

$$T = \mu\sin\theta - P\cos\alpha \qquad (18)$$

$$T' = \mu\cos\theta + P\sin\alpha - C\,V \qquad (19)$$

Les équations nos 12 à 19 contiennent les solutions du problème. Nous pourrions nous en contenter, mais, pour faciliter l'analyse des éléments du système, qui influent sur les chocs produits, et pour pouvoir calculer directement ces chocs sans devoir passer par les valeurs intermédiaires, nous donnons encore les formules suivantes :

$$\frac{R}{\mu} = \frac{E}{\mu} = \frac{y\,(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r'} \qquad (20)$$

$$\frac{E'}{\mu} = \frac{B\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{S} \qquad (21)$$

$$\frac{\varphi}{\mu} = \sin\theta - \frac{y\,(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r'} \qquad (22)$$

§ 54. OBSERVATIONS SUR LES FORMULES PRÉCÉDENTES.

La valeur de V équation (12) est la même que celle obtenue précédemment, pour le canon dont les roues ne sont pas enrayées et pour les mortiers, dans tous les cas où l'affût conserve ses appuis sur le sol. Nous voyons ainsi la confirmation de cette observation, que le genre d'affût n'influe en rien sur la vitesse initiale du recul. Nous renvoyons d'ailleurs à nos remarques précédentes sur la vitesse V.

La première des équations (15)

$$E = R ,$$

est la même que la première des équations (13) § 37, relative aux affûts avec roues non enrayées. Elle montre, que la percussion verticale sur l'essieu, se transmet intégralement aux points d'appui des roues, que celles-ci soient enrayées ou non.

La seconde des équations (20)

$$\frac{E}{\mu} = \frac{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r'} \qquad (20)$$

ne diffère de la seconde équation (21) § 38, que par le dénominateur, qui est r', lorsque les roues sont enrayées, et $r' - fr$ lorsqu'elles ne le sont pas. Il en résulte que la percussion verticale sur l'essieu est moindre lorsque les roues sont enrayées que quand elles ne le sont pas. D'ailleurs, l'équation (15), est la même que celle que nous avons obtenue, pour la percussion verticale sur les appuis antérieurs de l'affût du mortier vers la volée.

On conçoit, en effet, que les roues étant enrayées, l'affût de siége ou de campagne se comporte dans le recul, comme un affût traineau, en ce qui concerne les percussions verticales.

L'équation (14)

$$Q' = f E$$

fait voir, que la tension Q', des chaînes d'enrayage, est égale au frottement des roues sur le sol, frottement engendré par la

percussion verticale E sur l'essieu. C'est un résultat que nous aurions pu établir à priori, en commençant le problème.

L'équation (15)

$$E' = BV$$

montre que la percussion horizontale sur l'essieu est égale à la quantité de mouvement horizontale transmise aux roues.

En comparant, cette valeur de E', à celle donnée par l'équation (14) § 37, relative aux affûts avec roues non enrayées, nous remarquons que le choc horizontal contre l'essieu est plus considérable, quand les roues sont libres que lorsqu'elles sont enrayées. Cette conclusion était à prévoir, puisque la tension des chaînes d'enrayage devait détruire le frottement des roues sur le sol.

La conséquence de cette observation est que la crosse fatigue davantage quand les roues sont enrayées. En effet, l'équation (22)

$$\frac{Q}{\mu} = \sin\theta - \frac{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma}{r'}$$

relative aux affûts avec roues enrayées, ne diffère de celle (23) §38, relative aux affûts avec roues non enrayées, que par le dénominateur de la fraction à soustraire de $\sin\theta$, lequel est r' pour les roues enrayées, et $r' - fr$ pour les roues libres. Il en résulte que la percussion verticale sur la crosse est plus forte lorsque les roues sont enrayées.

L'équation (16) du § 53 est de même forme que celle (9) du § 24, relative aux mortiers sur affût traineau. On en conclut que, toutes autres choses égales d'ailleurs, la percussion verticale, sur la crosse de l'affût avec roues enrayées, est la même que s'il s'agissait d'un affût traineau.

Le matériel de montagne est très-léger, afin que l'affût et le canon puissent être transportés séparément à dos de bêtes de somme : il en résulte que les reculs sont considérables, et que, pour les modérer, on enraye les roues de l'affût au moment du tir. Dans ce matériel, l'essieu fatigue donc moins, et la crosse davantage, que dans celui de campagne.

Les efforts horizontaux de la crosse sur le terrain se composent du frottement fQ, augmenté de la tension Q' des chaînes d'enrayage : leur somme est beaucoup plus grande que pour les affûts avec roues non enrayées. Il en résulte qu'aux affûts de montagne on doit particulièrement veiller à la solidité de la crosse.

Les équations (17) (18) et (19) du § 53, sont identiquement les mêmes que celles (18) (19) et (20) du § 38, relatives aux affûts avec roues non enrayées. On en conclut que les percussions sur les encastrements des tourillons et sur la vis de pointage, sont les mêmes quand les roues sont enrayées, que lorsqu'elles peuvent tourner librement sur leurs essieux.

ARTICLE III.

Percussions produites, lorsque la culasse restant en contact avec la vis de pointage, l'affût soulevé tourne sur sa crosse comme sur une charnière, tandis que, le système entier formé du canon, de l'affût et des roues, prend un mouvement de translation parallèlement au sol.

§ 55. MOUVEMENTS QUI ONT LIEU.

Les canons, de même que les mortiers, présentent deux circonstances dans le recul ; tantôt l'affût conserve ses appuis sur le sol, et c'est le cas que nous avons traité dans les deux premiers articles de cette seconde partie, et tantôt l'affût est soulevé par sa partie antérieure, et tourne comme sur une charnière autour du point d'appui de la crosse sur le sol, tout en possédant un mouvement de translation parallèlement au terrain.

Mais tandis que l'affût soulevé pivote autour du point d'appui de la crosse, il y a deux cas à examiner.

La culasse du canon peut rester en contact avec la vis de pointage, et la position relative de la bouche-à-feu avec l'affût ne change pas ; ou bien, en même temps que l'affût est soulevé, la culasse s'éloigne de la vis de pointage, et le canon prend mouvement particulier de rotation autour de l'axe des tourillons.

Ainsi que le titre de cet article l'indique, nous nous proposons ici de calculer les percussions qui ont lieu lorsque l'affût est soulevé dans le tir, et que la pièce et l'affût conservent leurs positions relatives, et se meuvent comme s'ils ne formaient qu'un

seul et même corps solide. Les mouvements et les percussions se produisent alors de la manière suivante.

L'affût est soulevé par l'effet du tir, et tourne autour du point d'appui de la crosse sur le sol.

La crosse glisse sur le sol, et le système entier, composé du canon, de l'affût et des roues, prend un mouvement de translation parallèlement au terrain.

La culasse reste en contact avec la vis de pointage ; la bouche à feu conserve sa position relative avec l'affût, et participe au double mouvement de translation parallèlement au sol, et de rotation autour du point d'appui de la crosse.

Le choc de l'essieu, sur l'axe des roues, les soulève et leur communique en même temps le mouvement de translation de tout le système. Mais le soulèvement et le mouvement de translation, n'altèrent en rien le parallèlisme des roues avec leur position primitive ; parce que le choc de l'essieu, passant par l'axe de rotation des roues, sur lequel se trouve leur centre de gravité, ne saurait leur imprimer aucune vitesse angulaire.

---

§ 56. NOTATIONS.

Outre les notations du § 32 nous adoptons les suivantes :

ω vitesse angulaire de l'affût autour du point d'appui de la crosse sur le sol. (Le canon ne se séparant pas de l'affût possède la même vitesse angulaire).

CK^2 moment d'inertie du canon, relativement à une droite passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe des tourillons.

AK'^2 moment d'inertie de l'affût, relativement à une droite passant par son centre de gravité, et parallèle à l'axe des encastrements des tourillons.

MK''^2 moment d'inertie du canon et de l'affût réunis, relativement à une droite passant par le centre de gravité de ce système, et parallèle à l'axe des tourillons.

$M\left\{K''^2 + h^2 + h'^2\right\}$ moment d'inertie du canon et de l'affût réunis, relativement à une droite passant par le point d'appui de la crosse, et parallèle à l'axe des tourillons.

$C\left\{K^2 + (c+d)^2 + (c'-d')^2\right\}$ moment d'inertie du canon, relativement à une droite passant par le point d'appui de la crosse, et parallèle à l'axe des tourillons.

$A\left\{K'^2 + q^2 + q'^2\right\}$ moment d'inertie de l'affût, relativement à une droite passant par le point d'appui de la crosse, et parallèle à l'axe des encastrements des tourillons.

On a la relation

$$M(K''^2+h^2+h'^2)=C\left\{K^2+(c+d)^2+(c'-d')^2\right\}+A\left\{K'^2+q^2+q'^2\right\}$$

Les autres notations sont :

$B\,l^2$ moment d'inertie des deux roues, relativement à l'axe de l'essieu.

$B\left\{l^2 + r^2 + r'^2\right\}$ moment d'inertie des deux roues, relativement à une droite passant par le point d'appui de la crosse sur le sol, et parallèle à l'axe de l'essieu.

$S\,I^2$ moment d'inertie des masses réunies du canon, de l'affût et des roues, relativement à une droite passant par le centre de gravité du système, et parallèle à l'axe des tourillons.

$X = S\left\{I^2 + y^2 + y'^2\right\}$ moment d'inertie du système formé du canon, de l'affût et des roues, relativement à une droite passant par le point d'appui de la crosse sur le sol, et parallèle à l'axe des tourillons.

§ 57. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU CANON ET A L'AFFUT RÉUNIS.

Remplaçons par des forces, la résistance du sol sous la crosse et la réaction des roues au choc de l'essieu, nous pourrons considérer le canon et l'affût réunis, comme ne formant qu'un seul corps libre, soumis à ces forces et à la réaction μ due à l'explosion de la charge, et établir les conditions de l'équilibre, qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement réellement imprimées.

Les composantes de ces forces et de la réaction μ sont les suivantes :

composantes verticales

$\mu \sin \theta$

E

$-Q$:

composantes horizontales

$\mu \cos \theta$

$-E'$

$-fQ$.

Les quantités de mouvement imprimées sont :

$MV = (A+C)V$ quantité de mouvement de translation, due à la vitesse horizontale du recul V de tout le système.

$\omega M \sqrt{h^2+h'^2}$ quantité de mouvement de rotation du canon et de l'affût réunis. (§ 7 équation XII)

Cette force de rotation a pour composantes (§ 7 équation XI) :

$\omega M h$ composante horizontale, dirigée dans le sens du recul ;

$-\omega M h'$ composante verticale, agissant de bas en haut.

Ces composantes deviennent en substituant à h, h' et M leurs valeurs :

$$\left.\begin{aligned} \omega M h &= \omega \left\{ C(c+d) + A g \right\}, \\ -\omega M h' &= -\omega \left\{ C(c'-d') + A g' \right\}. \end{aligned}\right\} \quad 1$$

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu \sin\theta - Q + E = = \omega M h' = -\omega \left\{ C(c' - d') + A g' \right\}, \qquad (2)$$

$$\mu \cos\theta - fQ - E' = MV + \omega M h = (A + C)V + \omega \left\{ C(c + d) + A g \right\}. \qquad (3)$$

Pour 3me équation, nous formerons celle des moments, relativement au point d'appui de la crosse sur le sol, pour lequel les moments des forces $-Q$ et $-fQ$ sont nuls.

Les moments des forces qui agissent sur le système du canon et de l'affût réunis sont :

$\mu\gamma$
$-Er'$
$-E'r.$

Les moments des quantités de mouvement imprimées sont :

$MVh = (A + C)Vh$ moment de la quantité de mouvement de translation parallèlement au sol :

$\omega M(K''^2 + h^2 + h'^2)$ moment de la quantité de mouvement de rotation du canon et de l'affût réunis, (équation XIII § 7).

Etablissons l'équation des moments.

$$\mu\gamma - Er' - E'r = MVh + \omega M(K''^2 + h^2 + h'^2) \qquad (4)$$

Mais, le moment d'inertie du canon et de l'affût réunis, est égal à la somme des moments d'inertie partiels du canon et de l'affût, on a donc :

$$M(K''^2 + h^2 + h'^2) = C\left\{K^2 + (c + d)^2 + (c' - d')^2\right\} + A(K'^2 + g^2 + g'^2).$$

Remplaçons, dans l'équation (4), M, h, h' et MK''^2 par leurs valeurs, il vient :

$$\mu\gamma - Er' - E'r = V\left\{C(c + d) + Ag\right\} +$$

$$+ \omega\left[C\left\{K^2 + (c + d)^2 + (c' - d')^2\right\} + A\left\{K'^2 + g^2 + g'^2\right\}\right] \qquad (5)$$

§ 58. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AUX ROUES.

Remplaçons le choc de l'essieu, qui met les roues en mouvement, par ses composantes — E et + E'; nous pourrons faire abstraction de ce choc, et rechercher les conditions de l'équilibre qui doit exister entre ces composantes et les quantités de mouvement dont les roues sont réellement animées.

Les roues, participent à la vitesse générale de translation V de tout le système, et sont animées de la quantité de mouvement horizontale B V.

Elles accompagnent l'essieu dans le mouvement angulaire de l'affût, et possèdent la vitesse $\omega\sqrt{r^2+r'^2}$, dirigée tangentiellement à l'arc de cercle, que l'essieu tend à décrire autour du point d'appui de la crosse sur le sol. Cette vitesse engendre la quantité de mouvement $\omega\,B\sqrt{r^2+r'^2}$ de même direction.

Soit δ l'angle que fait avec l'horizon, la droite menée de l'axe de l'essieu au point d'appui de la crosse sur le sol.

Nous aurons :

$$\operatorname{tg}\,\delta = \frac{r}{r'}$$

$$\sin\delta = \frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}$$

$$\cos\delta = \frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}$$

La direction de la force $\omega\,B\sqrt{r^2+r'^2}$, perpendiculaire sur la droite menée de l'axe de l'essieu au point d'appui de la crosse, fait avec la verticale le même angle δ, que cette droite fait avec l'horizon.

La force $\omega\,B\sqrt{r^2+r'^2}$ a donc les composantes suivantes :

$-\omega\,B\sqrt{(r^2+r'^2)}\cos\delta = -\omega\,B\,r'$, composante verticale,

$\omega\,B\sqrt{(r^2+r'^2)}\sin\delta = \omega\,B\,r$, composante horizontale.

La composante verticale $-\omega B r'$ agit de bas en haut, et c'est pour cela qu'elle est négative.

Les deux premières équations d'équilibre entre les forces et les quantités de mouvement imprimées sont :

$$-E = -\omega B r' \qquad (6)$$

$$E' = BV + \omega B r \qquad (7)$$

Il n'y a pas lieu de former l'équation des moments, parce que les forces et les quantités de mouvement concourent toutes sur l'axe de l'essieu, et que cette équation serait identiquement nulle. D'ailleurs nous avons un nombre d'équations égal à celui des inconnues qu'elles renferment.

---

§ 59. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRÉCÉDENTES.

Les équations (2), (3), (5), (6) et (7), renferment 5 inconnues et suffisent à les trouver.

Le nombre de termes auxquels on parvient est très-grand, il convient de simplifier les formules, en employant les abréviations indiquées au § (56) savoir :

$$S = A + B + C$$

$$y = \frac{C(c+d) + A g + B r}{S}$$

$$y' = \frac{C(c'-d') + A g' + B r'}{S}$$

$$X = S\left\{I^2 + y^2 + y'^2\right\}$$

Le moment d'inertie représenté par X, est égal à la somme des moments d'inertie partiels du canon, de l'affût et des roues, pris relativement au point d'appui de la crosse sur le sol.

On a :

$$X = C\left\{K^2 + (c+d)^2 + (c'-d')^2\right\} + A\left\{K'^2 + g^2 + g'^2\right\} + B\left\{I^2 + r^2 + r'^2\right\} \qquad (8).$$

On en déduit pour la valeur d'une expression qui se présente dans l'élimination.

$$X-Bl^2=C\left\{K^2+(c+d)^2+(c'-d')^2\right\}+A\left\{K'^2+g^2+g'^2\right\}+B(r^2+r'^2) \tag{8^{bis}}.$$

L'élimination conduit aux relations suivantes :

$$\frac{V}{\mu}=\frac{(X-Bl^2)(\cos\theta-f\sin\theta)-\gamma S(y+fy')}{S\left\{X-Bl^2-Sy(y+fy')\right\}} \tag{9}$$

$$\omega=\frac{\mu\gamma-yVS}{X-Bl^2} \tag{10}$$

$$E=\omega Br' \tag{11}$$

$$E'=BV+\omega Br \tag{12}$$

$$Q=\mu\sin\theta+\omega y'S \tag{13}$$

Comme renseignement utile, nous ajoutons les formules suivantes, auxquelles on parvient dans le courant de l'élimination, et nous exprimons les divers chocs et vitesses en fonction des données du problème.

$$\frac{\omega}{\mu}=\frac{\gamma-y(\cos\theta-f\sin\theta)}{X-Bl^2-yS(y+fy')} \tag{14}$$

$$\frac{E}{\mu}=\frac{Br'\left\{\gamma-y(\cos\theta-f\sin\theta)\right\}}{X-Bl^2-yS(y+fy')} \tag{15}$$

$$\frac{E'}{\mu}=\frac{B\left[\gamma S\left\{r-(y+fy')\right\}+\left\{X-Bl^2-yrS\right\}(\cos\theta-f\sin\theta)\right\}}{X-Bl^2-yS(y+fy')} \tag{16}$$

$$\frac{Q}{\mu}=\sin\theta+\frac{y'S\left\{\gamma-y(\cos\theta-f\sin\theta)\right\}}{X-Bl^2-yS(y+fy')} \tag{17}$$

$$\omega=\frac{\mu(\cos\theta-f\sin\theta)-VS}{S(y+fy')} \tag{18}$$

$$Q = \mu \sin \theta + \frac{y' S \left\{ \mu \gamma - y V S \right\}}{X - B l^2} \qquad (19)$$

$$Q = \mu \sin \theta + \frac{y' \left\{ \mu (\cos \theta - f \sin \theta) - V S \right\}}{y + f y'} \qquad (20)$$

---

§ 60. MISE EN ÉQUATION DES PERCUSSIONS EXERCÉES SUR LA TÊTE DE LA VIS DE POINTAGE ET SUR LES ENCASTREMENTS DES TOURILLONS.

Remplaçons, par des forces, les résistances opposées par les encastrements des tourillons et par la tête de la vis de pointage, et nous pourrons considérer le canon comme un corps libre, soumis à ces forces et à l'impulsion μ, et établir les conditions de l'équilibre, qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement réellement imprimées.

Les composantes des forces sont :

composantes verticales

$\mu \sin \theta$

T

$- P \cos \alpha$;

composantes horizontales,

$\mu \cos \theta$

$- T'$

$P \sin \alpha$.

La vitesse horizontale V, imprimée à tout le système, produit sur le canon la quantité de mouvement horizontale C V.

La vitesse angulaire ω, autour du point d'appui de la crosse sur le sol, produit sur le canon la quantité de mouvement de rotation $\omega C \sqrt{(c+d)^2 + (c'-d')^2}$ (équation XII, § 7).

Cette quantité de mouvement de rotation a pour composantes (équation XI, § 7) :

$- \omega C (c' - d')$ composante verticale, agissant de bas en haut,

$\omega C (c + d)$ composante horizontale, agissant dans le sens du recul.

Les deux premières équations d'équilibre sont :

$$\mu \sin\theta + T - P\cos\alpha = -\omega C (c' - d') \qquad (21)$$

$$\mu \cos\theta - T' + P\sin\alpha = \omega C (c + d) + C V \qquad (22)$$

Formons l'équation des moments, relativement à l'axe des tourillons, pour lequel les moments des forces T et T′ sont nuls, nous aurons une équation, qui ne renfermera que l'inconnue P, et nous permettra d'en déduire immédiatement sa valeur.

Les moments des forces sont :

μa

$-P\cos\alpha (c' - e')$ moment de la composante verticale $-P\cos\alpha$

$-P'\sin\alpha (c - e)$ moment de la composante horizontale $P\sin\alpha$

Les moments des quantités de mouvement sont :

CVd moment de la quantité de mouvement horizontale C V,

$q\omega C\sqrt{(c+d)^2 + (c'-d')^2}$ moment de la quantité de mouvement de rotation du canon : q étant le bras de levier de cette force relativement à l'axe des tourillons.

On a pour l'équation des moments relativement à l'axe des tourillons.

$$\mu a - P\cos\alpha(c'-e') - P\sin\alpha(c-e) = CVd + q\omega C\sqrt{(c+d)^2+(c'-d')^2}$$

Le bras de levier q se détermine au moyen de l'équation XV § 8.

$$q = \frac{K^2 + x_1^2 + y_1^2 - x\,x_1 - y\,y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

Dans cette équation, les lettres ont les valeurs suivantes :

$$x_1 = c' - d'$$
$$y_1 = c + d$$
$$x = c'$$
$$y = c$$

Il en résulte

$$q = \frac{K^2 + (c'-d')^2 + (c+d)^2 - c'(c'+d') - c(c+d)}{\sqrt{(c+d)^2 + (c'-d')^2}}$$

On trouve, en réduisant les termes du numérateur,

$$q = \frac{K^2 + d^2 + d'^2 + c\,d - c'\,d'}{\sqrt{(c+d)^2 + (c'-d')^2}}$$

Cette valeur de q, introduite dans l'équation des moments, donne :

$$\mu\,a - P\left\{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha\right\} =$$

$$= C\,V\,d + \omega\,C\left\{K^2 + d^2 + d'^2 + c\,d - c'\,d'\right\} \qquad (25).$$

---

§ 61. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS (21), (22) ET (23), RELATIVES AUX PERCUSSIONS, ÉPROUVÉES PAR LA VIS DE POINTAGE ET PAR LES ENCASTREMENTS DES TOURILLONS.

L'équation (23) fournit immédiatement la valeur de P, en posant pour abréger :

$$L = K^2 + d^2 + d'^2 \ (24) \quad U = c\,d - c'\,d', \qquad (25)$$

Il vient :

$$P = \frac{\mu\,a - C\,V\,d - \omega\,C\,(L+U)}{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha} \qquad (26)$$

On déduit des autres équations :

$$T = P\cos\alpha - \mu\sin\theta - \omega\,C\,(c'-d') \qquad (27)$$

$$T' = \mu\cos\theta - C\,V - \omega\,C\,(c+d) + P\sin\alpha \qquad (28)$$

Substituons les valeurs de V et ω, données par les équations (9) et (14) dans l'équation (26).

On obtient :

$$\frac{P}{\mu} = \frac{1}{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha}\left\{a - \frac{C\,d\left\{(X - B\,l^2)(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma\,S(y + f\,y')\right\}}{S\left\{X - B\,l^2 - y\,S\,(y + f\,y')\right\}} - \right.$$

$$\left. - \frac{C\,(L+U)\left\{\gamma - y\,(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}}{X - B\,l^2 - y\,S\,(y + f\,y')}\right\} \qquad (29).$$

§ 62. OBSERVATIONS SUR LA VITESSE ANGULAIRE ω.

La vitesse angulaire ω, devant être positive, il faut que les deux termes de la fraction,

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta)}{X - B l^2 - y S(y + f y')} \tag{14}$$

soient de mêmes signes. Mais nous avons vu, à l'article I, § 40, que lorsque l'affût est soulevé, l'expression $y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma$ avait une valeur négative; d'où il résulte que l'on a simultanément, dans le cas actuel, qui est celui du soulèvement de l'affût:

$$\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta) > 0 \tag{30}$$

$$X - B l^2 - y S(y + f y') > 0 \tag{31}$$

Il est facile de démontrer que l'inégalité (31) subsiste, quel que soit le sens de l'inégalité (30). A cet effet, substituons dans l'inégalité (31) à X sa valeur,

$X = S(I^2 + y^2 + y'^2)$, cette formule devient

$$S(I^2 + y^2 + y'^2) - B l^2 - y S(y + f y')$$

réduisant il vient :

$$S I^2 - B l^2 + S y'(y' - f y) \tag{31^{bis}}.$$

Mais le moment d'inertie du système entier $S I^2$ est plus grand que le moment d'inertie partiel des deux roues $B l^2$; et de plus, dans la pratique, l'ordonnée horizontale y' du centre de gravité du système entier, est plus grande que l'ordonnée verticale y, et à fortiori que $f y$: donc l'inégalité (31) est toujours satisfaite.

L'équation (14) montre que ω croit en même temps que γ et que f.

Ainsi, la vitesse angulaire de l'affût augmente, lorsque la perpendiculaire, menée du point d'appui de la crosse sur l'axe de

l'âme prolongé, est plus grande, et que le coëfficient du frottement est plus considérable.

Les affûts élevés, comme ceux de place de Gribauval, sont plus facilement soulevés, que ceux de marine et de casemate, où le canon est plus rapproché du sol, et où, par conséquent, la perpendiculaire γ est moins grande.

De ce que ω augmente en même temps que f, la réciproque a lieu, ω diminue avec f. Dans le tir sur la glace, où le frottement f est sensiblement nul, la vitesse ω est moindre, que sur un sol donnant lieu à de grands frottements : et s'il s'agit d'affûts sur chassis, la vitesse ω sera diminuée, si les côtés du chassis sont des rails en fer, au lieu de semelles en bois, parce que le glissement de la crosse éprouvera moins d'obstacles sur le fer que sur le bois.

Nous voyons que ω diminue lorsque le moment d'inertie X est plus considérable. Accroître le moment d'inertie du système, c'est lui donner plus de stabilité, c'est ralentir la vitesse ω, quand le soulèvement de l'affût ne peut être évité. Ces avantages sont aussi obtenus par l'accroissement de la masse S du système. Afin de mieux s'en rendre compte, remplaçons le dénominateur du 2^{d} membre de l'équation (14) par la valeur (31bis) nous aurons :

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta)}{S\left\{I^2 + y'(y' - f\,y)\right\} - B\,l^2} \qquad (14^{bis})$$

On voit clairement que ω est amoindri lorsque S est devenu plus grand.

Faisons $B = 0$ dans l'équation 14bis, elle devient semblable à l'équation 10bis du § 28, relative aux mortiers sur affût traineau. En effet, des affûts de campagne ou de siége, privés de leurs roues, deviennent des affûts traineau.

L'équation 8bis montre que l'expression :

$$S\,I^2 - B\,l^2$$

est indépendante du moment d'inertie $B\,l^2$ des roues. Il en résulte, que le dénominateur de l'équation (14bis) est indépendant en réalité du terme $B\,l^2$, et que le moment d'inertie des roues n'a aucune influence sur la valeur de ω ; c'est qu'en effet, les

roues ne tournent pas lors du soulèvement de l'affût, mais restent parallèles à elles-mêmes.

L'équation (14^{bis}) montre le rôle important de y', pour ralentir ω.

On augmente la stabilité du système, et on ralentit la vitesse angulaire ω, en accroissant l'ordonnée horizontale y' du centre de gravité du système entier, prise relativement au point d'appui de la crosse sur le sol.

Faisons $y = 0$ dans l'équation 14^{bis}, il vient :

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{\gamma}{S(I^2 + y'^2) - B l^2} \qquad (14^{ter}).$$

nous aurons une des plus grandes valeurs de ω. Cette circonstance se présenterait, si le centre de gravité du système se trouvait sur le plan d'appui de l'affût.

On peut se représenter un système remplissant cette condition, en supposant que l'affût très-pesant se meut sur un chassis, et qu'une forte partie de la masse de l'affût se trouve au-dessous, de manière que le centre de gravité du système entier soit sur le plan du chassis.

Posons la condition,

$$\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta) = 0 :$$

il en résulte,

$$\omega = 0$$

Si le centre de gravité du système, était assez élevé au-dessus du sol, pour que y satisfit à cette condition, la vitesse angulaire ω serait nulle, et l'affût conserverait ses appuis.

Pour reconnaître l'influence de l'angle θ, sur la valeur de ω, il faudrait, dans l'équation (14), exprimer X, y, y' et γ en fonction de θ, et analyser la formule qui en résulterait ; mais cette formule, très-compliquée, présente des difficultés que l'on évite, par les considérations suivantes :

Les quantités représentées par y, y' et X varient peu, pour des changements notables dans la valeur de θ, tandis que γ subit des variations très-grandes. La valeur de γ est la plus forte, dans le tir incliné sous l'horizon. Il suit de cette proposition et de l'équation (14), que c'est dans le tir sous l'horizon, que la vitesse ω de l'affût est la plus considérable.

Le tir incliné sous l'horizon est des plus nuisibles à la durée du matériel de l'artillerie, parce que la force vive que le système acquiert en retombant sur le sol, doit être détruite instantanément.

Les équations (10) et (18) font voir, que ω diminue lorsque la vitesse V du recul augmente. Ainsi c'est en favorisant le recul, que l'on amoindrit la vitesse angulaire due au soulèvement de l'affût.

---

§ 65. OBSERVATIONS SUR LA VITESSE V DU RECUL.

La vitesse V, donnée par l'équation (9),

$$\frac{V}{\mu} = \frac{(X - B l^2)(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma S (y + f y')}{S \{ X - B l^2 - S y (y + f y') \}}$$

devant être positive, les deux termes de la fraction, qui en exprime la valeur, sont de mêmes signes ; mais le dénominateur est positif à cause de l'inégalité (31), on a donc pour le numérateur :

$$(X - B l^2)(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma S (y + f y') > 0 \quad (32).$$

L'équation (9) fait voir, que V diminue, lorsque γ, augmente. Ainsi, les affûts élevés, pour lesquels γ est considérable et la vitesse angulaire ω rapide, ont une faible vitesse V du recul.

Toutes choses égales d'ailleurs, les affûts très-bas, ceux de casemate et de marine, ont plus de stabilité, mais une vitesse de recul plus grande, que les affûts de Gribauval et de place-côte.

Supposons que le moment d'inertie X devienne infini, ou que l'on ait,

$$X = \infty.$$

Nous obtenons la valeur correspondante de V, en divisant tous les termes du 2^d membre de l'équation (9) par X, et faisant ensuite $X = \infty$.

Il en résulte

$$\frac{V}{\mu} = \frac{(\cos\theta - f\sin\theta)}{S}$$

Cette valeur est la même, que celle que nous avons déjà obtenue, lorsque l'affût conserve ses appuis sur le sol. En effet, si le moment d'inertie est infini, le système ne peut être soulevé, et le recul est le même, que si l'affût conserve ses appuis. On peut d'ailleurs s'assurer directement, par l'équation (14), que l'on a simultanément ;

$$X = \infty \quad \text{et} \quad \omega = 0.$$

Nous apprécierons l'influence de S sur la valeur de V, en substituant dans l'équation (9) à X sa valeur $S(I^2 + y + y'^2)$; l'on obtient :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{S\left[(I^2+y^2+y'^2)(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma(y+fy')\right] - Bl^2(\cos\theta - f\sin\theta)}{S\left[S\left\{I^2 + y'(y' - fy)\right\} - B\,l^2\right]} \qquad (9^{bis})$$

Cette équation montre que V diminue, lorsque S augmente. On ralentit V et ω tout à la fois par une masse considérable du système.

Quel que soit donc le cas considéré, qu'il y ait soulèvement de l'affût, ou que l'affût conserve ses appuis sur le sol, on retarde le recul, par l'accroissement de la masse du système.

Nous avons vu, par l'équation 8^{bis}, que l'expression $X - B\,l^2$, est indépendante de $B\,l^2$; cette observation, appliquée à l'équation (9), montre, que la valeur de V, est également indépendante de $B\,l^2$. Par conséquent le moment d'inertie des roues n'a aucune influence sur la rapidité du recul V.

Si l'on fait abstraction du moment d'inertie $B\,l^2$, l'équation (9) a la même forme que celle 9^{bis}, § 28, relative aux mortiers sur affût traineau ; tout ce que nous avons dit à cette occasion étant applicable ici, nous n'y reviendrons pas.

§ 64. OBSERVATIONS SUR LA PERCUSSION VERTICALE E SUR L'ESSIEU.

Le second membre de l'équation (15)

$$\frac{E}{\mu} = \frac{B\,r' \left\{ \gamma - y\,(\cos\theta - f\sin\theta \right\}}{X - B\,l' - y\,S\,(y + f\,y')}$$

se décompose en deux facteurs

$$B\,r' \quad \text{et} \quad \frac{\gamma - y\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{X - B\,l' - y\,S\,(y + f\,y')}$$

Le second de ces facteurs, donne la valeur de $\frac{\omega}{\mu}$ et a été analysé au § 62 ; tout ce qui tend à l'augmenter ou à le diminuer influe dans le même sens sur la valeur de **E**, nous n'y reviendrons plus, réserves faites en ce qui concerne r', implicitement contenu dans X. Cette observation est confirmée par la forme de l'équation (11)

$$E = \omega\,B\,r'.$$

Le facteur $B\,r'$, fait voir que le choc vertical E augmente avec la masse B des roues. Ce sont effectivement les roues les plus pesantes qui fatiguent le plus leurs essieux, dans le sens vertical tout comme dans le sens horizontal, ainsi que nous le verrons plus tard.

Toutes choses égales d'ailleurs, la percussion E augmente avec la distance r' entre les points d'appui de la crosse et des roues. Toutefois r' est facteur au 1er degré dans le numérateur de la fraction (15) et au 2^{e} degré dans la fonction X du dénominateur ; le dénominateur passé une certaine limite, croît donc plus rapidement avec r' que le numérateur. Mais remarquons, que E devient nulle tout aussi bien avec $r' = 0$ qu'avec $r' = \infty$.

Il s'ensuit qu'entre ces deux limites il y a une valeur de r' qui répond au maximum de E : on la déterminerait par la méthode des coëfficients différentiels.

§ 65. OBSERVATIONS SUR LA PERCUSSION HORIZONTALE E′ SUR L'ESSIEU.

L'équation (12)

$$E' = B\,V + \omega\,B\,r$$

contient deux termes au 2e membre : l'un B V est la quantité de mouvement des roues engendrée par la vitesse V de recul de tout le système ; l'autre $\omega\,B\,r$, est la composante horizontale du choc imprimé aux roues par la vitesse angulaire ω de l'affût, § (58).

Le terme B V augmente avec la masse B des roues et la vitesse V du recul.

Le terme $\omega\,B\,r$, croît avec la vitesse angulaire ω, la masse B, et le rayon r des roues.

En résumé la fatigue de l'essieu dans le sens horizontal augmente avec la vitesse du recul et celle du soulèvement de l'affût autour du point d'appui de la crosse, et avec la masse et la grandeur des roues.

Si nous substituons à ω sa valeur équation (14), le terme $\omega\,B\,r$ devient

$$\omega\,B\,r = \frac{\mu B r \left\{ \gamma - y\,(\cos\theta - f\sin\theta) \right\}}{X - B\,l^2 - y\,S(y + f\,y')}$$

La quantité r^2, est implicitement contenue dans X, et par conséquent au dénominateur de cette fraction, qui est d'une forme semblable à celle du § précédent, si l'on met r à la place de r'. Il y a lieu de faire ici des raisonnements analogues concernant r.

Cette fraction devient nulle pour $r = 0$ tout comme pour $r = \infty$: entre ces deux limites, il y a une valeur de r qui répond au maximum de $\omega\,B\,r$: on la trouverait par la méthode des coëfficients différentiels.

Quoiqu'il en soit, dans la pratique, le terme de la fonction X, qui contient r^2, a pour valeur une faible partie de la valeur totale de cette fonction, tandis que r est facteur du numérateur. Il s'ensuit que dans les conditions du matériel de l'artillerie, $\omega\,B\,r$ croît réellement avec la grandeur du rayon r des roues.

§ 66. COMPARAISON ENTRE LA COMPOSANTE VERTICALE E ET CELLE HORIZONTALE E′ DU CHOC CONTRE L'ESSIEU.

Nous avons vu à l'article I que l'affût conservait ses appuis sur le sol, lorsque le tir était élevé au-dessous de l'horizon, et que la percussion verticale E sur l'essieu s'exerçait du haut en bas. Si l'on diminue successivement θ, on arrive à une certaine valeur plus ou moins rapprochée de $\theta = 0$ pour laquelle on a :

$$y\,(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma = 0$$

ce qui répond à la condition $E = 0$.

En continuant de faire décroître θ, la percussion verticale E change de signe après avoir passé par zéro et s'exerce de *bas* en *haut*.

Si l'angle θ du tir, s'écarte peu de la direction horizontale, s'il est peu élevé au-dessus de l'horizon ou peu incliné au-dessous, comme c'est le cas ordinaire pour les canons, la percussion verticale E sur l'essieu aura peu d'importance et sera négligeable tandis que la percussion horizontale E′ aura une intensité de beaucoup supérieure. Si l'on veut donc que les essieux des affûts de canons, résistent aux chocs initiaux du recul, il faut leur donner des dimensions plus fortes dans le sens horizontal que dans celui vertical. C'est l'inverse qu'il faudrait faire, si le tir était élevé comme celui des obusiers.

§ 67. OBSERVATIONS SUR LA PERCUSSION VERTICALE Q CONTRE LE POINT D'APPUI DE LA CROSSE SUR LE SOL.

L'équation (13)

$$Q = \mu \sin\theta + \omega\, y'\, S$$

montre, que la percussion verticale Q sur l'extrémité de la crosse, est égale à la composante verticale $\mu \sin\theta$ de l'impulsion μ, augmentée du choc $\omega\, y'\, S$, qui n'est autre chose que la composante verticale de la quantité de mouvement de rotation de

tout le système autour du point d'appui de la crosse sur le sol.

Lors du soulèvement, le système n'a qu'un seul point de contact avec le sol, et ce point supporte à lui seul la composante verticale de la réaction de la poudre ajoutée à la composante verticale de la quantité de mouvement de rotation imprimée à la masse entière.

A angle du tir égal, le choc sur la crosse est donc plus violent lorsque l'affût est soulevé que quand il conserve ses appuis. Mais dans la construction ordinaire des affûts, le soulèvement ne peut avoir lieu que pour des angles θ positifs, fort petits, ou pour des angles négatifs : dans le 1^er^ cas la composante $\mu \sin \theta$ est de peu de valeur, et dans le second cas cette composante $\mu \sin \theta$ devient négative. Il s'ensuit que dans le tir sous l'horizon la percussion Q est la différence entre les forces $\mu \sin \theta$ et $\omega y' S$.

L'angle θ croissant continuellement sous l'horizon, il y a une valeur pour laquelle on a $Q = 0$. On déterminera l'angle θ qui répond à cette valeur au moyen de l'équation

$$\frac{Q}{\mu} = \sin \theta + \frac{y' S \left\{ \gamma - y (\cos \theta - f \sin \theta) \right\}}{X - B l^2 - y S (y + f y')} \qquad (17)$$

et posant $Q = 0$ (17^bis^), exprimant les diverses lettres γ, d, d', etc., en fonction de θ et résolvant l'équation par rapport à θ.

Lorsque l'inclinaison θ aura la valeur donnée par l'équation (17^bis^), la percussion Q sera nulle, la crosse touchera simplement le sol sans le comprimer et glissera sur sa surface sans produire aucun frottement.

L'angle θ qui répond à l'équation (17^bis^) est négatif et concerne un tir sous l'horizon.

Si la déclinaison θ est plus forte que celle qui résulte de l'équation (17^bis^), on aura pour Q une valeur négative ou $Q < 0$, et la crosse au lieu de percuter le sol sera soulevée : dans ce cas le système entier suivra ce mouvement et perdra un instant tout contact avec le terrain.

Substituons dans l'équation (17) à X sa valeur

$$X = S(l^2 + y^2 + y'^2) \qquad \text{il vient}$$

$$\frac{Q}{\mu} = \sin\theta + \frac{y'\,S\left\{\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}}{S\left\{l^2 + y'(y' - f\,y)\right\} - B\,l^2} \qquad (17^{ter})$$

On voit que Q augmente avec la masse S du système entier. La percussion sur la crosse est donc plus violente, toutes choses égales d'ailleurs, avec un matériel très-pesant.

L'ordonnée horizontale y' est au second degré au dénominateur de la fraction, et au 1er degré au numérateur : mais y' entre dans deux termes seulement du dénominateur et est facteur du numérateur entier.

Il s'ensuit que la partie fractionnaire de la valeur de Q est nulle pour $y' = 0$ et $y' = \infty$, et qu'entre ces deux limites il y a une valeur de y' qui répond au maximum de Q ; laquelle valeur on pourrait déterminer, par la méthode des coëfficients différentiels.

L'équation (17^{ter}) montre que Q augmente avec γ. Des affûts élevés, pour lesquels γ est très-grand, éprouvent des chocs violents sur la crosse.

Le choc Q diminue lorsque le moment d'inertie $S\,l^2$ devient plus considérable.

Les chocs sur la crosse deviennent moins violents par la majoration du moment d'inertie du système.

Les équations

$$Q = \mu\sin\theta + \frac{y'S\left\{\mu\,\gamma - V\,y\,S\right\}}{\text{N} - B\,l^2} \qquad (19)$$

$$Q = \mu\sin\theta + \frac{y'\left\{\mu(\cos\theta - f\sin\theta) - V\,S\right\}}{y + f\,y'} \qquad (20)$$

font voir que Q diminue lorsque V augmente.

Les circonstances qui favorisent la vitesse V du recul, telles qu'une masse légère du système et un faible coëfficient du frottement, déterminent des chocs moins violents sur la crosse.

Remarquons que si l'on fait $B\,l^2 = 0$ dans l'équation

$$\frac{Q}{\mu} = \sin\theta + \frac{S\,y'\left\{\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}}{\text{N} - B\,l^2 - S\,y(y + f\,y')} \qquad (17)$$

elle prend la forme de l'équation 11^{bis} du § 28, relative aux mortiers sur affûts traineaux.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, des affûts sans roues, se comportent comme des affûts traineaux.

Remarquons que les vitesses V et ω, et les chocs E, E' et Q sont indépendants du mode de liaison de la pièce avec l'affût. Nous avons supposé que la position relative de la pièce et de l'affût était invariable : le recul doit donc se faire comme si ces deux objets ne constituaient qu'un seul et même corps solide. Nous examinerons plus tard les problèmes où le canon tourne autour de l'axe des tourillons, soit que la culasse s'écarte de la vis de pointage dans le recul, soit qu'elle s'en rapproche ; le contact n'existant pas au moment du tir entre la vis et le canon.

---

§ 68. OBSERVATIONS SUR LA PERCUSSION P CONTRE LA VIS DE POINTAGE.

L'équation (26)

$$P = \frac{\mu a - C V d - \omega C \{ L + U \}}{(c - e) \sin \alpha + (c' - e') \cos \alpha}$$

fait voir que la percussion P, sur la vis de pointage, augmente avec le produit μa, de l'impulsion μ, par l'abaissement a de l'axe des tourillons ; et diminue lorsque la masse C du canon, la vitesse de recul V et la vitesse angulaire ω sont plus considérables.

Ainsi les efforts employés dans le tir à faire reculer le canon ou à le soulever avec l'affût, sont perdus pour l'action de la culasse sur la vis de pointage.

Il en résulte que, toutes choses égales d'ailleurs, la vis de pointage est percutée moins fortement lorsque l'affût est soulevé que quand il conserve ses appuis sur le sol.

La percussion P serait nulle si l'on avait

$$\mu a - C V d - \omega C \{ L + U \} = 0$$

Dans ce cas, la pièce suivrait le mouvement de rotation de l'affût, en conservant son contact avec la vis de pointage, mais sans exercer la moindre percussion.

Le problème traité dans le présent article est dans la supposition que la culasse reste en contact avec la vis de pointage, ce qui implique la condition

$$P = \text{ou} > 0$$

ou

$$\mu a - C V d - \omega C \{ L + U \} = \text{ou} > 0 \qquad (26^{bis})$$

Si le contraire avait lieu, si l'on trouvait,

$$\mu a - C V d - \omega C \{ L + U \} > 0 \qquad (26^{ter})$$

on en conclurait, que les hypothèses admises n'existent pas, et que la culasse se sépare de la vis de pointage, ce qui constitue une circonstance, que nous traiterons à l'article V de cette deuxième partie.

L'inégalité (26^{ter}) serait satisfaite si a était négative, c'est-à-dire, si l'axe des tourillons était au-dessus de celui de l'âme : dans ce cas, non-seulement la percussion sur la vis de pointage serait nulle, mais, bien plus, la culasse s'en écarterait.

Le terme négatif du numérateur de l'équation (26)

$$-\omega C (L + U) = -\omega C \{ K^2 + d^2 + d'^2 + c d - c' d' \}$$

montre, que P décroit lorsque la quantité entre parenthèses augmente. Ainsi, on diminue la percussion sur la vis de pointage, en rendant plus considérable le moment d'inertie du canon $C(K^2 + d^2 + d'^2)$ relativement à l'axe des tourillons. A calibre et poids égaux et *à fortiori* avec un poids plus fort, les canons allongés ont un poids plus grand moment d'inertie que les canons courts et fatiguent moins la vis de pointage.

Si l'abaissement a de l'axe des tourillons était nul, la percussion P sur la vis de pointage ne serait pas nécessairement nulle pour cela. En effet, lorsque le centre de gravité de la pièce descend plus bas que l'axe des tourillons, l'ordonnée verticale d change de signe, et l'équation (26) devient, après avoir substitué à $L + U$ sa valeur,

$$P = \frac{C V d - \omega C \{ K^2 + d^2 + d'^2 - c d - c' d' \}}{(c - e) \sin \alpha + (c' - e') \cos \alpha}$$

A l'inspection de cette formule, on conçoit la possibilité de rendre P positive. Même dans l'hypothèse que le centre de gravité de la

pièce est au-dessus de l'axe des tourillons, il y a encore telles valeurs de c' et d' qui rendent P positive dans l'équation

$$P = -\frac{C V d + \omega C \left\{ K^2 + d^2 + d'^2 + c d - c' d' \right\}}{(c - e) \sin \alpha + (c' - e') \cos \alpha};$$

il suffit que l'on ait l'inégalité

$$\omega c' d' > V d + \omega (K^2 + d^2 + d'^2 + c d).$$

On satisferait à cette inégalité en augmentant c' et d' autant que de besoin : c'est-à-dire en allongeant la flèche de l'affût de manière à accroître l'intervalle entre la crosse et la projection horizontale de l'axe des tourillons, et en augmentant dans la construction de la pièce la distance entre cet axe et le centre de gravité de la bouche-à-feu ; ces dispositions augmenteraient d' à cause de la relation

$$d' = a' \cos \theta \qquad \text{(équation XVI, § 9)}$$

qui résulte de l'hypothèse $a = 0$.

Ainsi, lorsque l'affût est soulevé, si même l'abaissement de l'axe des tourillons est nul, il peut y avoir percussion sur la vis de pointage :

1° Si le centre de gravité de la pièce est au-dessous de l'axe des tourillons.

2° Si la flèche est suffisamment longue et si le centre de gravité du canon est suffisamment en arrière de l'axe des tourillons.

Il est important de conserver à P une valeur positive, afin d'empêcher la pièce de saigner du nez. Ces considérations sur la formule (26) expliquent pourquoi certains obusiers de siége de 0,20 en fonte, très-pesants pour pouvoir résister à de fortes charges, mais très-courts afin de permettre le placement de l'obus avec le bras seul, sans l'aide d'un refouloir, pourquoi, disons-nous, ces pièces saignaient du nez malgré la masse énorme de métal qu'elles présentaient autour de la chambre ; en effet, ces obusiers, ayant l'âme très-courte, avaient un faible moment d'inertie et leur centre de gravité était très-rapproché de l'axe des tourillons.

Le choc P est en raison inverse du dénominateur

$$(c - e)\sin\alpha + (c' - e')\cos\alpha.$$

Nous renvoyons à ce que nous avons dit concernant cette expression au § 45.

Supposons $\omega = 0$, dans l'équation (26), nous retombons sur l'équation (28) des § (37) et (45), relative au cas où l'affût conserve ses appuis sur le sol.

Nous avons vu, par l'équation (8^{bis}), que l'expression

$$X - B\,l^2,$$

toute réduction faite, est indépendante du terme $B\,l^2$; cette remarque, appliquée à l'équation (29), montre que le choc P n'est pas influencé par le moment d'inertie $B\,l^2$ des roues.

Substituons, dans l'équation (29), à X sa valeur

$$S(I^2 + y^2 + y'^2),$$

il vient ;

$$\frac{P}{\mu} = \frac{a}{(c-e)\sin\alpha + (c'-c')\cos\alpha} - \frac{C\,d\left[\left\{S(I^2+y^2+y'^2) - B\,l^2\right\}\left\{(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma\,S(y+fy')\right\}\right]}{S\left\{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha\right\}\left[S\left\{I^2+y'(y'-fy) - B\,l^2\right\}\right]} - \frac{C(L+U)\left\{\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}}{\left\{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha\right\}\left[S\left\{I^2+y(y'-fy)\right\} - B\,l^2\right]} \quad (29^{bis})$$

Il résulte, de cette formule, que le choc P est moins violent lorsque a, S et f diminuent.

Le facteur $C(L+U)$ contient le moment d'inertie du canon, relativement à l'axe des tourillons, on en conclut, comme tantôt, que P diminue quand ce moment augmente.

§ (69) OBSERVATIONS SUR LA PERCUSSION VERTICALE T CONTRE LES ENCASTREMENTS DES TOURILLONS.

Il résulte de l'équation (27)

$$T = P\cos\alpha - \mu\sin\theta - \omega C(c' - d'),$$

que la percussion verticale T, suivant l'axe des tourillons, est égale à la composante verticale P cos α de la percussion sur la vis de pointage diminuée :

1° De la composante verticale $\mu \sin \theta$ de la réaction de la charge contre la pièce.

2° De la composante verticale $\omega C(c' - d')$ de la quantité de mouvement de rotation du canon, autour du point d'appui de la crosse sur le sol.

Si l'on avait

$$P\cos\alpha - \mu\sin\theta - \omega C(c' - d') = 0,$$

la percussion verticale T serait nulle, et les tourillons ne recevraient d'autre choc que celui horizontal T'.

Ce qu'il y a de nuisible, dans la percussion T, c'est qu'elle s'exerce de bas en haut contre les susbandes : il importe donc de procurer au système le plus de stabilité possible, et de favoriser en même temps sa vitesse de recul V parallèlement au sol, parce que c'est le moyen de diminuer P.

Si l'on pose $\omega = 0$, dans l'équation (27), elle devient au signe près, la même que l'équation (29) du § 37, relative au cas où l'affût conserve ses appuis. Effectivement, s'il n'y a pas de rotation l'affût n'est pas soulevé : la différence du signe provient de ce que, dans le problème actuel, nous avons supposé que la percussion T s'exerçait de bas en haut, tandis qu'au § (37), cette percussion se produit en sens inverse du haut en bas.

§ 70. OBSERVATIONS SUR LA PERCUSSION HORIZONTALE T′ CONTRE LES ENCASTREMENTS DES TOURILLONS.

On voit, par l'équation (28)

$$T' = \mu \cos\theta + P \sin\alpha - C\,V - \omega\,C\,(c + d),$$

que la percussion horizontale T′, suivant l'axe des tourillons, est égale à la somme des composantes horizontales $\mu \cos\theta$, de la réaction contre le canon, et $P \sin\alpha$, de la percussion contre la vis de pointage ; laquelle somme doit être diminuée de la quantité de mouvement de recul C V de la pièce, et de la composante horizontale $\omega\,C\,(c + d)$ de la quantité de mouvement de rotation du canon.

De même que le choc vertical T est diminué, par les composantes verticales des quantités de mouvement réellement imprimées au canon, ainsi le choc horizontal T′ est atténué, par les composantes horizontales des quantités de mouvement imprimées à la pièce.

Si le système était immobile, la réaction contre les tourillons serait formidable : c'est ce qui arrive pour les mortiers de gros calibre, tirant sous des angles élevés, pour lesquels le recul est fort petit : on a dû ajouter des renforts aux tourillons, pour les empêcher de fléchir par l'effet du tir.

La même nécessité de protéger les tourillons, lorsque le recul est empêché, a fait adopter un moyen particulier de fixer les canons, lorsqu'on veut les utiliser, pour obtenir des portées extrêmes, en tirant sous 45°, comme les autrichiens l'ont fait pour réduire la place de Venise. Ce moyen consiste à enterrer le canon en partie, et à arrêter le recul par une forte charpente, placée sous la culasse. Dans ce dispositif on se garde bien de soutenir le canon par les tourillons.

§ 71. CAS PARTICULIER DU TIR HORIZONTAL.

Les formules se simplifient, lorsque le tir est parallèle, parce que plusieurs termes disparaissent, à cause des valeurs

$$\theta = 0\,,\quad \sin\theta = 0\quad\text{et}\quad \cos\theta = 1.$$

Ce tir, intermédiaire entre celui élevé et celui incliné sous l'horizon, convient pour étudier l'influence que les parties constantes de la pièce, de l'affût et des roues, ont sur les percussions initiales, produites dans le tir des canons, dont les trajectoires sont rasantes.

Dans l'hypothèse $\theta = 0$, les droites représentées par γ, d, d', y et y' ont les valeurs particulières suivantes :

$$\gamma = c + a$$
$$d = o$$
$$d' = a'$$

$$y = \frac{\mathrm{C}\,(c + a) + \mathrm{A}\,g + \mathrm{B}\,r}{\mathrm{S}}$$

$$y' = \frac{\mathrm{C}\,(c' - a') + \mathrm{A}\,g' + \mathrm{B}\,r'}{\mathrm{S}}$$

De plus les expressions $\mathrm{X} = \mathrm{S}\,(\mathrm{I}^2 + y^2 + y'^2)$, U et L indiquent de ce qui suit :

$$\mathrm{X} = \mathrm{C}\left\{\mathrm{K}^2 + (c+a)^2 + (c'-a')^2\right\} + \mathrm{A}\left\{\mathrm{K}'^2 + g^2 + g'^2\right\} + \mathrm{B}(l^2 + r^2 + r'^2)$$
$$\mathrm{U} = c\,a - c'\,a'$$
$$\mathrm{L} = \mathrm{K}^2 + a^2 + a'^2$$

Nous supposerons en outre pour plus de simplicité $\alpha = 0$.

Nous substituerons donc, dans les équations précédentes, à θ, d, d', γ et α, leurs valeurs ci-dessus, et pour abréger, nous conserverons les lettres y, y', X, I, L et U, mais auxquelles nous attacherons les significations que nous venons de faire connaître. On obtient ainsi :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{S\left[I^2 - y(c+a-y) + y'\left\{y' - f(c+a)\right\}\right] - B\,l^2}{S\left[S\left\{I^2 + y'(y' - fy)\right\} - B\,l^2\right]} \qquad (A)$$

$$\omega = \frac{\mu - V\,S}{S(y - fy')} = \frac{\mu(a+c) - y\,V\,S}{X - B\,l^2} \qquad (B)$$

$$E = \omega\,B\,r' \qquad (C)$$

$$E' = B\,V + \omega\,B\,r \qquad (D)$$

$$Q = \omega\,y'\,S \qquad (E)$$

$$P = \frac{a(\mu - C\,V) - \omega\,C(L + U)}{c' - e'} \qquad (F)$$

$$T = P - \omega\,C(c' - a') \qquad (G)$$

$$T' = \mu - C\left\{V + \omega(c+a)\right\} \qquad (H)$$

Ces équations suffisent à trouver les huit inconnues du problème, savoir,

$$V,\ \omega,\ E,\ E',\ Q,\ P,\ T \text{ et } T',$$

parce que la première est exprimée en fonction des données du problème, et que les autres sont connues au moyen des solutions qui les précèdent.

Mais il est intéressant, au point de vue de l'analyse, de pouvoir calculer directement ces inconnues, par les données constantes du système formé du canon, de l'affût et des roues réunis; de plus, il est utile d'avoir ces inconnues, exprimées en fonction d'une seule, la vitesse V, que l'on peut calculer la première.

Ces considérations nous engagent à ajouter les équations suivantes :

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{c + a - y}{S\left\{I^2 + y'(y' - fy)\right\} - B\,l^2} \qquad (B')$$

$$\frac{E}{\mu} = \frac{B\,r'(c + a - y)}{S\left\{I^2 + y'(y' - fy)\right\} - B\,l^2} \qquad (C')$$

$$\frac{E'}{\mu} = \frac{B\left[S\left\{(I^2+y^2+y'^2)+r(c+a-y)-(c+a)(y+fy')\right\}-Bl^2\right]}{S\left\{I^2+y'(y'-fy)\right\}-Bl^2} \qquad (D')$$

$$\frac{Q}{\mu} = \frac{y'S(c+a-y)}{S\left\{I^2+y'(y'-fy)\right\}-Bl^2} \qquad (E')$$

$$\frac{P}{\mu} = \frac{a}{c'-e'} - \frac{C\left[a\left\{S(I^2+y^2+y'^2)-Bl^2-S(c+a)(y+fy')\right\}+S(L+U)(c+a-y)\right]}{S(c'-e')\left[S\left\{I^2+y'(y'-fy)\right\}-Bl^2\right]} \qquad (F')$$

$$Q = \frac{y'S\left\{\mu(c+a)-yVS\right\}}{X-Bl^2} = \frac{y'\left\{\mu-VS\right\}}{y+fy'} \qquad (E'').$$

Les percussions et les vitesses imprimées étant connues, cherchons les valeurs qu'elles prennent dans différentes hypothèses.

Pour reconnaître l'influence de S dans l'équation (A), divisons les deux termes du 2^d membre par S, et posons ensuite $S=\infty$: il en résulte $V=0$: la vitesse V diminue à mesure que la masse entière S du système augmente.

Le numérateur de la fraction A, a deux termes qui contiennent y, l'un positif a y comme facteur au 2^d degré, l'autre négatif est fonction de y au 1er degré : le dénominateur de cette fraction a un seul terme, contenant y, et il est négatif.

Il s'ensuit que V augmente en même temps que y.

Soit :

$$c+a-y=0$$

ce qui suppose, que le centre de gravité du système entier, se trouve sur l'axe de l'âme : il en résulte les conséquences suivantes :

1° En vertu de l'équation (A)

$$\frac{V}{\mu} = \frac{1}{S}$$

$$V = \frac{\mu}{S}$$

La vitesse du recul est égal au quotient de la quantité de mouvement du canon pendule divisée par la masse entière à mouvoir. C'est la plus grande valeur que V puisse obtenir.

2° En vertu de l'équation (B′)

$$\omega = 0.$$

Ainsi dans le tir parallèle, si la réaction des gaz rencontrait le centre de gravité du système entier sur l'axe de l'âme, l'affût conserverait ses appuis.

3° En vertu de l'équation (C′)

$$E = 0.$$

La percussion verticale sur l'essieu serait nulle.

4° En vertu de l'équation (D) et de la valeur précédente de

$$V = \frac{\mu}{S},$$

$$E' = \frac{B\,\mu}{S}.$$

C'est le choc horizontal le plus violent contre l'essieu.

5° En vertu de l'équation (E′)

$$Q = 0.$$

La percussion sur la crosse serait nulle.

6° En vertu de l'équation (F)

$$P = \frac{a\,\mu\,(S - C)}{S\,(c' - e')}.$$

Cette formule montre de la manière la plus simple l'influence des quantités a, S, C et $c' - e'$ sur la percussion contre la vis de pointage.

7° En vertu de l'équation (G) et de la valeur précédente de P

$$T = \frac{a\,\mu\,(S - C)}{S\,(c' - e')}.$$

La percussion verticale T, suivant l'axe des tourillons, est égale à celle contre la vis de pointage, et dirigée contre les susbandes de bas en haut.

8° En vertu de l'équation (H)

$$T' = \mu - C\,V.$$

La percussion horizontale, suivant l'axe des tourillons, est égale à la réaction μ de la charge, diminuée de la quantité de mouvement de recul C V du canon.

Supposons

$$y = 0,$$

ce qui arriverait si l'affût se mouvait sur un chassis, et avait une partie de sa masse au dessous, de sorte que le centre de gravité du système entier se trouvât sur le plan de ce chassis.

Dans cette hypothèse on trouve :

1° Par l'équation (A)

$$\frac{V}{\mu} = \frac{S\left\{I^2 + y'^2 - fy'(c+a)\right\} - B\,l^2}{S\left\{S(I^2 + y'^2) - B\,l^2\right\}} :$$

C'est la plus petite valeur que V puisse avoir.

2° Par l'équation (B')

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{c+a}{S(I^2 + y'^2) - B\,l^2}.$$

C'est la plus forte valeur que ω puisse avoir.

3° Par l'équation (C')

$$\frac{E}{\mu} = \frac{B\,r'(c+a)}{S(I^2 + y'^2) - B\,l^2}.$$

C'est le choc vertical le plus violent contre l'essieu.

4° Par l'équation (D')

$$\frac{E'}{\mu} = \frac{B\left[S\left\{I^2 + y'^2 + (c+a)(r - fy')\right\} - B\,l^2\right]}{S\left\{S(I^2 + y'^2) - B\,l^2\right\}}.$$

5° Par l'équation (E')

$$\frac{Q}{\mu} = \frac{y' S (c + a)}{S (I^2 + y'^2) - B i^2}$$

6° Par l'équation (F')

$$\frac{P}{\mu} = \frac{a (S - C)}{S (c' - e')} - \frac{C (c + a) (L + U - a f y')}{(c' - e') \left\{ S (I^2 + y'^2) - B i^2 \right\}}$$

etc., etc.

Dans la pratique du tir horizontal, l'ordonnée y est toujours plus grande que zéro et plus petite que $c + a$. Il en résulte que les valeurs que nous venons de donner sont des limites maxima et minima, entre lesquelles se trouvent les valeurs des percussions, qui ont réellement lieu dans le tir horizontal. Ces limites étant connues, l'étude des projets en deviendra plus facile.

ARTICLE IV.

Percussions qui ont lieu, lorsque les roues sont comprimées contre le sol, et que la culasse, n'étant pas en contact avec la vis de pointage, le canon prend un mouvement de rotation autour de l'axe des tourillons.

§ 72. MOUVEMENTS QUI ONT LIEU.

Il peut arriver, au moment où le coup part, que la culasse n'est plus en contact avec la vis de pointage : par exemple, lorsque celle-ci s'est détournée d'elle-même dans l'écrou, par suite de l'usure des filets ; la culasse n'étant plus retenue par la vis de pointage, le canon prend, par l'effet de l'explosion de la charge, un mouvement de rotation autour de l'axe des tourillons, et il en résulte des modifications dans la grandeur des percussions.

Le contact de la culasse avec la vis de pointage peut cesser, lorsque les roues sont comprimées contre le sol, et aussi quand l'affût est soulevé par l'effet du tir, et tourne autour du point d'appui de la crosse comme sur une charnière : de là deux sortes de problèmes. Nous nous occuperons dans cet article du premier d'entr'eux.

Les mouvements qui ont lieu, sont les suivants :

Tout le système se meut parallèlement au sol.

Le canon prend, autour de l'axe des tourillons, une certaine vitesse angulaire initiale, qui produit l'abaissement de la culasse.

La crosse comprimée verticalement, glisse sur le sol en produisant un frottement proportionnel à la percussion verticale.

Les roues comprimées tournent et glissent tout à la fois, parce que, dans les premiers instants du recul, leur vitesse de rotation à la circonférence est moindre que la vitesse de translation de l'affût.

Le frottement de glissement des roues est proportionnel à la percussion verticale avec laquelle elles compriment le sol.

---

§ 75. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU CANON.

Aux notations des précédents articles, nous ajouterons :

ψ vitesse angulaire initiale du canon autour de l'axe des tourillons.

Remplaçons par — T et — T′ la résistance de l'affût sur les tourillons, nous pouvons considérer le canon, comme un corps libre soumis à ces forces et à l'impulsion μ, et établir les conditions de l'équilibre, qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement imprimées.

Celles-ci au nombre de deux sont exprimées par :

C V quantité de mouvement de translation parallèlement au sol.

ψ C $\sqrt{d^2 + d'^2}$ quantité de mouvement de rotation du canon autour de l'axe des tourillons.

Les composantes de cette quantité de mouvement de rotation sont :

ψ C d' composante verticale, agissant de haut en bas.

ψ C d composante horizontale, agissant dans le sens du recul.

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu \sin \theta - T = \psi C d' \quad (1)$$

$$\mu \cos \theta - T' = C V + \psi C d \quad (2)$$

Formons l'équation des moments relativement à l'axe des tourillons, pour lequel les moments des forces T et T′ sont nuls : nous aurons (équation VIII § 7)

$$\mu a = C V d + \psi C (k^2 + d^2 + d'^2) \quad (3)$$

Cette relation nous permet déjà d'exprimer ψ en fonction de V : il vient,

$$\psi = \frac{\mu a = C V d}{(k^2 + d^2 + d'^2)}. \quad (4)$$

---

§ 74. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU SYSTÈME FORMÉ DU CANON EN DE L'AFFUT RÉUNIS.

Remplaçons, par des forces, la résistance du sol sous la crosse et celles des roues sur l'essieu, nous pouvons considérer le canon et l'affût réunis, comme un système libre, soumis à ces forces et à l'impulsion μ, et établir les conditions de l'équilibre, qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement réellement imprimées.

Les composantes des forces qui agissent sur ce système, sont :

Composantes verticales	Composantes horizontales
$\mu \sin \theta$	$\mu \cos \theta$
$- E$	$- E'$
$- Q$	$- f Q$

Les quantités de mouvement imprimées sont :

(A + C) V quantité de mouvement horizontale, imprimée au système formé du canon et de l'affût réunis ; (cette force est appliquée au centre de gravité de ce système, dont l'ordonnée verticale est h).

ψ C d' composante verticale
ψ C d composante horizontale
} de la quantité de mouvement de rotation du canon autour de l'axe des tourillons.

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu \sin\theta - Q - E = \psi\, C\, d' \qquad (5)$$

$$\mu \cos\theta - f\,Q - E' = (A + C)\,V + \psi\, C\, d. \qquad (6)$$

Formons l'équation des moments, relativement au point d'appui de la crosse sur le sol, pour lequel les moments des forces Q et f Q sont nuls; et appelons q le bras de levier de la quantité de mouvement de rotation du canon autour de l'axe des tourillons, pris relativement au point d'appui de la crosse : nous aurons la relation

$$\mu\,\gamma + E\,r' - E'\,r = (A + C)\,V\,h + q\,\psi\,C\sqrt{d^2 + d'^2} \qquad (7)$$

Dans cette équation, l'ordonnée verticale h a pour valeur

$$h = \frac{C\,(c + d) + A\,g}{A + C.}$$

Nous déterminerons le bras de levier q, au moyen de l'équation XV (§ 8),

$$q = \frac{k^2 + x_1^2 + y_1^2 - x\,x_1 - y\,y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}};$$

où les lettres représentent ce qui suit :

$$y = -c$$
$$x = -c'$$
$$y_1 = -d$$
$$x_1 = -d',$$

Il en résulte,

$$q = \frac{k^2 + d^2 + d'^2 + c\,d - c'\,d'}{\sqrt{d^2 + d'^2}.}$$

La substitution des valeurs de h et de q dans l'équation (9) conduit à la formule

$$\mu\gamma + E\,r' - E'\,r = V\left\{C(c+d) + Ag\right\} + \psi\,C\left\{k^2 + d^2 + d'^2 + c\,d - c'\,d'\right\} \qquad (8)$$

§ 75. ON PEUT PARVENIR AUX ÉQUATIONS (5) (6) ET (8) PAR UNE MARCHE DIFFÉRENTE.

Dans la 1re partie de cet ouvrage, et dans les trois premiers articles de cette seconde partie, la position relative de la bouche-à-feu et de l'affût était invariable ; il nous a été loisible de considérer, à volonté, ces deux objets réunis comme ne faisant qu'un seul corps solide, et nous avons établi les conditions de l'équilibre, qui devait exister entre les forces et les résistances auxquelles ce système était soumis, et les quantités de mouvement imprimées.

En considérant le système du canon et de l'affût réunis, au lieu de l'affût seul, nous avons obtenu des équations exemptes des réactions intérieures, T, T′ et P, sur les encastrements des tourillons et sur la vis de pointage et il en est résulté une élimination plus rapide.

Nous nous proposons de démontrer, que l'on arrive aux mêmes résultats, en considérant séparément les quantités de mouvement imprimées au canon et à l'affût. Mais ce procédé est plus lent, parce que les équations, ainsi obtenues, sont compliquées des réactions intérieures T et T′, que nous devons éliminer. On voit à priori, pourquoi on ne comprend pas les réactions intérieures parmi les forces auxquelles le système du canon et de l'affût réunis est soumis : en effet, si la force verticale intérieure + T, par exemple, agit sur l'affût, il en est une autre également verticale et directement opposée — T, qui agit sur le canon ; ces deux forces se détruisent dans les équations relatives à l'équilibre du système binaire, formé du canon et de l'affût, et il n'en reste plus de trace après la réduction des termes : on peut appliquer le même raisonnement à la force T′.

Recherchons les quantités de mouvement imprimées à l'affût seulement.

Les forces qui agissent sur l'affût sont, les percussions des tourillons, la résistance des roues au choc de l'essieu, et celle du sol sur la crosse. En introduisant ces forces dans les calculs, nous pouvons considérer l'affût, comme un corps libre soumis

à leur action, et établir les conditions de l'équilibre, qui doit exister entre ces forces et les quantités de mouvement imprimées.

Les composantes verticales des forces qui agissent sur l'affût sont :

$$+ \mathrm{T}$$
$$- \mathrm{Q}$$
$$- \mathrm{E}.$$

Les composantes horizontales des forces qui agissent sur l'affût sont :

$$+ \mathrm{T}'$$
$$- f\,\mathrm{Q}$$
$$- \mathrm{E}'.$$

La quantité de mouvement, imprimée à l'affût est AV, elle provient de la vitesse horizontale V qui lui est communiquée.

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mathrm{T} - \mathrm{Q} - \mathrm{E} = 0 \qquad (\mathrm{A})$$
$$\mathrm{T}' - f\,\mathrm{Q} - \mathrm{E}' = \mathrm{A}\,\mathrm{V}. \qquad (\mathrm{B})$$

Formons pour 3^{me} équation, celle des moments relativement au point d'appui de la crosse sur le sol : il vient,

$$-\mathrm{T}\,c' + \mathrm{T}'\,c + \mathrm{E}\,r' - \mathrm{E}'\,r = \mathrm{A}\,\mathrm{V}\,g. \qquad (\mathrm{C})$$

Ajoutons membre à membre les équations (1) et (A)

$$\mathrm{T} - \mathrm{Q} - \mathrm{E} = 0$$
$$\mu \sin\theta - \mathrm{T} = \psi\,\mathrm{C}\,d'$$
$$\mu \sin\theta - \mathrm{Q} - \mathrm{E} = \psi\,\mathrm{C}\,d'$$

On trouve pour résultat la formule (5).

Ajoutons membre à membre les équations (B) et (2).

$$\mathrm{T}' - f\,\mathrm{Q} - \mathrm{E}' = \mathrm{A}\,\mathrm{V}$$
$$\mu \cos\theta - \mathrm{T}' = \mathrm{C}\,\mathrm{V} + \Psi\,\mathrm{C}\,d$$
$$\mu \cos\theta - f\,\mathrm{Q} - \mathrm{E}' = (\mathrm{A} + \mathrm{C})\,\mathrm{V} + \Psi\,\mathrm{C}\,d$$

on obtient pour résultat la formule (6).

Eliminons T et T′ de l'équation (C) à l'aide des formules (1) et (2) on a :

$$\mu\Big\{-c'\sin\theta+c\cos\theta\Big\}+\Psi\,C\Big\{c'\,d'-c\,d\Big\}+E\,r'-E\,r'=$$
$$=V\,(C\,c+A\,g)\,;$$

ajoutons l'équation (5)

$$\mu\,a=C\,V\,d+\psi\,C\,(k^2+d^2+d'^2)\,:$$

on a ,

$$\mu\,(a-c'\sin\theta+c\cos\theta)+E\,r'-E'\,r=V\Big\{C\,(c+d)+A\,g\Big\}+$$
$$+\Psi\,C\Big\{k^2+d^2+d'^2-c'\,d'+c\,d\Big\}.$$

Introduisons dans cette formule la valeur connue de γ, donnée par la relation ,

$$\gamma=a+c\cos\theta-c'\sin\theta\,;$$

il en résulte ,

$$\mu\,\gamma+Er'-E'r=V\Big\{C\,(c+d)+Ag\Big\}+\Psi C\Big\{k^2+d^2+d'^2+cd-c'd'\Big\},$$

équation qui est la reproduction exacte de la relation (8).

c. q. f. d.

---

§ 76. MISE EN ÉQUATION DES PERCUSSIONS EXERCÉES SUR LES ROUES.

Les notations sont les mêmes qu'au § 55, et les roues se trouvent dans les mêmes circonstances; il y a donc lieu d'adopter les équations (5), (6), (7) et (8) de ce paragraphe. Nous poserons :

$$E-R=0 \qquad (9)$$
$$E'-f\,R=B\,z+\varphi\,B\,r \qquad (10)$$
$$E'\,r=\varphi\,B\,(z^2+r^2)+B\,r\,z \qquad (11)$$
$$V=\varphi\,r+z. \qquad (12)$$

§ 77. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRÉCÉDENTES.

Nous simplifierons les formules, en employant les abréviations suivantes :

$$S = A + B + C$$

$$y = \frac{C(c+d) + A g + B r}{S}$$

$$L = k^2 + d^2 + d'^2 = k^2 + a^2 + a'^2$$

$$U = c\,d - c'\,d'.$$

On parvient par l'élimination aux formules ci-après :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{L(\cos\theta - f\sin\theta) - a(d - f\,d')}{L\,S - d\,C(d - f\,d')} \tag{13}$$

$$\Psi = \frac{\mu\,a - d\,CV}{C\,L} \tag{14}$$

$$R = E = \frac{y\,V\,S + \Psi\,C(L+U) - \mu\,\gamma}{r' - f\,r} \tag{15}$$

$$E' = B\,V + f\,E \tag{16}$$

$$Q = \mu\sin\theta - E - \Psi\,C\,d' \tag{17}$$

$$\varphi = \frac{f\,r\,E}{B\,l^2} \tag{18}$$

$$S = V - \varphi\,r \tag{19}$$

$$T = \mu\sin\theta - \Psi\,C\,d' \tag{20}$$

$$T' = \mu\cos\theta - C\,V - \Psi\,C\,d \tag{21}$$

§ 78. RÉPERTOIRE DE FORMULES.

Il est utile d'avoir les inconnues, exprimées directement en fonction des données du problème, et de conserver quelques unes des relations, auxquelles on parvient dans le cours de l'élimination.

Nous donnons les formules qui suivent :

$$\frac{\psi}{\mu} = \frac{a\,S - d\,C\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{C\left\{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')\right\}} \tag{22}$$

$$\frac{E}{\mu} = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{S\left[y\,L\,(\cos\theta - f\sin\theta) + a\left\{L + U - y\,(d - f\,d')\right\}\right]}{(r' - f\,r)\left\{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')\right\}} - \\ -\dfrac{d\,C\,(L + U)\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{(r' - f\,r)\left\{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')\right\}} - \dfrac{\gamma}{r' - f\,r} \end{array} \right. \tag{23}$$

$$\frac{E'}{\mu} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{B\left\{L\,(\cos\theta - f\sin\theta) - a\,(d - f\,d')\right\}}{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')} + \\ + f\,S\left[y\,L(\cos\theta - f\sin\theta) + a\left\{L + U - y(d - f\,d')\right\}\right] \\ \hline (r' - f\,r)\left\{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')\right\} \\ -\dfrac{f\,d\,C\,(L + U)\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{(r' - f\,r)\left\{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')\right\}} - \dfrac{\gamma}{r' - f\,r} \end{array} \right. \tag{24}$$

$$\frac{Q}{\mu} = \left\{ \begin{array}{l} \sin\theta - \dfrac{S\left[y\,L\,(\cos\theta - f\sin\theta) + a\left\{L + U - y\,(d - f\,d')\right\}\right]}{(r' - f\,r)\left\{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')\right\}} + \\ + \dfrac{d\,C\,(L + U)\,(\cos\theta - f\sin\theta}{(r' - f\,r)\left\{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')\right\}} + \dfrac{\gamma}{r' - f\,r} - \\ -\dfrac{d'\left\{a\,S - d\,C\,(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}}{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')} \end{array} \right. \tag{25}$$

$$\frac{T}{\mu} = \sin\theta - \frac{d'\left\{ a\,S - d\,C(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}}{L\,S - d\,C(d - f\,d')} \qquad (26)$$

$$\frac{T'}{\mu} = \cos\theta - \frac{a\,d\,S + C\left\{(L - d^2)(\cos\theta - f\sin\theta) - a(d - f\,d')\right\}}{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')} \qquad (27)$$

$$\frac{\varphi}{\mu} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{f\,r\,S\left[y\,L\,(\cos\theta - f\sin\theta) + a\left\{ L + U - y(d - f\,d')\right\}\right]}{B\,l^2\,(r' - f\,r)\left\{ L\,S - d\,C\,(d - f\,a')\right\}} \\ - \dfrac{f\,r\,d\,C\,(L + U)\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{B\,l^2\,(r' - f\,r)\left\{ L\,S - d\,C\,(d - f\,d')\right\}} - \dfrac{f\,r\,\gamma}{B\,l^2\,(r' - f\,r)} \end{array} \right. \qquad (28)$$

$$\varphi = \frac{r\,(E' - B\,V)}{B\,l^2} \qquad (29)$$

etc., etc.

---

§ 79. PERCUSSION EXERCÉE PAR LA CULASSE LORSQU'ELLE RENCONTRE LA VIS DE POINTAGE, LE CANON ÉTANT ANIMÉ DE LA VITESSE ANGULAIRE INITIALE ψ AUTOUR DE L'AXE DES TOURILLONS.

L'intervalle entre la culasse et la vis de pointage étant supposé très-petit, la vitesse initiale de rotation du canon autour de l'axe des tourillons, n'est pas sensiblement modifiée au moment où la pièce vient heurter contre la vis. Nous nous proposons de calculer l'intensité de ce choc.

Le moment du choc du canon contre la vis de pointage est exprimé par (équation VIII, § 7).

$$\psi\,C\,(K^2 + a^2 + a'^2) = \psi\,C\,L \qquad (30)$$

On aura le choc lui-même en divisant ce moment par la

distance $\sqrt{(c+e)^2+(c'-e')^2}$ entre la tête de la vis de pointage et l'axe des tourillons.

La percussion de la culasse contre la vis de pointage a donc pour valeur

$$\frac{\psi\, C\, L}{\sqrt{(c-e)^2+(c'-e')^2}} \qquad (31)$$

Cette force est dirigée perpendiculairement à la droite menée de l'axe des tourillons à la tête de la vis de pointage.

Soit δ l'angle que fait cette droite avec l'horizon, et supposons que la vis de pointage est normale au sol, ce qui revient à admettre $\alpha = 0$.

La direction, de la percussion sur la vis de pointage, fera avec la verticale un angle δ, égal au précédent. Nous avons vu (§ 45) que l'on a

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{c-e}{c'-e'} \qquad (32)$$

d'où

$$\sin\delta = \frac{c-e}{\sqrt{(c-e)^2+(c'-e')^2}} \qquad (33)$$

$$\cos\delta = \frac{c'-e'}{\sqrt{(c-e)^2+(c'-e')^2}} \qquad (34)$$

Nommons R la résistance de la vis de pointage : la composante de cette résistance suivant la direction du choc de la culasse, a pour expression $R\cos\delta$. Cette composante devant faire équilibre à ce choc, on a l'égalité :

$$R\cos\delta = \frac{\psi\, C\, L}{\sqrt{(c-e)^2+(c'-e')^2}}$$

et en vertu de la relation (34)

$$R = \frac{\psi\, C\, L}{c'-e'} \qquad (35)$$

Substituant à ψ sa valeur (équation 22) il vient

$$\frac{R}{\mu} = \frac{L\ \{aS - dC(\cos\theta - f\sin\theta)\}}{(c'-e')\{LS - dC(d-fd')\}} \qquad (36)$$

L'équation (36), exprime la résistance R dont la vis de pointage doit être capable pour supporter le choc de la culasse. Il est intéressant de comparer cette force à la percussion P, qu'éprouve cette vis lorsqu'elle est en contact avec la pièce au moment où le coup part, ce qui empêche la bouche-à-feu de tourner sur l'axe des tourillons.

Pour établir cette comparaison, prenons la valeur de P (équation 26 du § 38) après avoir fait $\alpha = 0$, afin que la vis soit verticale, comme on l'a supposé dans le calcul de la valeur de R. On a

$$\frac{P}{\mu} = \frac{aS - dC(\cos\theta - f\sin\theta)}{S(c' - e')}$$

Il en résulte pour le rapport de R à P :

$$\frac{R}{P} = \frac{LS}{LS - dC(d - fd')} \qquad (37)$$

Le rapport $\frac{R}{P}$ est plus grand que l'unité, tant que d est positive : il est plus petit que l'unité lorsque d est négative. En d'autres termes, le choc R est supérieur à P, lorsque le centre de gravité du canon, est au-dessus du plan horizontal passant par l'axe des tourillons ; et ce rapport est inverse, quand le centre de gravité du canon est à un niveau inférieur à l'axe des tourillons, parce que d changeant de signe, le dénominateur de l'équation (37) devient

$$LS + dC(d - fd').$$

Le rapport $\frac{R}{P}$ serait égal à l'unité, si l'on avait $d = 0$, ou si le centre de gravité du canon était au même niveau que l'axe des tourillons. Dans ce cas le choc de la culasse aurait lieu perpendiculairement à l'axe de la vis de pointage.

Le tir devant s'effectuer, sous différents angles, il est important que le choc R ne puisse jamais être plus grand que P ; à cet effet, il faut :

1° Que la vis de pointage et son écrou soient en bon état, afin que la vis ne puisse se détourner d'elle même après le pointage effectué.

2° Que la prépondérance de la culasse sur la volée soit assez forte pour faire appuyer constamment la culasse sur la vis de pointage.

On déduit de la relation (37) que le rapport $\frac{R}{P}$ augmente avec la masse C du canon, lorsque d est positive. Nous avons vu, dans les articles précédents, relatifs au cas où la culasse est en contact avec la vis de pointage, que l'on ménageait cette vis, par l'emploi de bouches-à-feu massives, et nous voyons au contraire que ces fortes masses peuvent occasionner des chocs plus violents lorsque ce contact n'a pas lieu au moment du tir.

Reprenons l'équation (22)

$$\frac{\psi}{\mu} = \frac{a\,S - d\,C\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{C\left\{L\,S - d\,C\,(d - f\,d')\right\}}$$

Soit $\frac{1}{n}$ le rapport de la masse C du canon à la masse totale S, en sorte que l'on ait :

$$\frac{C}{S} = \frac{1}{n}$$

d'où

$$C = \frac{S}{n}$$

et exprimons C dans l'équation précédente en fonction de S, il vient :

$$\frac{\psi}{\mu} = \frac{n\left\{n\,a - d\,(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}}{S\left\{n\,L - d\,(d - f\,d')\right\}}$$

Nous voyons que ψ augmente en même temps que n. Ainsi, pour une masse donnée S du système, la vitesse de rotation du canon sera d'autant plus grande que la bouche-à-feu possédera moins de masse.

Le rapport $\frac{1}{n}$ ne variant pas, la vitesse ψ sera d'autant plus faible que la masse entière S sera plus considérable. Il en résulte que, toutes choses égales d'ailleurs, la vitesse angulaire ψ sera moins forte, à calibre égal, pour les canons de siége que pour ceux de campagne.

La vitesse ψ diminue à mesure que L augmente, ou que le moment d'inertie du canon croît. A masse et charge égales, la vitesse angulaire ψ est moins prononcée pour les canons longs que pour les canons courts.

La vitesse ψ croît en même temps que l'abaissement a de l'axe des tourillons devient plus considérable; plus cet abaissement est grand, plus rapide est la vitesse de rotation du canon, si la culasse n'est pas en contact avec la vis de pointage au moment du tir, et plus violente sera la percussion lorsque la culasse rencontrera la vis.

Supposons $\theta = 0$ dans l'équation (22), la valeur de l'ordonnée verticale d est dans ce cas $d = a$, d'où

$$\frac{\psi}{\mu} = \frac{a(S - C)}{C\left\{L S - C a(a - f d')\right\}}$$

Le facteur $S - C$ étant essentiellement positif, il s'ensuit que, dans le tir horizontal, la culasse s'abaisse vers la vis de pointage : mais l'affût étant toujours soulevé dans ce tir, de même que pour les angles θ inclinés sous l'horizon, cette hypothèse rentre dans un autre problème que nous traiterons à l'article suivant.

Lorsque le système est dans des conditions telles que la vitesse angulaire ψ est nulle, ou que

$$\frac{\psi}{\mu} = \frac{a S - d C(\cos\theta - f\sin\theta)}{C\left\{L S - d C(d - f d')\right\}} = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$a S - d C(\cos\theta - f\sin\theta) = 0 \qquad (38)$$

la pièce ne tournera pas sur ses tourillons et conservera sa position relative avec l'affût, quoiqu'il n'y ait pas contact entre la culasse et la vis de pointage.

L'équation de condition (38) étant satisfaite, il est évident que les circonstances du mouvement de recul, ne seraient pas changées, si, au moment du tir, la culasse était en contact avec la vis de pointage, et que la percussion sur cette vis serait nulle ainsi que la vitesse ψ. Il s'ensuit que l'équation qui exprime que la percussion P sur la vis de pointage est nulle, doit être la même que la formule (38) qui indique que le canon

ne tourne pas sur l'axe des tourillons, bien qu'au moment du tir la pièce ne reposait pas sur la vis de pointage.

Effectivement, si l'on pose $P = 0$, dans l'équation (26) du § 38, on a la même équation que ci-dessus :

$$a\,S - d\,C\,(\cos\theta - f\sin\theta) = 0.$$

Cette identité entre les équations de conditions qui expriment à la fois

$$P = 0 \qquad \text{et} \quad \psi = 0,$$

montre que la formule (38) est la traduction analytique de la similitude qui existe entre les deux problèmes traités aux articles I et IV de cette seconde partie, pour les hypothèses particulières que nous avons faites.

Cherchons ce que devient la valeur de ψ, lorsque l'abaissement a de l'axe des tourillons est nul, et remarquons que l'on a en même temps, (équation XVI, § 9)

$$a = 0 \qquad d = -a'\sin\theta.$$

L'équation (22) devient par ces valeurs

$$\frac{\psi}{\mu} = \frac{a'\,C\sin\theta\,(\cos\theta - f\sin\theta)}{C\left\{L\,S - a'\,C\sin\theta(a'\sin\theta + f\,a')\right\}}$$

cette valeur sera généralement positive, et la pièce tournera par l'abaissement de la culasse, même si l'axe des tourillons coupe celui de l'âme.

La pièce saignerait du nez si la valeur de ψ était négative, ce qui exigerait (équation 22)

$$a\,S - d\,C\,(\cos\theta - f\sin\theta) < 0.$$

Lorsque cette inégalité existe la volée s'abaisse, que la pièce soit ou non en contact avec la vis de pointage, parce que celle-ci ne peut s'opposer au soulèvement de la culasse.

Mais cette inégalité ne peut être satisfaite pour aucune valeur positive de θ, parce que l'on a

$$S > C \qquad \text{et} \quad a > d.$$

Ainsi, la pièce ne peut saigner du nez, lorsque l'affût conserve ses appuis sur le sol.

ARTICLE V.

Percussions qui ont lieu lorsque les roues se détachent du sol, que l'affût soulevé tourne sur sa crosse comme sur une charnière, et que la culasse n'est pas en contact avec la vis de pointage.

§ 80. MOUVEMENTS QUI ONT LIEU.

L'affût soulevé par l'effet du tir tourne autour du point d'appui de la crosse sur le sol.

La crosse glisse sur le sol, et le système entier du canon, de l'affût et des roues, prend un mouvement de translation parallèlement au terrain.

Le canon est soulevé avec l'affût, et participe à son mouvement de rotation autour du point d'appui de la crosse sur le sol, tout en partageant le mouvement de translation de tout le système parallèlement au terrain.

La bouche-à-feu possède en outre un mouvement particulier de rotation autour de l'axe des tourillons : et puisque la culasse n'est pas en contact avec la vis de pointage, cette rotation peut se faire dans les deux sens opposés, c'est-à-dire, que la culasse peut se rapprocher de la vis de pointage tout comme elle pourrait s'en écarter.

Le choc de l'essieu soulève les roues, et leur communique le mouvement de translation de tout le système parallèlement au terrain, sans que ce soulèvement et cette translation modifient en rien le parallélisme des roues avec leur position première.

Conservons les notations précédentes :

La pièce est animée d'un double mouvement de rotation : par l'un elle participe à la vitesse angulaire ω de l'affût autour de la crosse, et par l'autre elle possède une vitesse particulière de rotation autour de l'axe des tourillons que nous nommerons ψ'.

La vitesse absolue de rotation du canon représentée par ψ est

la somme algébrique de ces deux vitesses angulaires, qui peuvent avoir pour effet d'augmenter l'inclinaison de l'axe de l'âme avec l'horizon ou de la diminuer, selon que ces vitesses agiront dans le même sens ou en sens contraires.

Pour fixer les idées, nous supposerons que la vitesse ψ a lieu dans le même sens que la vitesse ω ; c'est-à-dire que la culasse se rapproche de la vis de pointage, en sorte que l'on a

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \psi' + \omega \\ \text{d'où} \qquad \psi' &= \psi - \omega \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Lorsque nous trouverons, d'après les données du problème, que ψ est plus grande que ω, nous en conclurons que la vitesse ψ' tend à augmenter l'élévation de l'âme au dessus de l'horizon, et que la culasse se rapproche de la vis de pointage pendant le soulèvement de l'affût.

Mais s'il résulte, des valeurs obtenues, que ψ' est égale à ω, on en déduira que ψ' est nulle, et que le canon conserve sa position relative avec l'affût : en sorte que, si même la culasse était en contact avec la vis de pointage, la percussion P sur la tête de la vis serait nulle, et le problème rentrerait dans le cas traité à l'article III de cette deuxième partie. Il est évident lorsque cette circonstance aura lieu, que l'équation $\psi - \omega = 0$, exprimée en fonction des données du problème actuel, devra fournir la même équation de condition que celle qui donnera

$$P = 0$$

dans le problème, où l'affût étant soulevé la culasse reste en contact avec la vis de pointage : c'est ce que nous vérifierons dans la suite.

Enfin, si l'on trouve que ψ' est plus petite que ω, cela indique que la vitesse ψ' éloigne la culasse de la vis de pointage, et qu'elle se produit en sens contraire à celui de ω.

Nous supposons ψ' positive, lorsque cette vitesse rapproche la culasse de la vis de pointage : et ψ' est négative dans le cas contraire.

Lorsque les conditions voulues, pour que ψ' soit négative, seront remplies, il est évident que les percussions produites ne seront pas changées, si au moment du tir, la pièce est en

contact avec la vis de pointage, parce que celle-ci ne peut s'opposer au relèvement de la culasse.

---

§ 81. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU CANON.

Remplaçons, par des forces, la résistance que l'affût oppose aux encastrements des tourillons, nous pourrons considérer le canon comme, un corps libre soumis à ces forces et à l'impulsion μ, et établir les conditions de l'équilibre, qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement imprimées.

Les forces qui agissent sur le canon ont pour composantes

verticales	horizontales
T	$-$ T′
$\mu \sin \theta$	$\mu \cos \theta$

Il y a trois sortes de quantités de mouvement, imprimées au canon, provenant :

1° De la vitesse horizontale V de tout le système,

2° De la vitesse angulaire ω autour du point d'appui de la crosse sur le sol,

3° De la vitesse angulaire ψ' autour de l'axe des tourillons.

Ces quantités de mouvement sont exprimées ainsi qu'il suit :

V C quantité de mouvement horizontale, due à la vitesse V.

ω C $\sqrt{(c+d)^2+(c'-d')^2}$ quantité de mouvement de rotation du canon autour du point d'appui de la crosse sur le sol (§ 60).

ψ' C $\sqrt{d^2+d'^2}$ quantité de mouvement de rotation du canon autour de l'axe des tourillons (§ 75).

Ces forces ont pour composantes :

verticales	horizontales	
	V C	
$-\omega$ C $(c'-d')$	ω C $(c+d)$	(§ 60)
ψ' C d'	ψ' C d	(§ 75)

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu \sin \theta + T = \psi' C d' - \omega C (c' - d') \quad (2)$$

$$\mu \cos \theta - T' = V C + \omega C (c + d) + \psi' C d \quad (3)$$

Substituons à ψ' sa valeur équation (1), il vient

$$\mu \sin \theta + T = \psi C d' - \omega C c' \quad (4)$$

$$\mu \cos \theta - T' = V C + \omega C c + \psi' C d \quad (5)$$

Formons l'équation des moments relativement à l'axe des tourillons, pour lequel les moments des forces T et T′ sont nuls.

Le moment de la force μ est μa.

Le moment de la quantité de mouvement horizontale de translation V C est V C d.

Le moment de la quantité de mouvement de rotation du canon autour de l'axe des tourillons est $\psi' C (k^2 + d^2 + d'^2)$

Le moment de la quantité de mouvement de rotation du canon autour de la crosse, pris relativement à l'axe des tourillons, est, en nommant q le bras de levier de cette force,

$$q \omega C \sqrt{(c + d)^2 + (c' - d')^2}.$$

On a donc pour l'équation des moments :

$$\mu a = C V d + \psi' C (k^2 + d^2 + d'^2) + q \omega C \sqrt{(c + d)^2 + (c' - d')^2} \quad (6$$

Nous déterminerons q au moyen de la formule XV § 8

$$q = \frac{k^2 + x_1^2 + y_1^2 - x' x_1 - y y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

dans laquelle les lettres ont les valeurs suivantes :

$$y_1 = c + d$$
$$x_1 = c' - d'$$
$$y = c$$
$$x = c'$$

La valeur de q devient :

$$q = \frac{k^2 + (c + d)^2 + (c' - d')^2 - c' (c' - d') - c (c + d)}{\sqrt{(c + d)^2 + (c' - d')^2}}.$$

Substituant cette valeur de q et celle de ψ' (éq. 1) dans l'équation (6) elle devient

$$\mu a = \mathrm{C\,V}\,d + (\psi - \omega)\mathrm{C}(k^2 + d^2 + d'^2) + \omega\,\mathrm{C}\Big\{k^2 + (c+d)_2 + (c'-d')^2 - c(c+d) - c'(c'-d')\Big\} \tag{7}$$

faisant les réductions on a

$$\mu\,a = \mathbb{C}\,\mathrm{V}\,d + \psi\,\mathrm{C}\,(k^2 + d^2 + d'^2) + \omega\,\mathrm{C}\,(c\,d - c'\,d'). \tag{8}$$

---

§ 82. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU SYSTÈME FORMÉ DU CANON ET DE L'AFFUT RÉUNIS.

En remplaçant par des forces, l'impulsion μ et la résistance que les roues et le sol opposent respectivement à l'essieu et au point d'appui de la crosse, nous pouvons considérer le canon et l'affût, comme un système libre de deux corps solides soumis à ces forces, et établir les conditions de l'équilibre, qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement réellement imprimées.

Les forces qui agissent sur le système du canon et de l'affût réunis ont pour composantes :

verticales	horizontales
$\mu \sin\theta$	$\mu \cos\theta$
$-\mathrm{Q}$	$-f\,\mathrm{Q}$
$+\mathrm{E}$	$-\mathrm{E}'$

Les quantités de mouvement, imprimées au système formé du canon et de l'affût réunis, se composent de celles communiquées séparément à chacune de ces parties.

Les composantes des quantités de mouvement imprimées au canon ont été indiquées au § 81, savoir :

Composantes verticales	Composantes horizontales
$-\omega\,\mathrm{C}\,(c' - d')$	$\mathrm{V\,C}$
$\psi'\,\mathrm{C}\,d'$	$\omega\,\mathrm{C}\,(c + d)$
	$\psi'\,\mathrm{C}\,d$

Les quantités de mouvement, transmises à l'affût, résultent de la vitesse de translation horizontale V, de tout le système, et de la vitesse de rotation ω autour du point d'appui de la crosse sur le sol.

La vitesse V de l'affût engendre la force horizontale A V.

La vitesse ω, produit la quantité de mouvement de rotation de l'affût ω A $\sqrt{g^2 + g'^2}$, dont les composantes verticale et horizontale sont respectivement, $-\omega$ A g' et ω A g (équation XI § 7).

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu \sin\theta - Q + E = \psi' C d' - \omega C (c' - d') - \omega A g' \quad (9)$$

$$\mu \cos\theta - fQ - E' = V (C + A) + \psi' C d + \omega \left\{ C (c + d) + A g \right\} \quad (10)$$

Substituant à ψ' sa valeur $\psi - \omega$ équation (1) il vient toute réduction faite :

$$\mu \sin\theta - Q + E = \psi C d' - \omega (C c' + A g') \quad (11)$$

$$\mu \cos\theta - f Q - E' = V (C + A) + \psi C d + \omega (C c + A g) \quad (12)$$

Formons l'équation des moments, relativement au point d'appui de la crosse sur le sol, pour lequel les moments des forces Q et f Q sont nuls.

Les moments des forces qui agissent sur le système du canon et de l'affût réunis sont :

$\mu\ \gamma$
$-$ E r'
$-$ E' r

Les moments des quantités de mouvement imprimées au canon sont :

C V $(c + d)$ moment de la quantité de mouvement de translation,

ω C $\left\{ k^2 + (c + d)^2 + (c' - d')^2 \right\}$ moment de la quantité de mouvement de rotation autour du point d'appui de la crosse,

$q\,\psi'\,C\sqrt{d^2+d'^2}$ moment de la quantité de mouvement de rotation autour de l'axe des tourillons pris relativement au point d'appui de la crosse : q étant le bras de levier de la force $\psi'\,C\sqrt{d^2+d'^2}$.

Les moments des quantités de mouvement imprimées à l'affût sont :

$V\,A\,g$ moment de la quantité de mouvement de translation,

$\omega\,A\,(k'^2+g^2+g'^2)$ moment de la quantité de mouvement de rotation autour du point d'appui de la crosse.

Égalant la somme des moments des forces à la somme des moments des quantités de mouvement imprimées on a

$$\mu\gamma - Er' - E'r = V\left\{C\,(c+d)+A\,g\right\}+\omega\,C\left\{k^2+(c+d)^2+(c'-d')^2\right\}+$$

$$+q\,\psi'\,C\sqrt{d^2+d'^2}+\omega\,A\,(k'^2+g^2+g'^2) \qquad (15)$$

Pour déterminer le bras de levier q nous savons (équation XV § 8) que l'on a généralement

$$q=\frac{k^2+x_1^2+y_1^2-x\,x_1-y\,y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

Dans cette formule les lettres ont les significations suivantes

$y=-c$

$x=c'$

$y_1=d$

$x_1=d'$

Il en résulte

$$q=\frac{k^2+d^2+d'^2+c\,d-c'\,d'}{\sqrt{d^2+d'^2}}.$$

Substituant cette valeur de q dans l'équation précédente, ainsi que celle de $\psi' = \psi - \omega$ il vient

$$\mu\gamma - \mathrm{E}r' - \mathrm{E}'r = \mathrm{V}\left\{\mathrm{C}(c+d) + \mathrm{A}\,g\right\} + \omega\,\mathrm{C}\left\{k^2 + (c+d)^2 + (c'-d')^2\right\} +$$

$$+ (\psi - \omega)\,\mathrm{C}\left\{k^2 + d^2 + d'^2 + c\,d - c'\,d'\right\} + \omega\,\mathrm{A}\,(k'^2 + g^2 + g'^2) \quad (14)$$

Réduisant on obtient

$$n\gamma - \mathrm{E}r' - \mathrm{E}'r = \mathrm{V}\left\{\mathrm{C}\,(c+d) + \mathrm{A}\,g\right\} + \psi\,\mathrm{C}\left\{k^2 + d^2 + d'^2 + c\,d - c'd'\right\} +$$

$$+ \omega\,\mathrm{C}\left\{c^2 + c'^2 + c\,d - c'\,d'\right\} + \omega\,\mathrm{A}\left\{k'^2 + g^2 + g'^2\right\}$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$\mu\gamma - \mathrm{E}r' - \mathrm{E}'r = \mathrm{V}\left\{\mathrm{C}(c+d) + \mathrm{A}g\right\} + \psi\mathrm{C}\left\{k^2 + d^2 + d'^2 + cd - c'\,d'\right\}$$

$$+ \omega\,\mathrm{C}\left\{c(c+d) + c'\,(c'-d')\right\} + \omega\,\mathrm{A}\left\{k'^2 + g^2 + g'^2\right\} \quad (15)$$

---

§ 83. MISE EN ÉQUATION DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AUX ROUES.

Les roues sont soulevées par le choc de l'essieu, et participent en même temps au mouvement de translation horizontale de tout le système, tout en restant parallèles à elles-mêmes.

Il y a lieu de faire ici les mêmes raisonnements qu'au § 58, relatif au mouvement des roues quand l'affût est soulevé.

Les roues, possédant la vitesse de translation V de tout le système, sont animées de la quantité de mouvement horizontal B V.

Le choc de l'essieu soulève les roues, et leur imprime une vitesse $\omega\sqrt{r^2+r'^2}$ tangentielle à l'arc de cercle que l'essieu décrit autour du point d'appui de la crosse sur le sol, en vertu de la vitesse angulaire ω de l'affût.

Cette vitesse $\omega\sqrt{r^2+r'^2}$ imprime aux roues une quantité de mouvement $\omega B\sqrt{r^2+r'^2}$, dirigée perpendiculairement à la droite menée de l'axe de l'essieu au point d'appui de la crosse.

Cette droite fait avec l'horizon un angle δ qui a pour tangente

$$tg\,\delta = \frac{r}{r'}$$

d'où

$$\sin\delta = \frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}$$

$$\cos\delta = \frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}$$

La direction de la vitesse $\omega\sqrt{r^2+r'^2}$ fait avec la verticale le même angle δ, que fait avec l'horizon la droite menée de l'axe de l'essieu au point d'appui de la crosse. Il s'ensuit que la force $\omega B\sqrt{r^2+r'^2}$ a pour composantes

verticale	horizontale
$-\omega B\sqrt{r^2+r'^2}\cos\delta$	$\omega B\sqrt{r^2+r'^2}\sin\delta$
Cette force est négative parce qu'elle agit de bas en haut.	Cette force est positive parce qu'elle agit dans le sens du recul.

et à cause des valeurs de $\cos\delta$ et de $\sin\delta$ ces composantes deviennent

composante verticale	composante horizontale
$-\omega\,\mathrm{B}\,r'$	$\omega\,\mathrm{B}\,r$

D'ailleurs les forces dirigées suivant l'axe des roues sont $-\mathrm{E}$ et $+\mathrm{E}'$.

Les équations de l'équilibre entre les forces qui agissent sur les roues et les quantités de mouvement imprimées sont :

$$-\mathrm{E} = -\omega\,\mathrm{B}\,r' \qquad (16)$$

$$\mathrm{E}' = \mathrm{B\,V} + \omega\,\mathrm{B}\,r \qquad (17)$$

Il n'y a pas d'équation des moments parce que toutes les forces concourent sur l'axe de l'essieu.

---

§ 84. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRÉCÉDENTES.

Nous emploierons les abréviations suivantes pour simplifier les formules.

$$\mathrm{S} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C},$$
$$\mathrm{S}y = \mathrm{C}(c+d) + \mathrm{A}\,g + \mathrm{B}\,r$$
$$\mathrm{S}y' = \mathrm{C}(c'-d') + \mathrm{A}\,g' + \mathrm{B}\,r'$$
$$\mathrm{L} = \mathrm{K}^2 + d^2 + d'^2 = \mathrm{K}^2 + a^2 + a'^2$$
$$\mathrm{U} = c\,d - c'\,d'$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{C}\left\{\mathrm{K}^2 + (c+d)^2 + (c'-d')^2\right\} + \mathrm{A}(\mathrm{K}'^2 + g^2 + g'^2) + \mathrm{B}(\ell^2 + r^2 + r'^2) \qquad (18).$$

Cette valeur de X est, ainsi que nous l'avons indiqué au § (59), le moment d'inertie du système entier, formé du canon, de l'affût et des roues, relativement à une droite passant par le point d'appui de la crosse sur le sol et parallèle à l'axe des tourillons.

L'élimination conduit aux solutions suivantes :

$$\frac{V}{\mu} = \frac{S(y+fy')\left\{a(L+U)-\gamma L\right\}-C(L+U)\left\{(L+U)(\cos\theta-f\sin\theta)-\gamma(d-fd')\right\}+(X-Bb^2)\left\{L(\cos\theta-f\sin\theta)-a(d-fd')\right\}}{S\left[C(L+U)\left\{y(d-fd')+d(y+fy')-(L+U)\right\}+L\left\{X-Bb^2-yS(y+fy')\right\}\right]-dC(X-Bb^2)(d-fd')} \qquad (19$$

$$\omega = \frac{\mu\left\{\gamma L-a(L+U)\right\}-V\left\{yLS-dC(L+U)\right\}}{L(X-Bb^2)-C(L+U)^2} \qquad (20)$$

$$\psi = \frac{\mu\ a-d\,C\,V-\omega\,C\,U}{C\,L} \qquad (21)$$

$$\psi' = \psi-\omega = \frac{\mu\,a-d\,C\,V-\omega\,C\,(L+U)}{C\,L} \qquad (22)$$

$$E = \omega\,B\,r' \qquad (23)$$

$$E' = B(V+r\,\omega) \qquad (24)$$

$$Q = \mu\sin\theta+\omega\left\{S\,y'+C\,d'\right\}-\psi\,C\,d' \qquad (25)$$

$$T = \psi\,C\,d'-\mu\sin\theta-\omega\,C\,c' \qquad (26)$$

$$T' = \mu\cos\theta-C(V+\omega\,c+\psi\,d) \qquad (27)$$

$$\frac{\omega}{\mu} = \frac{S\left[L\left\{\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta)\right\} - a\left\{L+U-y(d-fd')\right\}\right] - dC\left[\gamma(d-fd') - (L+U)(\cos\theta - f\sin\theta)\right]}{S\left[C(L+U)\left\{y(d-fd') + d(y+fy') - (L+U)\right\} + L\left\{X - Bl^2 - yS(y+fy')\right\}\right] - dC(d-fd')(X-Bl^2)} \quad (28)$$

$$\frac{\psi}{\mu} = \frac{S\left[a\left\{X-Bl^2-C(L+U)\right\} + ay\left\{C(d-fd') - S(y+fy')\right\} + \gamma dC(y+fy') - CU\left\{\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}\right] - dC\left[\left\{X-Bl^2-C(L+U)\right\}(\cos\theta - f\sin\theta) + \gamma C(d-fd')\right]}{CS\left[C(L+U)\left\{y(d-fd') + d(y+fy') - (L+U)\right\} + L\left\{(X-Bl^2) - yS(y+fy')\right\}\right] - dC^2(d-fd')(X-Bl^2)} \quad (29)$$

$$\omega = \frac{\mu\left\{L(\cos\theta - f\sin\theta) - a(d-fd')\right\} - V\left\{LS - dC(d-fd')\right\}}{LS(y+fy') - C(d-fd')(L+U)} \quad (30)$$

$$\psi = \frac{\mu\left[C\left\{\gamma U + a(L+U)\right\} - a\left\{X - Bl^2\right\}\right] - CV\left[yUS - d\left\{X - Bl^2 - C(L+U)\right\}\right]}{C\left\{C(L+U)^2 - L(X-Bl^2)\right\}} \quad (31)$$

$$\psi = \frac{\mu\left[a\left\{S(y+fy') - C(d-fd')\right\} - CU(\cos\theta - f\sin\theta)\right] - CV\left[d\left\{S(y+fy') - C(d-fd')\right\} - SU\right]}{C\left[LS(y+fy') - C(d-fd')(L+U)\right]} \quad (32)$$

§ 86. OBSERVATIONS SUR LES FORMULES PRÉCÉDENTES.

On déduit de l'équation (21)

$$\psi = \frac{\mu a - d\,C\,V - \omega\,C\,U}{C\,L}$$

les relations réciproques,

$$V = \frac{\mu a - \psi\,C\,L - \omega\,C\,U}{d\,C}$$

$$\omega = \frac{\mu a - d\,C\,V - \psi\,C\,L}{C\,U}$$

Ces formules montrent que les vitesses ψ, V et ω croissent en même temps que l'abaissement a de l'axe des tourillons. Elles font voir :

1° Que chacune de ces vitesses diminue lorsque les autres augmentent.

2° Que ces vitesses sont moindres lorsque la masse C du canon est plus considérable.

3° Que la vitesse ψ est plus faible quand d et U ont des valeurs plus grandes.

4° Que la vitesse du recul V est ralentie, lors de l'accroissement du facteur L, par lequel il faut multiplier C pour avoir le moment d'inertie du canon relativement à l'axe des tourillons.

5° Que la vitesse ω décroit quand d et L augmentent.

La rotation du canon autour des tourillons, (s'il n'y a pas de contact avec la vis de pointage) est plus rapide pour les canons de campagne que pour ceux de siége : parce que les premiers sont plus légers et ont un moment d'inertie moins considérable.

L'ordonnée d, du centre de gravité de la pièce, est située au dessus du plan horizontal, passant par l'axe des tourillons, si

d est positive ; et se trouve au dessous de ce plan lorsque d est négative.

Dans ce dernier cas le terme $-d\,C\,V$ (équation 21) change de signe et devient positif.

Il en résulte que la vitesse ψ est d'autant plus forte que la culasse est plus abaissée au moment du tir, ou que l'angle du tir est plus élevé.

Si la vis de pointage ne touche pas la culasse au moment où le coup part, le choc contre la tête de la vis, lorsqu'elle vient à être rencontrée par la pièce dans son mouvement de rotation autour des tourillons, est d'autant plus violent que la culasse était plus abaissée ou que l'angle du tir était plus élevé.

Prenons l'équation (22)

$$\psi' = \psi - \omega = \frac{\mu a - d\,C\,V - \omega\,C\,(L+U)}{C\,L}$$

Nous voyons que ψ' diminue dans les mêmes conditions que ψ, et en outre par l'accroissement du terme $\omega\,C\,L$.

Si les données du problème rendaient la vitesse ψ' nulle, ou si l'on avait

$$\mu a - d\,C\,V - \omega\,C\,(L+U) = 0 \qquad (53)$$

la pièce conserverait sa position relative avec l'affût, et tournerait avec lui autour du point d'appui de la crosse avec la même vitesse angulaire .

Il est évident que cet état de chose, ne changerait pas si, au moment du tir, la culasse était en contact avec la vis de pointage, parce que la rotation ψ' du canon n'existant pas, la vis ne pourrait être comprimée.

L'hypothèse $\psi' = 0$, doit donc fournir la même équation de condition que la supposition $P = 0$, dans le problème traité à l'article III de cette seconde partie.

Effectivement faisant $P = 0$ dans l'équation (26) du § 61, on a

$$\mu a - d\,C\,V - \omega\,C\,(L+U) = 0.$$

équation identique avec celle exprimant la condition $\psi' = 0$.

Lorsque ψ' sera positive on aura l'inégalité :

$$\mu a - d\,C\,V - \omega\,C\,(L+U) > 0 :$$

la culasse se rapprochera de la vis de pointage, si elle en est écartée au moment où le coup part, ou bien elle percutera cette vis si le contact a lieu entre elle et la pièce.

Si ψ' était négative on aurait l'inégalité

$$\mu a - d\,\mathrm{C}\,\mathrm{V} - \omega\,\mathrm{C}\,(\mathrm{L}+\mathrm{U}) < 0\,,$$

la culasse s'écarterait de la vis de pointage, et la pièce saignerait du nez.

Les équations

$$\mathrm{E} = \omega\,\mathrm{B}\,r' \qquad (23)$$

$$\mathrm{E}' = \mathrm{B}\,(\mathrm{V} + r\,\omega) \qquad (24)$$

sont les mêmes que celles (11) et (12) du § 59, de l'article III. Tout ce que nous en avons dit est applicable ici. De plus nous ferons remarquer que les percussions E et E′ sont les mêmes quelles que soient les valeurs de ψ', pourvu que les quantités B, ω, V, r et r' ne changent pas.

L'équation (25) peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{Q} = \mu \sin\theta + \omega\,\mathrm{S}\,y' - \mathrm{C}\,d'\,(\psi - \omega).$$

Remarquons que le facteur $\psi - \omega$, du dernier terme, indique la vitesse angulaire du canon, relative à sa position avec l'affût; c'est-à-dire que $\psi - \omega$ est la vitesse de rotation avec laquelle la culasse se rapproche ou s'écarte de la vis de pointage. On en conclut que la percussion verticale Q sur la crosse, est égale à la composante verticale $\mu \sin\theta$ de la réaction de la charge, augmentée de la composante verticale $\omega\,\mathrm{S}\,y'$ de la quantité de mouvement de rotation du système entier autour du point d'appui de la crosse, et diminuée de la composante verticale $\mathrm{C}\,d'\,(\psi - \omega)$ de la quantité de mouvement de rotation relative du canon autour de l'axe des tourillons.

Il résulte de cette formule, que la percussion sur la crosse est diminuée, lorsque la pièce tourne sur les tourillons par l'abaissement de la culasse; et qu'au contraire cette percussion devient plus forte, quand la bouche-à-feu saigne du nez, parce que $\psi - \omega$ change alors de signe, et que le terme $-\mathrm{C}\,d'\,(\psi - \omega)$ devient positif.

La percussion verticale T sur les encastrements des tourillons est exprimée par l'équation (26)

$$T = \psi C d' - \mu \sin \theta - \omega C c'.$$

Elle fait voir que la quantité de mouvement $\psi C d'$, résultant de la vitesse ψ, influe sur la percussion T, dans un sens opposé aux forces $\mu \sin \theta$ et $\omega C c'$ qui proviennent de l'impulsion μ et de la rotation ω.

Si l'on avait

$$\psi C d' - \mu \sin \theta - \omega C c' = 0,$$

la percussion T serait nulle ; la pièce reculerait et tournerait en même temps, et les tourillons ne produiraient aucun choc vertical sur leurs encastrements ; le soulèvement du système serait le résultat du choc horizontal des tourillons contre l'affût.

Il suit de l'équation (27)

$$T' = \mu \cos \theta - C \left\{ V + \omega c + \psi d \right\}$$

que T' diminue lorsque C, V, ω et ψ augmentent.

Ainsi la percussion horizontale, sur les encastrements des tourillons, est atténuée par l'accroissement :

1° de la masse du canon.

2° de la vitesse de recul.

3° de la vitesse angulaire de soulèvement de l'affût.

4° de la vitesse de rotation du canon autour de l'axe des tourillons.

§ 87. MANIÈRE DIFFÉRENTE DE METTRE EN ÉQUATION LES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU CANON.

La mise en équation est souvent la grande difficulté des problèmes, principalement lorsqu'il s'agit de mouvements de rotation compliqués comme ceux du présent article. En effet, le système est transporté parallèlement au sol, et le canon tourne autour de l'axe des tourillons, pendant que l'affût auquel il est lié par les tourillons, tourne lui-même sur le point d'appui de la crosse sur le sol. Ces différents mouvements peuvent se concevoir par plusieurs combinaisons, de même que la génération des surfaces, peut se faire par plusieurs procédés.

Parmi ces combinaisons, il y en a qui sont plus compréhensibles que d'autres pour certains esprits, et c'est étendre leur champ d'opérations que de multiplier les exemples des divers moyens qui conduisent aux mêmes fins.

D'ailleurs il est bon de contrôler les résultats du calcul et de la mise en équation : et c'est principalement à ce dernier point de vue, et pour obtenir une entière confiance dans la marche que nous avons suivie, que nous allons exposer une autre combinaison de mouvements par lesquels nous arriverons exactement aux mêmes formules que celles déjà trouvées.

Nous nous occuperons dans ce paragraphe des quantités de mouvement imprimées au canon seulement.

Si le canon ne tournait pas autour des tourillons, il se mouvrait parallèlement à lui même.

Abstraction faite de cette rotation, le canon est animé de deux vitesses : l'une horizontale V et l'autre provenant du choc produit contre les tourillons par le soulèvement de l'affût. Faisant toujours abstraction de la rotation du canon, le soulèvement de l'affût imprime à la pièce une vitesse de translation $\omega\sqrt{c^2+c'^2}$ dirigée parallèlement à la tangente à l'arc de cercle que l'axe des tourillons décrit autour du point d'appui de la crosse sur le sol.

Cette vitesse $\omega\sqrt{c^2+c'^2}$ produit la quantité de mouvement parallèle $\omega\,C\sqrt{c^2+c'^2}$ appliquée au centre de gravité du canon.

En même temps que ces deux vitesses se produisent, faisons

tourner le canon autour de l'axe des tourillons, avec la vitesse absolue ψ, qu'il possède réellement ; il est évident que les quantités de mouvement communiquées, et les percussions qui en résultent devront être les mêmes que celles déjà trouvées.

Mettons ces quantités de mouvement en équation.

Remplaçons la résistance, que l'affût oppose aux tourillons, par les forces T et T', nous pouvons considérer le canon comme un corps libre soumis à ces forces et à l'impulsion μ; et établir les conditions de l'équilibre, qui doit exister entr'elles et les quantités de mouvement réellement imprimées.

La bouche-à-feu possède trois vitesses, et par suite trois sortes de quantités de mouvement.

La vitesse horizontale V de translation de tout le système produit la quantité de mouvement $\mathrm{C}\,\mathrm{V}$, dirigée parallèlement au sol.

La vitesse de rotation ψ, autour de l'axe des tourillons, engendre la quantité de mouvement de rotation $\psi\,\mathrm{C}\sqrt{d^2 + d'^2}$, dont les composantes verticales et horizontales sont respectivement $\psi\,\mathrm{C}\,d'$ et $\psi\,\mathrm{C}\,d$.

La vitesse de translation $\omega\sqrt{c^2 + c'^2}$, dirigée parallèlement à la tangente à l'arc de cercle, décrit par les tourillons autour du point d'appui de la crosse sur le sol comme centre, engendre la quantité de mouvement $\omega\,\mathrm{B}\sqrt{c^2 + c'^2}$, parallèle à cette vitesse et appliquée au centre de gravité du canon.

La vitesse $\omega\sqrt{c^2 + c'^2}$ est perpendiculaire à la droite menée de l'axe des tourillons au point d'appui de la crosse, parce que cette droite est le rayon du cercle que décrit l'axe des tourillons.

Soit β l'angle que cette droite fait avec l'horizontale, on a les relations :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{c'}$$

$$\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{c'}{\sqrt{c^2 + c'^2}}$$

Les composantes verticale et horizontale de la quantité de mouvement $\omega\,\mathrm{C}\sqrt{c^2 + c'^2}$ sont respectivement

$-\omega C \sqrt{(c^2 + c'^2)} \cos\beta$ composante verticale, prise négativement parce qu'elle agit de bas en haut.

$\omega C \sqrt{c^2 + c'^2} \sin\beta$ composante horizontale, de même sens que celui du recul.

Substituant à $\sin\beta$ et $\cos\beta$ leurs valeurs ci-dessus, nous trouvons

$$-\omega C \sqrt{(c^2 + c'^2)} \cos\beta = -\omega C c'$$

$$\omega C \sqrt{(c^2 + c'^2)} \sin\beta = \omega C c$$

Les deux premières équations de l'équilibre entre ces forces sont :

$$\mu \sin\theta + T = -\omega C c' + \psi C d'$$

$$\mu \cos\theta - T' = \omega C c + \psi C d + CV$$

Ces relations sont les mêmes que celles (4) et (5) du § 81.

Formons l'équation des moments relativement à l'axe des tourillons, pour lequel les moments des forces T et T' sont nuls.

Le moment de l'impulsion μ due à la réaction de la charge de poudre est :

$$\mu a$$

Le moment de la quantité de mouvement horizontale V C est :

$$V C d$$

Le moment de la quantité de mouvement de rotation du canon autour de l'axe des tourillons est :

$$\psi C (K^2 + d^2 + d'^2)$$

La quantité de mouvement de translation du canon $\omega C \sqrt{(c^2 + c'^2}$ dirigée perpendiculairement à la droite menée de l'axe des tourillons au point d'appui de la crosse, a deux composantes, $-\omega C c'$ et $\omega C c$.

La composante verticale $-\omega C c'$ appliquée au centre de gravité du canon a pour moment

$$-\omega C c' d'$$

La composante horizontale $\omega C c$ appliquée au centre de gravité du canon a pour moment.

$$\omega C c d$$

L'équation des moments est

$$\mu a = C V d + \psi C (K^2 + d^2 + d'^2) - \omega C c' d' + \omega C c d$$

Cette équation est la même que celle (8) du § 81. Ainsi quoique nous ayons suivi une marche différente, nous avons retrouvé exactement les équations (4) (5) et (8) du § 81.

Cette coïncidence montre que nos deux voies étaient bonnes.

§ 88. MANIÈRE DIFFÉRENTE DE METTRE EN ÉQUATION LES QUANTITÉS DE MOUVEMENT IMPRIMÉES AU SYSTÈME FORMÉ DU CANON ET DE L'AFFUT RÉUNIS.

Remplaçons par des forces la résistance que les roues opposent au choc de l'essieu, et celle du sol aux percussions de la crosse, et nous pourrons considérer le canon et l'affût comme un système de deux corps solides soumis à ces forces, et établir les conditions de l'équilibre qui doit exister entr'elles et l'impulsion μ d'une part, et les quantités de mouvement communiquées réellement au canon et à l'affût d'autre part.

Les forces qui agissent sur le système sont :

μ
$+ E$
$- E'$
$- Q$
$- f Q.$

Les quantités de mouvement imprimées au canon ont les composantes suivantes :

verticales	horizontales
$\psi C d'$	$V C$
$- \omega C c'$	$\psi C d$
	$\omega C c$

Les quantités de mouvement transmises à l'affût ont les composantes suivantes, provenant de la rotation ω et de la vitesse V :

verticales	horizontales
	$V A$
$- \omega A g'$	$\omega A g$

Les deux premières équations de l'équilibre sont :

$$\mu \sin\theta + \mathrm{E} - \mathrm{Q} = \psi\,\mathrm{C}\,d' - \omega\,\mathrm{C}\,c' - \omega\,\mathrm{A}\,g'$$

$$\mu\cos\theta - \mathrm{E}' - f\,\mathrm{Q} = \mathrm{V}\,\mathrm{C} + \psi\,\mathrm{C}\,d + \omega\,\mathrm{C}\,c + \mathrm{V}\,\mathrm{A} + \omega\,\mathrm{A}\,g.$$

Ces relations sont les mêmes que celles (11) et (12) du § (82).

Formons l'équation des moments relativement au point d'appui de la crosse sur le sol, pour lequel les moments des forces Q et f Q sont nuls.

Les moments des forces qui agissent sur le système du canon et de l'affût réunis sont :

$\mu\,\gamma$
$-\mathrm{E}\,r'$
$-\mathrm{E}\,r.$

Les moments des quantités de mouvement imprimées au canon sont :

$\mathrm{C}\,\mathrm{V}\,(c+d)$

$\omega\,\mathrm{C}\,c'\,(c'-d')$ moment de la composante verticale $-\omega\,\mathrm{C}\,c'$

$\omega\,\mathrm{C}\,c\,(c+d)$ moment de la composante horizontale $\omega\,\mathrm{C}\,c$

$q\,\psi\,\mathrm{C}\sqrt{d^2+d'^2}$ moment de la quantité de mouvement de rotation du canon autour de l'axe des tourillons pris relativement au point d'appui de la crosse : q étant le bras de levier de cette force.

Les moments des quantités de mouvement imprimées à l'affût sont :

$\mathrm{V}\,\mathrm{A}\,g$

$\omega\,\mathrm{A}\,(\mathrm{K}'^2+g^2+g'^2)$ moment de la quantité de mouvement de rotation de l'affût autour du point d'appui de la crosse.

L'équation des moments est

$$\mu\,\gamma - \mathrm{E}\,r' - \mathrm{E}'\,r = \mathrm{C}\,\mathrm{V}\,(c+d) + \omega\,\mathrm{C}\,c'(c'-d') + \omega\,\mathrm{C}\,c(c+d) +$$

$$+ q\,\psi\,\mathrm{C}\sqrt{d^2+d'^2} + \mathrm{V}\,\mathrm{A}\,g + \omega\,\mathrm{A}\,(\mathrm{K}'^2+g^2+g'^2)$$

Nous déterminerons le bras de levier q, comme il a été dit au § (74) où les données sont les mêmes ; on a

$$q = \frac{\mathrm{K}^2 + d^2 + d'^2 + c\,d - c'\,d'}{\sqrt{d^2+d'^2}}$$

Cette valeur de q substituée dans l'équation précédente donne pour l'équation des moments

$$\mu\gamma - \mathrm{E}r' - \mathrm{E}'r = \mathrm{V}\left\{\mathrm{C}(c+d)+\mathrm{A}g\right\} + \psi\mathrm{C}\left\{\mathrm{K}^2+d^2+d'^2+cd-c'd'\right\} +$$

$$+\omega\mathrm{C}\left\{c(c+d)+c'(c'-d')\right\} + \omega\mathrm{A}\left\{\mathrm{K}'^2+g^2+g'^2\right\}$$

formule identique avec celle (15) du § (82)

RÉSUMÉ.

Le canon est la partie la plus solide du système formé par sa réunion avec l'affût et les roues.

Il est capable de supporter les énormes tensions des gaz et les battements du projectile à l'intérieur de l'âme, et il est bien constitué pour résister aux percussions qui ont lieu aux tourillons et sous la culasse, aux points où la pièce est en contact avec l'affût.

Ces percussions qui sont peu de chose pour la bouche-à-feu sont au contraire très redoutables pour l'affût.

La quantité de mouvement du canon pendule, engendrée par la réaction de la charge, est d'abord emmagasinée dans la pièce; de là elle se propage sur l'affût et sur les roues; elle leur communique les vitesses que nous avons calculées, et produit les percussions que nous avons déterminées au contact de ces parties les unes avec les autres et à leurs points d'appui sur le sol.

Les projections horizontale et verticale de la réaction de la charge, sont respectivement égales à la somme des composantes horizontales et verticales des quantités de mouvement, communiquées aux diverses parties du système, et des chocs contre les appuis sur le sol.

Les chocs, aux points de contact entre les diverses parties du système, sont fonction des quantités de mouvement transmises d'une de ces parties à toutes les autres parties consécutives. Il s'ensuit que pour atténuer ces chocs contre l'affût et contre les roues, il faut que le canon conserve, après le recul commencé, la majeure partie de la quantité de mouvement qui lui

a été communiquée, afin que la quantité d'action transmise aux autres parties du système soit la plus faible possible.

La vitesse du recul, parallèlement au sol, est la même pour le canon, l'affût et les roues ; et les quantités horizontales de mouvement qui en résultent, pour chacune de ces parties, sont proportionnelles à leurs masses. Il s'ensuit, qu'en procurant au canon la plus forte proportion de la masse du système entier, il sera animé de la plus grande partie de la quantité horizontale de mouvement communiquée au système, et par suite les chocs horizontaux contre l'affût et les roues seront atténués.

La réaction de la charge, produisant une quantité constante de mouvement, on ralentit la vitesse initiale du recul en augmentant la masse du système à mouvoir.

Une forte masse du système, reportée le plus possible sur le canon, présente donc la condition la plus favorable pour ralentir le recul et amortir les chocs contre l'affût et les roues.

Le mode de réunion du canon avec l'affût est sans influence sur la vitesse initiale du recul.

La présence des roues ne modifie en rien cette vitesse, dans tous les cas où l'affût conserve ses appuis sur le sol : de sorte que, dans ces circonstances, la vitesse initiale est la même que si les roues ne pouvaient tourner ou que s'il s'agissait d'un mortier.

Lorsque l'affût est soulevé, les roues restent parallèles à elles mêmes, et les formules qui expriment la vitesse angulaire du système et celle du recul, sont indépendantes du moment d'inertie des roues ; et abstraction faite de ce moment d'inertie, ces deux vitesses sont les mêmes que s'il s'agissait d'un mortier.

L'affût conserve ses appuis lorsque les roues sont comprimées contre le sol, ou quand la percussion $R = E$ est positive ou au moins égale à zéro.

Il en résulte la condition

$$y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma = \text{ou} > 0.$$

Il y a soulèvement de l'affût dans le cas de l'inégalité contraire

$$\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta) > 0.$$

Les conditions de stabilité sont les mêmes pour les canons que pour les mortiers.

Lorsque l'affût conserve ses appuis sur le sol, la composante verticale $\mu \sin\theta$, de la réaction due à l'explosion de la charge,

est détruite par la somme des résistances verticales $R + Q$ aux points d'appui des roues et de la crosse sur le sol. Cette somme ne varie pas quelles que soient la forme et la composition du matériel. Le constructeur n'a d'autre mission, que celle de répartir cette somme sur ces appuis, de la manière la plus avantageuse pour le service et pour la conservation du matériel.

Si les roues sont comprimées contre le sol, la culasse reste en contact avec la vis de pointage et la pièce ne peut saigner du nez.

Dans le cas du soulèvement de l'affût, les composantes horizontales et verticales des quantités de mouvement de rotation communiquées aux diverses parties du système, doivent être ajoutées aux autres percussions parallèles à ces composantes, ou en être retranchées, suivant le sens de leurs actions. Dans ces circonstances non seulement les roues ne touchent plus le sol, et le centre de gravité du système est relevé, mais les percussions sur la vis de pointage, aux encastrements des tourillons, sur l'essieu et au point d'appui de la crosse sur le terrain, peuvent-être diminuées, anéanties entièrement ou même changées de signe. Il y a tel recul où le système entier perd tout contact avec le terrain.

Ces soulagements momentanés aux diverses percussions sont chèrement payés, parce que le système en retombant acquiert la même force vive que celle due au soulèvement, et que cette force vive doit être détruite instantanément par la résistance du terrain.

Il faut donc que le système soit d'une construction qui augmente sa stabilité sur le sol, ou du moins qui ralentisse la vitesse de rotation due au soulèvement de l'affût, quand le soulèvement ne peut être évité. On satisfait à ces conditions de stabilité, en augmentant le moment d'inertie du système relativement au point d'appui de la crosse sur le sol.

La grandeur et la direction de la perpendiculaire γ, menée du point d'appui de la crosse sur le sol, ont une grande influence sur la stabilité du système. Les roues ne peuvent-être soulevées, dans la construction ordinaire des affûts, lorsque cette perpendiculaire rencontre le prolongement de l'axe de l'âme au-dessous du plan d'appui. Mais si cette perpendiculaire coupe l'axe de l'âme au-dessus du sol, la tendance au soulèvement est d'autant plus grande que γ est plus considérable. Pour diminuer γ et augmenter

ainsi la stabilité de l'affût, il faut abaisser le centre de gravité du canon.

Le système est d'autant plus stable que son centre de gravité est plus élevé relativement à celui du canon, et que la verticale passant par ce centre de gravité est plus éloignée du point d'appui de la crosse.

La tendance au soulèvement est plus prononcée sous les angles de tir peu élevés au-dessus de l'horizon. L'affût est inévitablement soulevé dans le tir horizontal et dans celui incliné sous l'horizon. Les nécessités du service, la facilité du pointage et la sécurité des artilleurs exigent cependant que la pièce ait un certain commandement sur le terrain. C'est à satisfaire, dans une juste mesure, à ces conditions contradictoires que le constructeur doit s'attacher.

Les circonstances, qui diminuent les percussions sur la vis de pointage, sont une forte masse du canon, un moment d'inertie considérable, un faible abaissement de l'axe des tourillons par rapport à celui de l'âme, une grande vitesse du recul.

La percussion verticale, sur les encastrements des tourillons, est affaiblie par la composante verticale du choc contre la vis de pointage. La percussion horizontale, sur les encastrements des tourillons, est diminuée de la quantité de mouvement de recul imprimée au canon.

Dans le tir ordinaire des canons, les chocs horizontaux contre l'essieu et contre les encastrements des tourillons sont plus violents que les chocs verticaux contre ces mêmes parties.

La fatigue de l'essieu est en raison directe de la masse des roues.

Les articles I et III, de cette seconde partie, renferment les solutions les plus intéressantes concernant les percussions produites dans le tir des canons : nous en résumons les formules dans le tableau suivant.

Ces formules sont basées sur les hypothèses faites au commencement de ce travail, savoir que le canon, l'affût et les roues, sont des corps rigides, inflexibles, sans élasticité, etc. On comprend que ces suppositions sont plus ou moins rapprochées de la réalité, et dans la pratique il faut tenir compte des qualités physiques que les corps possèdent réellement. La flèche de l'affût par exemple est en bois, corps flexible et élastique et dont la flexibilité et l'élasticité augmentent en raison de la

longueur des pièces de bois, l'équarrissage restant le même : le sol est plus ou moins compressible et élastique : il en est de même des pièces de bois qui composent les plates-formes, etc. Les anciens affûts de siége et de campagne de Gribeauval, avaient des flasques très-longs, mais épais et très-larges suivant la verticale ; aussi pouvait-on les considérer comme étant à très-peu près dénués de flexibilité et d'élasticité. Aujourd'hui les affûts de siége et surtout ceux de campagne ont leur flèche faite de pièces de bois d'échantillon beaucoup moindre. On s'est aperçu que ces flèches sont flexibles, et on les a considérablement raccourcies, pour leur procurer la rigidité voulue et pour empêcher la pièce de saigner du nez ; ce qui peut arriver même quand les roues sont comprimées contre le sol, par la réaction de la flèche, comme on l'a remarqué avec les affûts à flèche longue mais d'un faible équarrissage.

Il n'en est pas moins vrai, que les roues sont soulevées dans le tir horizontal, encore plus fortement avec l'affût à flèche courte qu'avec celui à flèche longue : et l'on n'a pu obvier à un inconvénient qu'en donnant naissance à un autre défaut.

Nos formules permettent d'apprécier l'intensité des percussions et la grandeur des vitesses qui ont lieu sur les diverses parties de l'affût.

Ces notions seront ensuite utilisées dans la construction du matériel, en tenant compte des propriétés physiques des corps, et des nécessités du service.

TABLEAU RÉSUMÉ DES FORMULES CONCERNANT LES I ET III ET PRODUITES DANS LE TIR

ROUES COMPRIMÉES CONTRE LE SOL.

Condition de stabilité $y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma > 0$

$$\frac{V}{\mu} = \frac{(\cos\theta - f\sin\theta)}{S}$$

$$R = E = \frac{y\,V\,S - \mu\gamma}{r' - fr} = \frac{\mu\left\{y(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma\right\}}{r' - fr}$$

$$E' = B\,V + f\,E$$

$$Q = \mu\sin\theta - E$$

$$\varphi = \frac{f\,r\,E}{B\,l^2}$$

$$z = V - \varphi\,r$$

$$P = \frac{\mu\,a - C\,V\,d}{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha} = \frac{\mu\left\{aS - Cd(\cos\theta - f\sin\theta)\right\}}{S\left\{(c-e)\sin\alpha + (c'-e')\cos\alpha\right\}}$$

$$T = \mu\sin\theta - P\cos\alpha$$

$$T' = \mu\cos\theta + P\sin\alpha - C\,V$$

VITESSES ET PERCUSSIONS, CALCULÉES AUX ARTICLES DES CANONS DE SIÉGE ET DE CAMPAGNE.

AFFUT SOULEVÉ ET TOURNANT AUTOUR DU POINT D'APPUI DE LA CROSSE SUR LE SOL

Condition du soulèvement $\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta) > 0$

$$\frac{V}{\mu} = \frac{(X - B l^2)(\cos\theta - f\sin\theta) - \gamma S (y + f y')}{S\{X - B l^2 - y S (y + f y')\}}$$

$$\omega = \frac{\mu\gamma - y V S}{X - B l^2} = \frac{\mu\{\gamma - y(\cos\theta - f\sin\theta)\}}{X - B l^2 - y S (y + f y')}$$

$$E = \omega B r'$$

$$E' = B V + \omega B r$$

$$Q = \mu \sin\theta + \omega y' S$$

$$P = \frac{\mu a - C V d - \omega C (L + U)}{(c - e)\sin\alpha + (c' - e')\cos\alpha}$$

$$T = P\cos\alpha - \mu\sin\theta - \omega C (c' - d')$$

$$T' = \mu\cos\theta + P\sin\alpha - CV - \omega C (c + d)$$

N. B. Les percussions verticales T et E des tourillons sur leurs encastrements et de l'affût sur l'essieu, dont il est fait usage dans ces formules, sont censées dirigées du haut en bas lorsque l'affût conserve ses appuis sur le sol, et du bas en haut quand l'affût est soulevé.

TABLE DES MATIÈRES.

Page.

AVANT-PROPOS 373

PRÉLIMINAIRES 377

§ 1. — Equations de l'équilibre des forces dirigées dans un même plan. . . . . *Ibid.*

§ 2. — Déterminer la longueur de la perpendiculaire menée de l'origine des coordonnées sur une droite passant par le point x, y et faisant l'angle α avec l'axe des abscisses. . . . 379

§ 3. — Ayant exprimé les conditions de l'équilibre entre des forces situées dans un même plan, à l'aide des équations I, II et III ou IV du § (1), si l'on prend les moments de ces forces relativement à un second point situé dans ce plan, la nouvelle équation des moments combinée avec les trois premières est identiquement nulle, et ne contient aucune nouvelle relation entre les forces 380

§ 4. — Principe de d'Alembert 382

§ 5. — Centres de gravité. 383

§ 6. — Des moments d'inertie. 384

§ 7. — Du mouvement de rotation que le choc fait prendre à un corps solide retenu par un axe fixe 385

§ 8. — Si l'on conserve les notations précédentes, le moment de la quantité de mouvement de rotation d'un corps, relativement à une droite quelconque parallèle à l'axe de rotation et passant par le point x, y est imprimé par 390

$$q\,\mathrm{R} = \omega\,\mathrm{M}\,(\,\mathrm{K}^2 + x_1^{\,2} + y_1^{\,2} - xx_1 - yy_1\,)$$

q étant le bras de levier de la force R relativement à la droite passant par le point $x_1\,y$. . . . . *Ibid.*

§ 9. — Les coordonnées du centre de gravité de la bouche-à-feu étant connues, lorsque l'âme est horizontale, en déduire les coordonnées de ce centre pour une inclinaison quelconque θ de l'axe de l'âme 394

§ 10. — Déterminer la longueur de la perpendiculaire abaissée de la crosse sur l'axe incliné du canon. 396

§ 11. — Déterminer la longueur de la perpendiculaire abaissée de la tête de la vis de pointage sur l'axe incliné du canon. . 397

§ 12. — Quantité de mouvement de recul du canon pendule. . . 398

PREMIÈRE PARTIE

PERCUSSIONS PRODUITES SUR LES AFFUTS DANS LE TIR DES MORTIERS.

ARTICLE I.

MORTIER A PLAQUE. — Percussions qui ont lieu lorsque le mortier conserve ses appuis sur le sol, et qu'il prend un mouvement de recul parallèlement au terrain.

Page.

§ 13. — Données sur les mortiers à plaque. 400
§ 14. — Notations 401
§ 15. — Mouvement et percussions initiales qui ont lieu 402
§ 16. — Mise en équation des percussions produites . . . . . *Ibid.*
§ 17. — Observations sur les formules précédentes. 404

ACTICLE II.

MORTIER A PLAQUE. — Percussions qui ont lieu lorsque le mortier est soulevé, prend un mouvement de translation parallèlement au sol et tourne comme sur une charnière autour de l'arête postérieure d'appui de la plaque.

§ 18. — Notations 408
§ 19. — Mise en équation des quantités de mouvement, vitesses et percussions imprimées au mortier et à l'arête d'appui sur le sol 409
§ 20. — Observations sur les formules précédentes. 412

ARTICLE III.

MORTIER A TOURILLONS SUR AFFUT TRAINEAU. — Percussions produites lors du tir dans l'hypothèse que l'affût conserve ses appuis sur la plate-forme.

§ 21. — Notations et hypothèses 415
§ 22. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au mortier 417
§ 23. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au système du mortier et de l'affût réunis 418
§ 24. — Résolution des équations précédentes. 419
§ 25. — Remarques sur les équations précédentes 421

ARTICLE IV.

MORTIER A TOURILLONS SUR AFFUT TRAINEAU. — Percussions qui ont lieu lorsque le système du mortier et de l'affût est soulevé par sa partie antérieure et prend un mouvement de translation parallèlement au sol, tout en tournant comme sur une charnière autour de l'arête postérieure d'appui de l'affût

Page.

§ 26. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au mortier 425
§ 27. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au mortier et à l'affût réunis. 428
§ 28. — Résolution des équations précédentes 430
§ 29. — Remarques sur les équations précédentes. 431
§ 30. — Résumé 434

DEUXIÈME PARTIE.

CANONS DE SIÉGE ET DE CAMPAGNE.

ARTICLE I.

CANONS DE SIÉGE ET DE CAMPAGNE. — Percussions qui ont lieu lorsque l'affût conserve ses appuis sur le sol, et que le système prend un mouvement de recul parallèlement au terrain.

§ 31. — Données sur les canons et les affûts. 438
§ 32. — Notations 440
§ 33. — Percussions qui ont lieu. 443
§ 34. — Mise en équation des percussions éprouvées par le système du canon et de l'affût réunis. 444
§ 35. — Mise en équation des percussions exercées sur les roues . 445
§ 36. — Mise en équation des percussions exercées par le canon sur les encastrements des tourillons et sur la vis de pointage. 447
§ 37. — Résolution des équations précédentes. 448
§ 38. — Répertoire de formules. 449
§ 39. — Observations sur la vitesse V du recul. 450
§ 40. — Observations sur les percussions E et R exercées sur l'essieu et aux points d'appui des roues. 451
§ 41. — Observations sur la somme des percussions verticales $E+Q$, exercées sur les appuis de l'affût 454
§ 42. — Observations sur la percussion horizontale E' exercée sur l'essieu. 455
§ 43. — Observations sur la vitesse angulaire φ des roues. . . . 456
§ 44. — Observations sur la vitesse de glissement z des roues . . 457
§ 45. — Observations sur la percussion P exercée sur la vis de pointage *Ibid.*

Page.

§ 46. — Observations sur la percussion verticale T exercée sur les encastrements des tourillons 463

47. — Observations sur la percussion horizontale T′ exercée sur les encastrements des tourillons. 464

ARTICLE II.

CANONS DE SIEGE ET DE CAMPAGNE. — Percussions qui ont lieu lorsque l'affût conserve ses appuis sur le sol, et que les roues sont enrayées.

§ 48. — Hypothèses concernant les chaînes d'enrayage. 466

§ 49. — Mouvements et percussions qui ont lieu . . . . . *Ibid.*

§ 50. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au canon. 467

§ 51. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au canon et à l'affût réunis 468

§ 52. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées aux roues. 469

§ 53. — Résolution des équations précédentes et répertoire de formules. 470

§ 54. — Observations sur les formules précédentes. 471

ARTICLE III.

Percussions produites, lorsque la culasse restant en contact avec la vis de pointage, l'affût soulevé tourne sur sa crosse comme sur une charnière, tandis que le système entier, formé du canon, de l'affût et des roues, prend un mouvement de translation parallèlement au sol.

§ 55. — Mouvements qui ont lieu. 473

§ 56. — Notations. 474

§ 57. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au canon et à l'affût réunis 476

§ 58. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées aux roues. 478

§ 59. — Résolution des équations précédentes. 479

§ 60. — Mise en équation des percussions exercées sur la tête de la vis de pointage et sur les encastrements des tourillons . 481

§ 61. — Résolution des équations (21), (22) et (23), relatives aux percussions éprouvées par la vis de pointage et par les encastrements des tourillons. 483

§ 62. — Observations sur la vitesse angulaire ω. 484

§ 63. — Observations sur la vitesse V du recul. 487

§ 64. — Observations sur la percussion verticale E sur l'essieu . . 489

§ 65. — Observations sur la percussion horizontale E′ sur l'essieu . . 490

§ 66. — Comparaison entre la composante verticale E et celle horizontale E′ du choc contre l'essieu 491

§ 67. — Observations sur la percussion verticale Q contre le point d'appui de la crosse sur le sol. . . . . *Ibid.*

§ 68. — Observations sur la percussion E contre la vis de pointage . . 494

§ 69. — Observations sur la percussion verticale T contre les encastrements des tourillons 498

Page.

§ 70. — Observations sur la percussion horizontale T′ contre les encastrements des tourillons. 499
§ 71. — Cas particulier du tir horizontal 503

ARTICLE IV.

Percussionsqui ont lieu, lorsque les roues sont comprimées contre le sol, et que, la culasse n'étant pas en contact avec la vis de pointage, le canon prend un mouvement de rotation autour de l'axe des tourillons.

§ 72. — Mouvements qui ont lieu dans le recul 505
§ 73. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au canon. 506
§ 74. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au système formé du canon et de l'affût réunis 507
§ 75. — On peut parvenir aux équations (5), (6) et (8) par une marche différente. 509
§ 76. — Mise en équation des percussions exercées sur les roues . 511
§ 77. — Résolution des équations précédentes 512
§ 78. — Répertoire de formules. . . . . *Ibid.*
§ 79. — Percussion exercée par la culasse lorsqu'elle rencontre la vis de pointage, le canon étant animé de la vitesse augulaire initiale ψ autour de l'axe des tourillons. 514

ARTICLE V.

Percussions qui ont lieu lorsque les roues se détachent du sol, que l'affût soulevé tourne sur sa crosse comme sur une charnière, et que la culasse n'est pas en contact avec la vis de pointage.

§ 80. — Mouvements qui ont lieu. 520
§ 81. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au canon 522
§ 82. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées au système formé du canon et de l'affût réunis 524
§ 83. — Mise en équation des quantités de mouvement imprimées aux roues. 527
§ 84. — Résolution des équations précédentes. 529
§ 85. — Répertoire de formules 551
§ 86. — Observations sur les formules précédentes. 552
§ 87. — Manière différente de mettre en équation les quantités de mouvement imprimées au canon. 536
§ 88. — Manière différente de mettre en équation les quantités de mouvement imprimées au système formé du canon et de l'affût réunis 539
§ 89. — Résumé 541

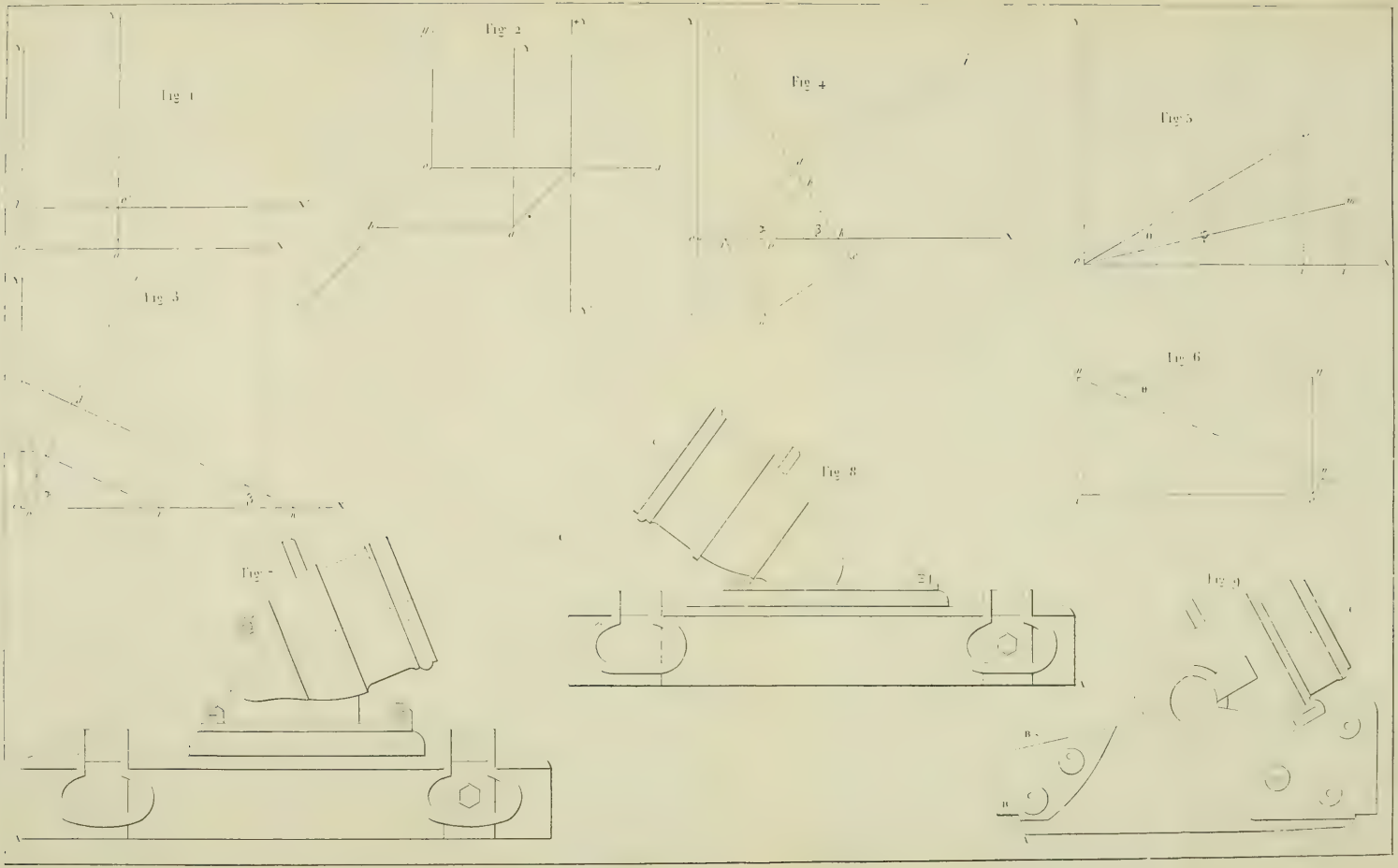
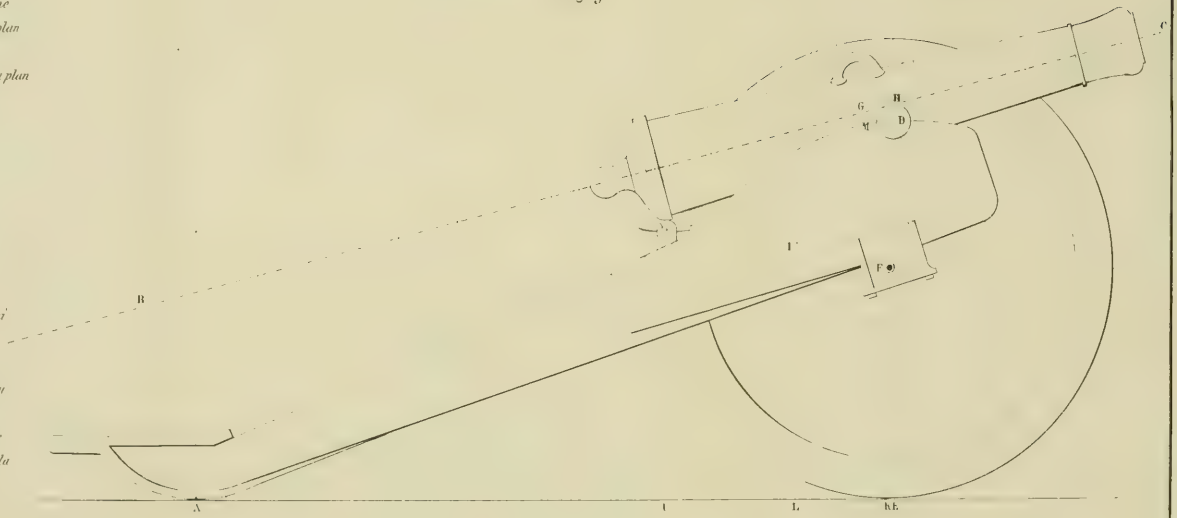


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9

Légende.

BC *axe de l'âme*
A *point d'appui de la crosse sur le sol*
p = AB *perpendiculaire sur* BC
D *axe des tourillons*
E *projection de* D *sur la ligne de terre*
c = DE *hauteur de l'axe des tourillons au dessus du sol*
c' = AE
G *centre de gravité du canon sur l'axe de l'âme*
d = GM *distance du centre de gravité du canon au plan horizontal passant par l'axe des tourillons*
d' = DM *distance du centre de gravité du canon au plan vertical passant par l'axe des tourillons*
a = DH *abaissement de l'axe des tourillons*
a' = GH
I *centre de gravité de l'affut*
g = IL
g' = AL
F *axe de l'essieu*
K *point d'appui de la roue*
r = KF *rayon de la roue*
r' = AK *distance du point d'appui de la roue à celui de la crosse*
V *tête de la vis de pointage*
c = VI *hauteur de la tête de la vis de pointage au dessus du sol*
c' = AU *distance de la verticale passant par la tête de la vis de pointage au point d'appui de la crosse*

Fig. 9



VII. — *Notice sur les Fossiles de l'Inde découverts par* M. *le* Dr Fleming, *d'Edimbourg et décrits*

PAR

Le Dr L. De KONINCK,

Professeur à l'Université de Liége.

Un Mémoire publié par notre savant ami, M. Davidson et inséré dans le tome XVIII, pag. 25 et suiv. du *Quarterly journal of the geological society of London*, contient la description des Brachiopodes fossiles découverts dans le Punjaub, par MM. le Dr Fleming et W. Purdon.

La détermination de ces fossiles ne pouvait être confiée à de meilleures mains.

Un grand nombre de ces espèces a pu être identifié avec des espèces provenant des formations carbonifères de l'Europe et de l'Amérique; quelques unes sont nouvelles; d'autres ne possèdent pas le facies paléozoïque que le paléontologiste un peu exercé aperçoit facilement chez les fossiles de cette grande période géologique.

Ce qui arrive pour les Brachiopodes, se remarque aussi pour les fossiles des autres classes d'animaux qui les accompagnent; l'auteur de leur découverte a bien voulu me charger de la description de ces derniers.

Parmi ceux-ci, quelques espèces appartiennent à des genres qui jusqu'ici n'ont été trouvés que dans les assises des terrains secondaires et principalement dans les couches inférieures de ces terrains.

Tels sont surtout les *Ceratites* qui paraissent être assez abondants dans la formation salifère du Punjaub et qui ont ceci de particulier, que leurs espèces sont toutes nouvelles pour la science.

Sans cette dernière circonstance, on aurait pu avoir des doutes sérieuses sur leur gisement, bien que M. le Dr Fleming soit persuadé qu'elles se trouvent dans les mêmes couches que celles qui renferment les *Productus* et les *Spirifer* carbonifères.

Toutefois, il y a encore cette remarque à faire, que la roche qui renferme les *Ceratites*, ne m'a offert, au moins en ce qui concerne les échantillons qui m'ont été confiés, aucune trace de ces derniers genres paléozoïques.

Il est donc à souhaiter que de nouvelles observations viennent confirmer celles du savant Médecin d'Edimbourg, qui le premier a jeté quelque lumière sur la constitution géologique de l'ancien royaume de Runjeet Sing.

Les fossiles que j'ai eus à ma disposition, appartenaient en majeure partie, au Dr Fleming et ont été déposés par lui, au Musée de Calcutta ; un petit nombre se trouve au Musée de la société géologique de Londres. Ils formaient un ensemble de 49 espèces, dont 7 se trouvaient en trop mauvais état pour être déterminées avec certitude et par conséquent pour être figurées et décrites.

Les autres espèces fesant l'objet de ce travail se divisent ainsi qu'il suit :

I. POISSONS.

1. Saurichthys indicus, *De Kon.*
2. Acrodus Flemingianus, *De Kon.*
3. — N. sp. ? voisine de l'Ac. lateralis, *Ag.*

II. MOLLUSQUES.

A. CÉPHALOPODES.

4. Orthoceras decrescens, *De Kon.*
5. — rachideum, *De Kon.*
6. — vesiculosum, *De Kon.*
7. Nautilus Flemingianus, *De Kon.*
8. — Burtini, *Galeotti.*
9. Goniatites Gangeticus, *De Kon.*

10. Ceratites Lawrencianus, *De Kon.*
11. — Davidsonianus, *De Kon.*
12. — Buchianus, *De Kon.*
13. — latifimbriatus, *De Kon.*
14. — Lyellianus, *De Kon.*
15. — planulatus, *De Kon.*
16. — Hauerianus, *De Kon.*
17. — Murchisonianus, *De Kon.*
18. — Flemingianus, *De Kon.*

B. GASTÉROPODES.

19. Nerinæa N. sp. ?
20. Macrocheilus avellanoïdes, *De Kon.*
21. — depilis, *De Kon.*
22. Bellerophon Jonesianus, *De Kon.*
23. — orientalis, *De Kon.*
24. — decipiens, *De Kon.*
25. Dentalium Herculeum, *De Kon.*

C. LAMELLIBRANCHES.

26. Solenopsis imbricata, *De Kon.*
27. Pecten crebristria, *De Kon.*
28. — asiaticus, *De Kon.*
29. — Flemingianus, *De Kon.*
30. Anomia ? Lawrenciana, *Flem.*

D. BRYOZOAIRES.

31. Fenestella ? Sykensis, *De Kon.*
32. Fenestella megastoma, *De Kon.*
33. Phyllopora ? Haimeana, *De Kon.*
34. — ? cribellum, *De Kon.*
35. Retepora ? lepida, *De Kon.*
36. Polypora fastuosa, *De Kon.*

III. ECHINODERMES.

37. Poteriocrinus sp. ?
38. Philocrinus Cometa, *De Kon.*
39. Cidaris Forbesianus, *De Kon.*

IV. ANTHOZOAIRES.

40. Alveolites septosa ? *Fleming.*
41. Michelinia favosa, *Goldf.*

42. Lithostrotion basaltiforme, *Conyb.* and *Phill.*
43. — irregulare, *Phill.*
44. Clysiophyllum indicum, *De Kon.*
45. Isastræa arachnoïdea, *De Kon.*

Tous ces fossiles proviennent de l'extrémité occidentale de la chaîne salifère du Punjaub (Punjaub Salt-range) et du prolongement de celle-ci à la rive droite de l'Indus jusqu'aux environs de Kaffir-Kote, qui est cité comme une localité très riche en fossiles et comme ayant fourni la plupart des espèces décrites dans ce mémoire.

1. Saurichthys? indicus, De Kon. Pl. VIII, fig. 6 et 7.

Les dents que je rapporte avec quelque doute au genre *Saurichthys* établi par M. Agassiz, à cause de leur forme comprimée, sont très-petites, très-luisantes, et d'une couleur brunâtre. Des deux échantillons examinés, l'un a 2 et l'autre 6 millimètres de long. Ce dernier est fortement strié à sa base et ressemble au *S. Mongeoti*, Ag. Il est un peu moins comprimé que le second, dont la surface est entièrement lisse. Tous deux ont leur extrémité supérieure très-pointue et leurs côtés tranchants. La coupe transversale est subovale.

Ces dents proviennent du calcaire à *Productus* de Vurcha.

2. Acrodus Flemingianus, De Kon. Pl. VIII fig. 5.

Dent de forme subtriangulaire, lorsqu'elle est vue de face et subellipsoïdale, vue de dessus. Son émail est très-luisant, d'une couleur brune foncée, occupant à peu près la moitié de la longueur totale de la dent et y produisant un monticule pointu dont la surface est sillonnée de petites stries longitudinales, légèrement infléchies vers le point culminant de la dent, très fortement prononcées à leur base et s'effaçant presque complètement sur la crête de l'émail. La racine est très-comprimée, légèrement arquée à sa base et assez poreuse.

J'ai pu étudier deux échantillons de cette espèce. L'un a quinze millimètres de large, sur 8 millimètres de long; l'autre n'a que 7 millimètres de large. Tous deux se trouvent dans la collection de la société géologique de Londres.

Cette espèce a quelques rapports avec l'*A. Gaillardoti*, Ag. Elle en diffère principalement par la forme beaucoup plus arquée de sa racine. Elle a été trouvée dans la même localité que la précédente.

5. Acrodus N. sp. ?

Cette espèce est très-voisine de l'*A. lateratis*, Ag. Elle est plus petite que la précédente et d'une forme beaucoup plus elliptique et moins transverse à sa base. Elle provient du calcaire de Chederoo.

4. Orthoceras decrescens, De Kon. Pl. VIII, fig. 4.

Coquille de forme conique, très-allongée, dont le moule interne est seul connu. Sa section transverse est parfaitement circulaire. Son siphon est central et assez étroit. Le diamètre de la loge terminale est de 2 $^1/_2$ centimètres; celui de la sixième cloison est de 2 centimètres. L'échantillon a une longueur totale de 12 centimètres, dont la dernière loge en occupe 8. Les cinq cloisons connues présentent cette particularité, que leur longueur décroit régulièrement. Ainsi, tandis que la 6me a 12 millimètres de long, la 5me n'en a que 10 et la seconde n'en a plus que 5.

C'est cette conformation que je n'ai rencontrée chez aucune autre espèce, qui m'a suggéré le nom sous lequel j'ai désigné cet *Orthoceras*. La surface du moule est entièrement lisse; il a été rencontré dans le calcaire carbonifère de Moosakhail.

5. Orthoceras rachideum, De Kon.

Les échantillons de cette espèce sont dépouillés de leur test. Sa longueur a dû être considérable, l'accroissement du diamètre n'ayant été que relativement très-faible pendant le développement de l'animal.

Le principal échantillon composé de 11 ou de 12 cloisons de même longueur, mesure 12 centimètres, en sorte que chaque cloison a environ un centimètre de long; son plus petit diamètre est de 3 $^1/_2$ centimètres et son plus grand de 4 centimètres. On ne remarque aucun ornement sur la surface. Le siphon est très large et ressemble à celui de l'*O. cochleatum*, Schl., espèce dont celle-ci est assez voisine.

L'un des échantillons est accompagné du *Prod. semireticulatus*, Martin. Il ne peut donc y avoir aucun doute sur la nature carbonifère de la roche calcaire de Subbee qui le renferme.

6. Orthoceras vesiculosum, De Kon.

Cette espèce est très-remarquable par les globules calcaires

que renferment ses cloisons. Ces globules ou concrétions arrondies, qui semblent avoir été produits par des petites vésicules, n'ont rien de bien régulier quant à leur forme et à leur nombre, et on aurait pu croire à leur formation accidentelle, si plusieurs échantillons n'avaient offert le même caractère.

La forme de cet *Orthoceras* est presque complètement cylindrique. Sa longueur a dû être considérable. Sa surface externe est entièrement lisse; la surface interne des cloisons est rugueuse et comme chagrinée. Les cloisons sont régulières, la distance de l'une à l'autre équivaut à un peu plus du cinquième du diamètre de la coquille. Le siphon est très-large et central; je n'ai pas pu m'assurer s'il était cylindrique ou en chapelet.

Le principal des fragments observés possédait une longueur de 7 centimètres et était composé de 5 cloisons équidistantes. Le diamètre de la coquille est de 5 centimètres et celui du syphon de 1 $^1/_2$ centimètre. Le test de ce dernier est à peu près de 2 millimètres d'épaisseur.

7. Nautilus Flemingianus, De Kon. Pl. VIII, fig. 2.

Cette espèce est remarquable par les tubercules latéraux dont son dernier tour de spire est garni. Si j'en juge pour les dimensions du seul fragment qui m'ait été soumis, sa taille a dû être assez considérable.

Au premier aspect elle offre quelque ressemblance avec le *N. tuberculatus*, Sow.; elle s'en distingue facilement par la forme de ses tubercules et par la distance de ses cloisons. Chez le *N. Flemingianus* ces tubercules sont très-allongés et alternants, c'est-à-dire, que sur deux cloisons l'une est tuberculée et l'autre ne l'est pas, tandis que les tubercules de l'espèce décrite par Sowerby, sont beaucoup plus arrondis à leur base et forment en quelque sorte une couronne autour de l'ombilic; ils sont en outre plus saillants et n'offrent rien de régulier dans leur distribution par rapport aux cloisons. Sur l'espèce décrite par Sowerby, ils sont très-sensibles déjà aux premiers tours de spire, tandis qu'on les y remarque à peine chez le *N. Flemingianus*. Les cloisons de celui-ci ont leurs bords latéraux et dorsaux faiblement sinueux. Le fragment observé et figuré, laisse entrevoir l'existence de 4 tours de spire.

En complétant le dernier tour, on parvient à prouver qu'il a dû être composé d'environ 40 cloisons, et que son plus grand

diamètre a été de 19 centimètres. Vue de face, la dernière cloison visible a offert une hauteur de 6 centimètres, tandis que celle du tour précédent, correspondant à celle-ci n'offrait que 3 centimètres de hauteur, leur largeur est un peu plus forte; leur forme dans cette même position est celle d'un ovale irrégulièrement comprimé de deux côtés opposés (V. pl. VIII, fig. 2 *a*). Le siphon peu visible, m'a paru assez fort et situé vers le tiers supérieur de la hauteur. Les tours de spire ne se recouvrent pas.

8. Nautilus Burtini, Galeotti, 1837, Mém. cour. de l'Académie de Bruxelles, t. XII, p. 140, Pl. VIII, fig. 3.

En comparant l'échantillon du Punjaub avec des échantillons de l'espèce décrite par Galeotti et provenant des sables éocènes des environs de Bruxelles, je n'ai pu trouver aucun caractère distinctif entre eux. Il est donc probable que l'exemplaire figuré dans ce mémoire ne provenait pas du terrain carbonifère, mais bien d'une couche nummulitique qui se trouve dans l'Inde. C'est au reste l'opinion exprimée par M. Fleming lui-même, qui n'a pas trouvé l'échantillon en place, mais sur un tas de fragments de roches carbonifères, destinées à empierrer une route (1).

9. Goniatites? gangeticus, De Kon. Pl. V, fig. 2.

Je n'ai rangé cette espèce parmi les *Goniatites* que parce que je n'ai pu découvrir aucune dentelure sur les bords des lobes des cloisons. Il ne serait pas impossible que ces dentelures eussent été anéanties par les intempéries auxquelles l'échantillon a été soumis.

Cette espèce est assez fortement comprimée, planorbiforme; ses premiers tours de spire sont recouverts à moitié par ceux qui les suivent; en sorte que l'ombilic est très-évasé et que son diamètre équivaut à peu près au tiers du diamètre total de la coquille. Son dos est arrondi; sa surface paraît avoir été lisse. Le nombre de ses cloisons est de 20 - 22; leur hauteur équivaut environ au double de leur largeur. Le lobe dorsal est partagé en deux par une petite selle saillante à contour linguiforme.

(1) Voici la note que j'ai trouvée jointe à l'échantillon : *This fossil was found among the debris of carboniferous limestone. It probably however has weathered out of nummulitic limestone.*

Les lobes latéraux sont plus étroits que les selles qui les produisent ; ceux-ci, aussi bien que les selles, sont arrondis et ne ressemblent en rien à ceux de la plupart des Goniatites carbonifères, chez lesquels ils sont presque toujours anguleux.

L'échantillon figuré n'a que 4 centimètres de diamètre ; la hauteur du dernier tour de spire est de 16 millimètres et sa largeur de 8 millim., le diamètre de l'ombilic est de 15 millimètres.

10. Ceratites Lawrencianus, De Kon. Pl. VI, fig. 3.

Cette belle espèce est remarquable par la forme des lobes et des selles qui bordent ses cloisons. Sa forme générale est celle d'un disque aplati à bords arrondis. Sa surface paraît avoir été lisse, son test n'ayant laissé subsister aucune trace de strie, où de sillon sur le moule interne qui sert à cette description. Ses tours de spire sont fortement embrassants et ne produisent qu'un très-petit ombilic. Le lobe dorsal est très-large et partagé en deux par une petite selle médiane ; il est beaucoup moins profond que les lobes latéraux, mais sa largeur et ses dentelures au nombre de 5 ou 6 ressemblent beaucoup à ceux de ces derniers lobes ; il se relie au lobe latéral supérieur par une selle peu élevée, étroite et assez aiguë ; la selle latérale supérieure est au contraire très-haute mais beaucoup plus large à sa base que la précédente et comme celle-ci, assez aiguë, tandis que la selle latérale inférieure est arrondie et peu élevée ; cette dernière se relie au fond de l'ombilic, par 7 ou 8 dentelures, qui font les fonctions de lobes auxiliaires.

Je ne connais aucune espèce à laquelle celle-ci soit comparable, si ce n'est le *C. Davidsonianus* qui en diffère par la forme beaucoup plus arrondie de ses selles.

Le nombre des loges a dû être approximativement de 30 ; le diamètre total de 10 centimètres ; celui de l'ombilic, de 14 millimètres ; la hauteur du dernier tour de spire de 5 $^1/_2$ millimètres et son épaisseur de 3 centimètres, tandis que la hauteur du tour précédent n'est que de 28 millim. et son épaisseur de 18 millimètres. La distance qui sépare le dos de l'avant dernier tour de spire de celui du dernier tour, est de 3 $^1/_2$ cent.

11. Ceratites Davidsonianus, De Kon. Pl. VI, fig. 2.

Cette espèce a beaucoup de rapports avec la précédente, dont elle ne diffère que par sa taille et par la forme de ses cloisons.

Comme cette dernière, elle est discoïde et ne possède qu'un faible ombilic. Sa surface est lisse; sa loge terminale est très grande et occupe environ la moitié du dernier tour de spire. Ses lobes et ses selles sont analogues à ceux du *C. Lawrencianus*, mais les uns sont moins profonds et les autres beaucoup plus arrondies que chez ce dernier, et la partie qui se relie à l'ombilic est composée d'un plus grand nombre de dentelures ou zig-zag.

Cette espèce dont j'ai pu examiner un échantillon complet et probablement adulte, n'a que 6 centimètres de diamètre. La hauteur de la bouche est d'environ 3 cent. et sa largeur de 1 cent. Le diamètre de l'ombilic est également de 1 cent.

L'échantillon fait partie de la collection de la soc. géol. de Londres. Il provient du calcaire à *Productus* de Vurcha.

12. Ceratites Buchianus, De Kon. Pl. VI, fig. 4.

Espèce très-voisine de la précédente, à laquelle je l'eusse volontiers réunie, sans la circonstance que son ombilic est proportionnellement beaucoup plus grand, et que ses tours de spire ne se recouvrent mutuellement que d'un tiers environ, tandis que dans l'espèce précédente, ils se recouvrent des $^3/_5$ de leur hauteur. En outre sa surface est recouverte d'un assez grand nombre d'ondulations rayonnantes bien prononcées, disposition que n'offre pas celle de l'espèce précédente. La forme de ses cloisons est un peu différente. Le dessin produit par ses lobes et par ses selles offre des sinuosités moins profondes que celles observées sur le *C. Davidsonianus*.

Le diamètre du plus grand des 3 échantillons observés est de 5 $^1/_2$ cent.; celui de l'ombilic équivaut au tiers de cette mesure.

Cette espèce a été découverte avec la précédente dans le calcaire de Vurcha et dans celui de Kaffir-Kote.

13. Ceratites latifimbriatus, De Kon. Pl. VII, fig. 2.

Coquille de forme discoïde, à dos fortement arrondi, remarquable par la forme des dentelures de ses lobes; celles-ci sont en général au nombre de quatre, mais en les examinant à la loupe, on distingue sur les bords de ces mêmes dentelures, des dentelures supplémentaires qui font ressembler chaque pointe à une petite dent de *Carcharias*. Les tours de spire s'enroulent en se recouvrant d'environ des $^2/_3$ de leur hauteur.

La surface est entièrement lisse. Outre le lobe dorsal, dont je n'ai pas pu observer complètement la forme à cause du mauvais état de cette partie de l'échantillon, il possède trois autres lobes assez profonds et ayant tous à peu près la même forme. Les selles correspondantes sont arrondies et ont leurs côtés presque parallèles entre eux. Il se distingue facilement du *C. Lawrencianus*, par l'absence des lobes auxiliaires.

Le nombre des cloisons ou loges a dû être de 15 ou 16 pour un tour de spire, le diamètre de la coquille est de 9 à 10 cent.; celui de l'ombilic de 2 $^1/_2$ cent. et la plus grande épaisseur de la coquille de 3 cent.

Cette espèce a été rencontrée avec la précédente dans le calcaire à *Productus* de Vurcha.

14. Ceratites Lyellianus, De Kon. Pl. VI, fig. 1.

Cette espèce est une des plus grandes parmi celles qui ont été découvertes par M. Fleming. Sa surface est entièrement lisse, son dos est arrondi, son ombilic est grand. Le nombre de ses cloisons a dû être de 18 à 20 comme dans l'espèce précédente, les lobes latéraux sont au nombre de 5 et ont une forme semblable entre eux. Leurs crenelures sont relativement petites et au nombre de 5 ou 6. Les tours de spire se recouvrent très-peu.

Le diamètre total a dû être d'environ 12 centimètres pour l'échantillon figuré, et celui de l'ombilic de 4 cent. La hauteur du dernier tour est de 5 cent.

15. Ceratites planulatus, De Kon. Pl. V, fig. 1.

Cette belle espèce, dont j'ai eu l'avantage d'étudier un échantillon complet et adulte, se distingue de toutes les précédentes par la forme anguleuse de sa partie dorsale. Néanmoins cette forme n'existe pas dans les jeunes échantillons et ne s'acquiert qu'à un certain âge de l'animal, comme cela arrive également pour quelques *Nautilus* et *Ammonites*, ainsi que le démontrent les fig. 1 *d* et 1 *c*.

La surface est presque lisse et luisante; on n'y remarque que quelques fines stries et ondulations rayonnantes produites par l'accroissement successif de la coquille.

L'ombilic, en forme d'entonnoir très-évasé, laisse parfaitement distinguer les divers tours de spire de la coquille. Ceux-ci

sont au nombre de 5 ou 6; ils s'embrassent mutuellement dans les $^3/_4$ environ de leur hauteur. Le nombre des cloisons est de 30-32 par tour de spire; la dernière loge est très-grande et occupe la moitié de la coquille. Les lobes sont peu profonds et finement crenelés; le lobe latéral inférieur se relie à l'ombilic, au moyen d'une courbe sinueuse entièrement exempte de dentelures; le lobe dorsal est partagé en deux par une petite élévation très-anguleuse à son sommet et destiné au passage du siphon. Les selles sont arrondies et d'une élévation médiocre. Le plus grand diamètre de cette espèce est de 8 $^1/_2$ cent., celui de son ombilic de 18 millim., la hauteur de la bouche est de 4 cent., son épaisseur de 19 millimètres et la largeur du dos à l'extrémité bucale, de 4 millim. La forme de cette espèce a quelques rapports avec le *C. semipartitus*, Montf., il en diffère essentiellement par la forme et le nombre de ses lobes.

16. Ceratites Hauerianus, De Kon. Pl. IV, fig. 5.

Cette espèce dont je n'ai malheureusement trouvé qu'un seul fragment parmi les fossiles du Dr Fleming, a beaucoup de rapports avec le *Goniatites Haidingeri*, v. Hauer, lequel pourrait fort bien n'être aussi qu'un *Ceratites*.

Comme dans ce dernier, les cloisons sont très-nombreuses et composées d'un grand nombre de lobes et de selles très-étroits, dont ceux qui se trouvent vers le milieu du tour de spire, sont un peu plus larges que les autres; ils sont au nombre de 5. Malheureusement l'échantillon est tellement fruste qu'il m'est impossible de décrire exactement la forme de ces parties, qui sont au minimum au nombre de 8 chacune. Le dos est caréné, assez tranchant. L'épaisseur de la coquille a dû être d'environ 2 $^1/_2$ cent. La bouche, vue de face a dû avoir une forme subtriangulaire, ainsi que le démontre la fig. 5 *a*.

17. Ceratites Murchisonianus, De Kon. Pl. VIII, fig. 1.

Je ne connais de cette grande et belle espèce qu'une moitié, sur laquelle je n'ai même pu découvrir aucune trace de cloisons; Il est probable que le seul fragment connu, représente à lui seul, à peu près la dernière loge, et que c'est par ce motif que les cloisons manquent. Celles-ci ont dû avoir quelque analogie avec celles de l'espèce suivante.

Cet échantillon démontre que les tours de spire étaient légère-

ment comprimés sur les côtés, que leur partie dorsale était arrondie, qu'ils étaient faiblement embrassants et qu'ils produisaient par leurs contours un large ombilic. La surface est couverte d'assez fortes côtes transverses, n'occupant que les côtés de la spire et ne se prolongeant nullement sur le dos; vu de profil, celui-ci forme une courbe très-régulière. Les côtes ne sont pas d'égale épaisseur; elles se bifurquent ou se trifurquent sans ordre et sont au nombre de 18 sur l'échantillon figuré; comme celles qui se rapprochent de l'extrémité de la bouche, sont moins fortes que celles qui les précèdent, il est probable que les côtes des premiers tours étaient fortement accentuées, comme cela se remarque souvent chez les Ammonitidées.

Le fragment décrit possède un diamètre de 18 centimètres, la hauteur du dernier tour de spire est de 6 $^1/_2$ centim. et son épaisseur de 5 cent.

18. Ceratites Flemingianus, De Kon. Pl. VII, fig. 1.

Cette magnifique espèce, que je dédie au savant qui en a fait la découverte, est la plus grande de toutes celles qui sont connues jusqu'à présent.

Malheureusement le Dr Fleming n'en a trouvé qu'un fragment, représentant à peu près la dernière loge de la coquille et la majeure partie de la dernière cloison. Cette coquille a dû être composée de tours de spire comprimées latéralement, à dos arrondi et dont la largeur égalait à peu près deux fois la hauteur. Ils étaient faiblement embrassants et leur coupe transversale représente assez bien la moitié d'une ellipse dont le grand axe équivaudrait à quatre fois la longueur du petit (V. Pl. VII, fig. 1, *a*). La surface est couverte d'un très-grand nombre de côtes transverses, irrégulières, tantôt très-minces, tantôt plus épaisses, produites par l'accroissement successif de la coquille. Celles-ci sont traversées perpendiculairement par de petites côtes plus régulières, parallèles entre elles au nombre de 60 environ pour chaque côté et décrivant la même courbe que la spire elle-même. Il résulte de cette disposition que la surface paraît comme enveloppée d'un réseau à mailles d'égale largeur, mais de longueur irrégulière, dépendant de la nature des côtes transverses qui les produisent. La forme des cloisons est très-remarquable. Le lobe latéral supérieur est très-profond et assez large, puisqu'il occupe à peu près le $^1/_3$ de la hauteur totale du tour de spire. Il se

distingue par le grand nombre de petites dentelures dont il est muni. Le lobe latéral inférieur est pointu, en forme d'entonnoir et n'offre pas la moindre trace de dentelures. Les trois selles qui relient ces lobes, sont arrondies et ne présentent rien de particulier.

La seule espèce de *Ceratites* connue jusqu'ici, qui ait quelques rapports avec celle-ci, est le *C. parcus*, v. Buch. Les côtes transverses de cette dernière sont plus nombreuses et les côtes longitudinales manquent. En outre, la conformation des cloisons est toute différente dans les deux espèces.

Le diamètre total de cette espèce est de 25 centimètres; la hauteur de la bouche est de 6 $^1/_2$ cent., et sa largeur de 4 cent. Le dernier tour de spire, recouvre le précédent d'un demi centimètre.

Ces deux dernières espèces se trouvent dans un grès jaune brunâtre, tandis que la plupart des autres proviennent d'une roche calcareuse.

19. Nerinæa ? N. sp. ?

Parmi les fossiles qui m'ont été confiés par M. le Dr Fleming, j'ai rencontré un moule interne d'un gastéropode qui m'a paru avoir les caractères des Nerinées, mais que je ne suis pas parvenu à déterminer ; aucune des espèces décrites par A. d'Orbigny, M. Eudes Deslongchamps et autres ne ressemblent à celle-ci.

L'échantillon du Punjaub possède les 6 derniers tours de spire, dont la longueur totale est de 8 cent. Le diamètre du dernier tour est de 4 $^1/_2$ cent. Celui-ci porte un sillon parallèle à son bord inférieur, probablement produit par une dent de la bouche; il est en outre garni de 6 ou 7 gros tubercules. L'axe columellaire est très-épais. L'angle formé par la spire est de 25°.

Il est probable que cette espèce n'est pas carbonifère. La couleur blanc grisâtre du calcaire dont le moule est formé, la nature cristalline et blanchâtre des fragments de la coquille encore adhérents éloignent ce fossile de tous les autres et me font supposer qu'il y a ici une erreur à rectifier, et j'appelle sur cette espèce l'attention des paléontologiste de l'Inde.

20. Macrocheilus avellanoïdes, De Kon. Pl. IV, fig. 4.

Coquille subfusiforme, à spire aiguë. Sa spire est composée

de 6 ou 7 tours assez bombées, un peu déprimées du côté de la suture ; le dernier tour est très-grand et occupe plus de la moitié de la longueur totale de la coquille. L'ouverture de la bouche est allongée, subovale ; elle ne possède pas de callosité. La surface est lisse ; le test est assez épais, surtout vers les sutures.

Son angle spiral est d'environ 70°.

Des deux échantillons connus de cette espèce, l'une possède une longueur de 3 $^1/_2$ cent. et l'autre de 4 $^1/_2$ cent. Le dernier tour de spire de celui-ci a 27 millim. de diamètre et 30 mill. de longueur.

Cette espèce se rapproche du *M. Schlotheimi*, d'Arch., mais il en diffère par son angle spiral, par la longueur de son dernier tour de spire et par l'absence de tout ornement à sa surface.

21. Macrocheilus depilis, De Kon. Pl. XII, fig. 3.

Quoique je ne connaisse qu'un moule interne de cette espèce, je n'ai pas craint de la décrire et de lui imposer un nom nouveau. En effet, ce moule par sa forme allongée, son angle spiral et la convexité de ses tours de spire diffère de toutes ses congénères qui me sont connues. Le seul échantillon examiné par moi, n'est composé que de 4 tours de spire, mais il est probable qu'il en a possédé 8 ou 9. Sa longueur est de 6 centim. Le dernier tour a dû occuper à lui seul, à peu près la moitié de la longueur de la coquille ; il a 3 $^1/_2$ cent. de long. Son diamètre est de 28 millimètres. Angle spiral = 39°.

22. Bellerophon Jonesianus, De Kon. Pl. IV, fig. 2.

Cette espèce est de forme globuleuse, et aussi haute que large. Dans le jeune âge, sa surface est couverte de petites côtes transverses imbriquées, produites par l'accroissement successif de la coquille, ainsi que cela s'observe facilement dans l'échantillon représenté par la fig. 2 *a*, dont une partie du dernier tour de spire et de la callosité buccale a été enlevée. Ces côtes, qui sur le dernier tour de spire, se transforment chez les adultes, en larges rides peu marquées, forment un angle très ouvert avec la carène dorsale ; celle-ci est fort peu saillante et n'a qu'un millimètre de largeur Les divers tours de spire se recouvrent complètement les uns les autres, l'ombilic est presque

nul. L'extrémité inférieure de la partie de la bouche qui vient aboutir à l'ombilic, est assez épaisse et faiblement repliée en dehors. La callosité buccale est très-étendue et recouvre à peu près la moitié du dernier tour de spire. Le test est épais. La fente est étroite et profonde.

Cette espèce a beaucoup d'analogie avec le *B. hiulcus* dont elle diffère par la forme beaucoup plus étroite et le nombre plus considérable de ses côtes d'accroissement, ainsi que par la faible largeur et la saillie de sa carène dorsale.

Des 8 échantillons observés, le plus grand a cinq cent. de haut et autant de large; l'ouverture de la bouche est d'environ 2 cent. de hauteur. Ils proviennent tous du calschiste subordonné au calcaire à *Productus* de Chederoo.

23. Bellerophon orientalis, De Kon. Pl. IV, fig. 3.

Cette espèce est beaucoup plus petite et un peu moins globuleuse que la précédente. Elle est un peu plus haute que large. Sa surface est ornée de petites côtes transverses d'accroissement, produites par des stries fines et serrées et formant un angle assez aigu sur la bande dorsale. Celle-ci donne lieu à un sillon très-étroit et très-peu profond. Par cette disposition le *B. orientalis* se distingue facilement du *B. tenuifascia*, dont la bande dorsale est saillante et avec lequel il a, quant aux autres caractères, la plus grande analogie.

Le seul échantillon observé, n'a que 15 millim. de long, sur 12 m. de large.

24. Bellerophon decipiens, De Kon. Pl. III, fig. 1.

Cette espèce est l'une des plus remarquables de celles qui me sont connues. Elle est un peu plus longue que large. Sa surface est presque lisse; la bande dorsale produite par le sinus buccal est très-étroite et peu prononcée. Les côtes d'accroissement sont très-larges et il eut été très-difficile de les distinguer, si par une longue exposition aux intempéries de l'air, la surface de l'échantillon figuré n'eut été légèrement altérée. Dans cette altération, les côtes ont été nettement séparées par des sillons très-étroits, mais profonds, que l'on dirait creusés, au moyen d'un burin et dont le dessin rend très-bien la forme et la direction. Ils sont au nombre de 16 de chaque côté et courbés en demi cercle, de façon qu'ils se rejoignent au sil-

lon dorsal, par un angle très-aigu. On peut conclure de cette disposition, que la fente buccale a dû être profonde et que la partie supérieure de la bouche a dû être échancrée par un sinus très-prononcé. L'ombilic est nul et le test très-épais.

La hauteur du seul échantillon connu, est de 6 cent.; sa largeur de 5 $^1/_2$. Les côtes ont généralement 4 mill. de largeur.

25. Dentalium herculeum, De Kon. Pl. III, fig. 10, 11 et 12.

Cette espèce est remarquable par sa grande taille et l'épaisseur considérable de son test. Elle a la plus grande analogie avec mon *D. ingens*, du calcaire carbonifère de Visé.

Comme ce dernier, elle a sa surface couverte de stries d'accroissement irrégulières et rendue rugueuse par leur présence; ces stries sont un peu obliques à l'axe et montrent que l'ouverture de la coquille a dû être légèrement en biseau. Elle diffère de l'espèce de Visé, par sa forme conique régulière et par l'épaisseur plus grande de son test, ainsi que le démontrent les coupes transversales représentées pl. VII, fig. 10, *a* et 12 *a*, et la coupe longitudinale fig. 11. La coupe fig. 12, *a* offre encore une autre particularité, qui consiste dans la présence d'un bourrelet longitudinal, très-saillant et transformant la forme circulaire de l'intérieur de la coquille en une forme semi-lunaire. Mais cette forme n'est qu'accidentelle et ne m'a été offerte que par un seul échantillon, parmi les 7 qui ont été soumis à mon examen.

Le plus grand des échantillons avait 7 cent. de long et 1 $^1/_2$ de diamètre du côté de l'ouverture; mais il est probable que les échantillons complets atteignent au moins 15 cent. de longueur.

26. Solenopsis imbricata, De Kon. Pl. III, fig. 5.

Cette espèce est transverse et presque 3 fois plus large que longue. Son côté antérieur est très-court et son bord est assez régulièrement semicirculaire; le postérieur est limité par une courbe se rapprochant de l'ellipse. Le bord ventral est faiblement sinueux. Les crochets sont très-petits et font à peine saillie au-dessus du bord dorsal. La surface est lisse; on y remarque 6 ou 7 lamelles imbriquées, parallèles au bord ventral et produites par l'accroissement successif de la coquille. Les valves sont déprimées et très-peu profondes.

Longueur du plus grand des 2 échantillons connus, 17 millimètres, largeur 44 mill.

Du calcaire de Vurcha.

27. Pecten crebristria, De Kon. Pl. III, fig. 5.

La forme de ce petit *Pecten* est presque complètement circulaire ; ses valves sont faiblement mais régulièrement bombées. Leur surface est couverte d'un grand nombre de petites côtes rayonnantes, souvent bifurquées, d'épaisseur inégale et irrégulièrement distribuées sur toute l'étendue des valves. Les stries d'accroissement sont à peine sensibles et ne s'observent bien qu'à la loupe. Les oreillettes sont petites et coupées à angle droit.

La longueur du seul échantillon connu est de 16 mill. ; sa largeur de 14 mill.

28. Pecten asiaticus, De Kon. Pl. III, fig. 6.

Cette espèce, beaucoup plus grande que la précédente est un peu plus large que longue. Elle est faiblement, mais assez régulièrement bombée. Sa surface est ornée de 12-15 côtes rayonnantes, très-apparentes surtout vers le milieu de leur longueur, mais s'effaçant en partie vers leur partie marginale. Dans chaque sillon formé par ces côtes, on observe 3-5 côtes beaucoup plus minces et moins régulières que les précédentes et qui sont également le mieux prononcées dans la partie supérieure et centrale des valves. Les stries d'accroissement sont à peine sensibles, même à l'aide d'un verre grossissant. Les oreillettes sont petites, de la forme d'un triangle rectangle. Elles sont couvertes de petites stries parallèles au bord cardinal. Le crochet est assez proéminent. Cette espèce possède à première vue quelques rapports avec le *P. plicatus,* Phill., mais en l'examinant avec soin, on l'en distingue facilement par ses petites côtes, qui font totalement défaut sur ce dernier.

La longueur est de 4 cent. et la largeur de 4 $^1/_2$ cent.

29. Pecten Flemingianus, De Kon. Pl. III, fig. 4.

Cette espèce de taille médiocre, est plus longue que large et de forme subovale. Sa surface est ornée d'un petit nombre (8-9) de côtes rayonnantes, peu prononcées ; l'espace laissé libre entre ces côtes est presque complètement lisse ; on n'y observe que des stries d'accroissement très-faibles et à peine

visibles à l'œil nu. Les oreillettes sont petites, de forme triangulaire et leur surface est lisse.

La longueur du seul échantillon connu est de 16 millim. et sa largeur de 14 millim.

30. Anomia Lawrenciana, Fleming. Pl. III, fig. 7, 8 et 9.

C'est à coup sûr l'une des coquilles les plus curieuses parmi celles qui ont été rapportées de l'Inde par le Dr Fleming. Celui-ci m'ayant exprimé le désir de la dédier à Sir Henri Lawrence, Gouverneur du Punjaub, je me suis empressé de m'y conformer et de lui conserver ce nom, qui servira en même temps à rappeler l'époque de sa découverte.

De même que la plupart de ses congénères, cette espèce n'a rien de bien régulier dans sa forme ; en effet, aucun des trois échantillons que j'ai examinés ne ressemble parfaitement aux deux autres, quoiqu'il soit facile de s'apercevoir au premier coup d'œil, qu'ils appartiennent à la même espèce. Chez tous les trois, la valve supérieure est conique, mais chez les deux premiers (fig, 7 et 8), ce cône est tronqué et chez le troisième, le sommet est légèrement incliné sur le côté et rappelle la forme de certains *Capulus* (fig. 9). Le test est très-brillant et a tout à fait l'apparence de celui des espèces vivantes. Sa surface est chargée d'un grand nombre de stries et rides irrégulières, produites par l'accroissement successif de la coquille. Ces rides servent par-ci par-là de base à de petits tubes, semblables à ceux que portent certains *Productus ;* la distribution de ces tubes n'a rien de régulier, ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte, par la simple inspection des figures. Le test est feuilleté et extrêmement mince.

Je n'ai pu observer la valve inférieure que sur un seul échantillon. Elle est de forme circulaire, entièrement lisse et faiblement sillonnée dans son milieu ; ce qui dépend probablement de la forme du corps sur lequel elle a été attachée. Vers son centre, on aperçoit quatre petites taches circulaires (fig. 7, *b*) de couleur un peu plus foncée que le reste de la coquille et qui m'ont parues être la base de petits tubercules internes.

Les dimensions varient trop pour les indiquer ici ; on peut facilement les prendre sur les figures qui ont été faites avec le plus grand soin.

31. Fenestella? Sykensis, De Kon. Pl. I, fig. 1.

C'est avec un certain doute que j'ai placé cette espèce dans le genre *Fenestella*. J'ai été amené à agir ainsi, par l'absence complète de toute trace de pores ou de stries à la surface de l'échantillon observé, quoique celui-ci fut d'une parfaite conservation.

Ce Bryozoaire est en forme d'éventail, irrégulièrement plissé, composé d'un grand nombre de rayons soudés entre eux et dont la direction n'est marquée que par un faible épaississement et surtout par les séries de petites ouvertures circulaires qui les bordent. La disposition de ces ouvertures démontre suffisamment que les rayons se bifurquent une ou plusieurs fois pendant le développement du Polypier et que cette bifurcation est la principale cause de son rapide élargissement.

Ces ouvertures sont presque toutes de même grandeur et ont un peu plus d'un demi millimètre de diamètre, On en compte ordinairement 7 sur une étendue d'un centimètre.

32. Phyllopora? cribellum, De Kon. Pl. I, fig. 2.

Cette espèce est formée d'une plaque calcareuse irrégulièrement ondulée, très-mince et percée d'un très-grand nombre de petites ouvertures ovales, assez régulièrement disposées en quinconce. 8 de ces ouvertures prises sur une même ligne, occupent une longueur d'un centimètre. Le reste de la surface est parfaitement lisse.

Je n'en ai vu qu'un seul échantillon.

33. Phyllopora? Jonesiana, De Kon. Pl. I, fig. 3.

La plaque calcareuse de cette espèce est un peu plus épaisse que celle de l'espèce précédente, mais sa forme est à peu près la même. Les ouvertures dont elle est criblée sont beaucoup plus grandes; leur forme est circulaire et elles sont légèrement creusées en entonnoir. Leur disposition en quinconce est beaucoup moins régulière; on n'en compte que 4 ou 5 par centimètre. Un seul échantillon connu.

34. Retepora? lepida, De Kon. Pl. I, fig. 5.

Ce n'est qu'avec doute que je place cette espèce parmi les *Retepora* parce qu'il m'a été impossible d'observer la moindre trace de pore sur l'unique échantillon qui m'en a été soumis; il ne serait pas impossible qu'elle dût être rapportée au

genre *Fenestella* ou à quelque autre genre voisin de celui-ci.

Elle consiste en une sorte de réseau très-mince en forme d'éventail, composé d'un grand nombre de petits rameaux, dont les nombreuses bifurcations lui permettent de s'élargir promptement. Ces rameaux qui ne sont pas tout à fait parallèles entre eux, sont garnis extérieurement de petites stries longitudinales, ondulées et visibles seulement à l'aide d'un instrument grossissant; ils sont reliés entre eux par de petites branches transversales, plus minces que les rameaux principaux, presque perpendiculaires à ceux-ci, mais rarement parallèles entre elles et parfaitement lisses à leur surface. Les fenestrules formées par ces intersections sont presque toutes quadrangulaires et à peu près aussi hautes que larges. Les plus grandes ont un millimètre de côté.

35. Fenestella ? megastoma, De Kon. Pl. II, fig. 3.

Je n'ai pas plus de certitude à l'égard de la détermination générique de cette espèce, que je n'en ai à l'égard des espèces précédentes. Je la place de préférence dans le genre *Fenestella*, à cause de sa ressemblance avec la *F. crassa*, M'Coy.

Elle est composée de rayons subparallèles entre eux, dont la surface visible (probablement la postérieure) est garnie de très-petites stries longitudinales visibles à la loupe et semblables à celles qui ornent l'une des surfaces de quelques autres espèces. Les rameaux principaux se bifurquent de distance en distance et se relient entre eux au moyen de branches transversales, disposées perpendiculairement à ceux-ci; ces branches accessoires ont les mêmes dimensions que celles que possèdent ses rameaux principaux.

Les fenestrules ainsi produites, sont plus longues que larges; leur forme est celle d'un parallélogramme à angles arrondis; trois séries rayonnantes ont une longueur d'un centimètre.

Cette espèce diffère de la *F. crassa* par la forme beaucoup plus raccourcie de ses fenestrules et la distance de ses rameaux principaux.

36. Polypora fastuosa, De Kon. (1844 Descr. des anim. fossiles p. 7, pl. A, fig. 5.) pl. I, fig. 4.

Je n'ai pu trouver aucune différence entre l'échantillon in-

dien et celui que j'ai découvert dans le calcaire carbonifère des environs des Ecaussinnes. Une partie du premier accidentellement altérée par une action mécanique, m'a fait voir que les pores dont sa surface antérieure est ornée, servaient d'orifice à de petits tubes faiblement recourbés, ayant leur origine sur l'axe même des rameaux principaux et se dirigeant obliquement de bas en haut de chaque côté, ainsi que le démontre la portion grossie, représentée par la fig. 4. *a*.

Cette belle espèce de *Polypora* a été découverte par M. le Dr Fleming dans le calcaire à *Productus* de Moosakhail.

Parmi les fossiles du Punjaub, j'ai rencontré quelques fragments de tiges qui me semblent avoir appartenu à deux espèces différentes de *Poteriocrinus*, mais qu'il m'a été impossible de déterminer spécifiquement. L'un de ces échantillons, était accompagné du *Productus spinulosus*, Sow. La présence de ce dernier fossile est une preuve de l'origine carbonifère de ces tiges.

37. Philocrinus cometa. De Kon. Pl. II, fig. 1.

En décrivant cette espèce, j'indiquerai les caractères du nouveau genre que je me vois forcé de créer pour elle. Ces caractères consistent principalement dans l'existence de 5 pièces basales de forme quadrangulaire, alternant avec cinq rangées de pièces radiales, au nombre de deux pour chaque rayon. La seconde pièce est cunéïforme et supporte à son tour deux séries de pièces brachiales également au nombre de 2; chacune de ces séries donnant enfin naissance à deux séries composées d'un grand nombre de pièces digitales, produisant ainsi 20 digitations libres. Toutes les autres pièces sont soudées entre elles et forment le calice.

Dans l'espèce que je décris, le calice est peu évasé, la surface extérieure est parfaitement lisse et les doigts ou ramifications sont composées au moins de 50 articles. Les faces articulaires de ceux-ci n'étant pas parallèles entre elles, il en résulte que la partie dorsale ou externe des rayons semble être ornée d'un dessin en forme de zic-zag. Je n'ai découvert aucune trace de ramules.

Le genre *Philocrinus* se distingue des genres *Encrinus* et *Millericrinus*, par le nombre de ses pièces radiales, qui n'est que de 2, tandis qu'il est de trois chez ces derniers.

Les dimensions du *Philocrinus Cometa* sont les suivantes : longueur du calice 25 millim. ; diamètre 24 mill. ; longueur des bras 6-8 centimètres.

38. Cidaris Forbesianus, De Kon. Pl. III, fig. 1 et 2.

Je ne connais de cette espèce que 7 radioles, ayant beaucoup d'analogie avec ceux du *C. Braunii*, Desor, de S[t] Cassian. Ils sont assez grands, fusiformes, terminés en pointe assez aiguë, déprimés d'un côté et munis de 16 à 18 séries longitudinales de granules, un peu moins prononcés sur le côté aplati que sur le reste de la surface. Souvent ces granules sont reliés entre eux par leur base, et semblent dériver alors de carènes ou de côtes longitudinales et parallèles entre elles. La collerette est grande et lisse ; l'anneau est peu saillant ; le bouton est court et étroit ; la facette articulaire est lisse.

Longueur 5-6 centimètres ; diamètre 12-15 millimètres.

39. Alveotites septosa ? Fleming, 1828. Brit. anim. p. 529. Pl. II, fig. 1, de ce mémoire.

L'échantillon que je rapporte à cette espèce, m'a paru en posséder tous les caractères. Néanmoins comme je n'ai pas eu l'occasion de le comparer à un échantillon anglais, il me reste un léger doute sur l'identité de l'espèce.

40. Michelinia favosa, Goldf. 1826. Petref. German. T. I, p. 4, pl. I, fig. 11.

Un seul échantillon de cette espèce a été découvert par le D[r] Fleming, mais il est identique dans tous ses caractères avec ceux des environs de Tournay. La seule différence insignifiante qu'il m'a montrée, consiste dans l'étendue un peu plus forte et la disposition un peu plus régulière des planchers vésiculaires. La diagonale des calices varie entre 4 et 10 millimètres.

41. Lithostrotion basaltiforme, W. D. Conybeare et W. Phillips. 1822. Outl. of Geol. of England, p. 259.

Quoique l'échantillon indien ne consiste qu'en un moule siliceux, assez mal conservé, je ne crois pas me tromper dans ma détermination en l'identifiant avec l'espèce anglaise que je viens de citer.

42. Lithostrotion irregulare, Phill. 1836. Geol. of Yorks. T. II, p. 202, pl. II, fig. 14 et 15.

L'échantillon de cette espèce est parfaitement identique avec ceux recueillis dans le calcaire carbonifère du Yorkshire. Le diamètre des calices est de 14-16 millimètres.

43. Clysiophyllum indicum, De Kon. Pl. II, fig. 4.

Polypier en cône très-allongé, ayant des bourrelets d'accroissement peu prononcés et très-nombreux. Les cloisons sont très minces et au nombre de 300 environ sur tout le pourtour; examinés à la loupe, on distingue parfaitement des traverses abondantes et très-minces dans les loges interseptales. Les cloisons sont marquées extérieurement par des stries longitudinales très-étroites. Les planchers sont nombreux et lisses dans leur partie centrale. La forme ovale que possède la section transverse de l'échantillon que je viens de décrire m'a parue dépendre d'une sorte de déformation accidentelle. Le diamètre est d'environ 6 centimètres.

Le grand nombre de cloisons dont cette espèce est garnie, permet de la distinguer de toutes ses congénères.

44. Isastræa arachnoïdea, De Kon. Pl. II, fig. 2.

Polypier en masse subgibbeuse, à calices subégaux, de forme polygonale, mais le plus souvent hexagonale, peu profonds, terminés par des bords muraux obtus; cloisons au nombre de 28 a 30 crenelées sur les bords, partant toutes du centre du calice et rayonnant vers les bords en s'épaississant légèrement.

Il sera très-intéressant de constater par de nouvelles observations, si cette espèce provient réellement d'une roche carbonifère, parce que le genre auquel elle appartient, n'a pas encore été trouvé jusqu'ici, plus bas que dans le Muschelkalk.

EXPLICATION DES PLANCHES.

Planche I.

Fig. 1. Fenestella ? Sykensis , De Kon.
Echantillon de grandeur nat. vu de face.
Fig. 2. Phyllopora ? cribellum , De Kon.
Echantillon de grandeur nat.
Fig. 3. Phyllopora ? Haimeana , De Kon.
Echantillon de grandeur nat.
Fig. 4. Polypora fastuosa , De Kon.
Echantillon de grandeur naturelle.
a. Partie grossie , du même.
Fig. 5. Retepora ? lepida , De Kon.
Echantillon de grandeur nat.
a. Partie grossie du même.

Planche II.

Fig. 1. Alveolites septosa ? Phill.
Échantillon de grandeur naturelle.
a. Partie grossie du même.
Fig. 2. Isastræa arachnoïdea , De Kon.
Echantillon de grandeur nat.
a. 2 calices du même grossis au triple de leur grandeur naturelle.
Fig. 3. Fenestella megastoma , De Kon.
Echantillon de grandeur nat. vu de face.
Fig. 4. Clysiophyllum indicum , De Kon.
Echantillon de grandeur nat.
a. Section transverse du même.
Fig. 5. Philocrinus Cometa , De Kon.
Echantillon de grandeur nat.

Planche III.

Fig. 1. Bellerophon decipiens , De Kon.
Echantillon de grandeur nat. vu du côté du dos.
a. Le même , vu de profil.

Fig. 2. Bellerophon Jonesianus, De Kon.
Echantillon de grandeur nat., vu de profil.
a. Autre échantillon de grandeur nat., vu de face et montrant les côtes dont l'espèce est garnie dans le jeune âge.
Fig. 3. Bellerophon orientalis, De Kon.
Echantillon de grandeur nat., vu du côté du dos.
Fig. 4. Macrocheilus avellanoïdes, De Kon.
Echantillon de grandeur nat.
Fig. 5. Ceratites Hauerianus, De Kon.
Echantillon de grandeur nat., vu de profil.
a. Le même, vu du côté de la bouche.

Planche IV.

Fig. 1. Cidaris Forbesianus, De Kon.
Radiole complet, de grandeur nat.
Fig. 2. Id. idem.
Fragment de radiole offrant une variété à granules très-prononcés, de grandeur nat.
a. Section transverse du même.
Fig. 3. Solenopsis imbricata, De Kon.
Echantillon de sa grandeur nat.
Fig. 4. Pecten Flemingianus, De Kon.
Echantillon grossi au double de sa grandeur nat.
a. Ligne indiquant la grandeur nat.
Fig. 5. Pecten crebristria, De Kon.
Echantillon de grandeur nat.
a. Le même grossi au double.
Fig. 6. Pecten Asiaticus, De Kon.
Echantillon de grandeur nat.
Fig. 7, 8 et 9. Anomia Lawrenciana, Fleming.
7. Echantillon de grandeur nat., vu de profil.
7 *a*. Autre échantillon de grandeur nat., vu de dessus.
7 *b*. Le même vu en dessous, afin de montrer la valve inférieure.
8. Le même, vu de profil.
9. Autre échantillon de grandeur nat., vu de profil.
Fig. 10, 11 et 12. Dentalium Herculeum, De Kon.
10. Echantillon de grandeur nat.
10, *a*. Ouverture supérieure du même.
11. Autre échantillon de grandeur nat. partagé en deux dans le sens de la longueur, afin de montrer l'épaisseur du test et la forme de la cavité.
12. Troisième échantillon de grandeur nat.
12, *a*. Ouverture supérieure du même, munie d'une dent ou carène interne.

Planche V.

Fig. 1. Ceratites planulatus, De Kon.
Echantillon adulte de grandeur nat., vu de profil.

a. Le même, vu du côté de la bouche.
b. Lobes du même.
c. Autre échantillon, jeune, vu de face.
d. Le même, vu de profil.
e. Lobes du même.

Fig. 2. Goniatites Gangeticus, De Kon.
Echantillon de grandeur nat., vu de profil.
a. Le même, vu de face.
b. Lobes du même.

Planche VI.

Fig. 1. Ceratites Lyellianus, De Kon.
Echantillon de grandeur nat., vu de profil.

Fig. 2. Ceratites Davidsonianus, De Kon.
Echantillon adulte, de grandeur nat., vu de profil.
a. Lobes du même.

Fig. 3. Ceratites Lawrencianus, De Kon.
Echantillon de grandeur nat., vu de profil.

Fig. 4. Ceratites Buchianus, De Kon.
Echantillon de grandeur nat., vu de profil.
a. Lobes du même.

Planche VII.

Fig. 1. Ceratites Flemingianus, De Kon.
Echantillon réduit à la moitié de sa grandeur naturelle, vu de profil.
a. Section transverse du même, réduite à la 1/2 grandeur nat.

Fig. 2. Ceratites latifimbriatus, De Kon.
Echantillon de grandeur nat., vu de profil.
a. Contour du même, vu de face.

Fig. 3. Macrocheilus depilis, De Kon.
Echantillon de grandeur naturelle, vu du côté du dos.

Planche VIII.

Fig. 1. Ceratites Murchisonianus, De Kon.
Echantillon vu de profil, réduit à la moitié de sa grandeur nat.
a. Section transverse du même, également réduite.

Fig. 2. Nautilus Flemingianus, De Kon.
Echantillon vu de profil, réduit à la moitié de sa grandeur nat.
a. Section transverse des deux premiers tours de spire, également réduite et montrant la place du siphon.

Fig. 3. Nautilus Burtini, Galeotti.
Echantillon de 1/2 grandeur nat., vu de profil.
a. Le même vu du côté du dos.
b. Dernière cloison du même.

Fig. 4. Orthoceras decrescens, De Kon.
Echantillon de 1/2 grandeur nat., vu de profil.
a. Section transverse, du même.

Fig. 5. Acrodus Flemingianus, De Kon.
Echantillon de grandeur nat., vu de profil.

Fig. 6. Saurichthys indicus, De Kon.
Echantillon grossi au triple de sa grandeur nat., vu de profil.
a. Le même, vu de face.
b. Le même, vu de dessus.

Fig. 7. Saurichthys indicus, var. De Kon.
Echantillon grossi au triple de sa grandeur nat., vu de face.
a. Section transverse du même.

J'ai cru rendre service aux paléontologistes en traduisant le mémoire de mon savant ami M. Davidson, auquel j'ai fait allusion au commencement de mon travail et en le faisant suivre ici. On aura ainsi une idée plus complète de la faune remarquable qui semble caractériser l'époque carbonifère dans le Punjaub et qui, tout en se rapprochant par quelques espèces de celle de la même période géologique en Europe, s'en éloigne complètement par plusieurs autres et surtout par l'abondance des *Ceratites*.

VIII. — *Notice sur quelques Brachiopodes carbonifères recueillis dans l'Inde par* MM. *le* D^r^ A. Fleming *et* W. Purdon, *et décrits*

PAR

Th. DAVIDSON.

I. Brachiopodes carbonifères recueillis dans le Punjaub par le D^r^ A. Fleming, pendant les années 1848 et 1852.

Pendant l'excursion géologique que le D^r^ Fleming a entreprise dans la Chaîne salifère (Salt-range) du Punjaub, il a pu recueillir un grand nombre de fossiles qu'il expédia en Angleterre en 1849 et en 1852 et qui vers cette époque furent rapidement examinés par M. de Verneuil, par moi-même et par un ou deux autres paléontologistes.

Quelques uns de ces fossiles ont été indiqués déjà par M. le D^r^ Fleming, dans un mémoire inséré dans le 9^me^ vol. du *Quart. Journ.* (1853), dans le *Journal of the asiatic society of Bengal for* 1853, ainsi que dans l'excellent travail du même auteur, publié à Lahore en 1853 et intitulé : *Report of the geological structure and Mineral Wealth of the Salt-range in the Punjaub.*

A la demande de l'auteur, j'ai soumis à un nouvel examen toutes les espèces de Brachiopodes de l'époque carbonifère

qu'il a recueillis, dans le but de compléter et de rectifier la liste incomplète que j'en avais donnée en 1853 (1).

Il ne me paraît pas nécessaire d'insister ici sur la nature et la structure des roches carbonifères du district, car je ne pourrais que répéter les détails qui en ont été donnés dans les publications mentionnées ci-dessus.

Il me suffira de dire que les fossiles se sont rencontrés dans diverses couches offrant des caractères minéralogiques très-différents. Ainsi, tandis que les unes possèdent une texture crystalline très-prononcée et sont d'une grande dureté, les autres sont tendres et argileuses.

Un petit nombre de fossiles provient de la dolomie, mais il est à remarquer, que la même couche qui est dolomitique dans une localité, est simplement calcareuse dans une autre, distante de quelques milles.

Quoiqu'il en soit, le Dr Fleming admet trois divisions pour les roches carbonifères du district salifère, à savoir :

c. Calcaire supérieur. On y rencontre partout des Brachiopodes et d'autres fossiles.

b. Grès et schistes dans lesquels on n'a trouvé qu'un petit nombre de fossiles.

a. Calcaire inférieur avec grès calcarifère. Ce calcaire renferme généralement en abondance de grands Brachiopodes et d'autres fossiles.

Il est en outre nécessaire de faire observer que les localités les plus riches en fossiles carbonifères, sont Moosakhail, situé dans la Chaîne salifère proprement dite, et Kafir Kote sur la rive orientale de l'Indus, à environ vingt-cinq milles en aval de Kalabag, où la prolongation occidentale de la chaîne salifère s'abaisse jusque sur les rives mêmes de l'Indus.

Le Dr Fleming m'informe en outre, que le plus grand nombre de ces fossiles proviennent de ces localités tandis que quelques uns ont été découverts dans des localités, intermédiaires, telles que Chederoo, Vurcha, Nulle, etc. Il m'assure encore, qu'il est convaincu que toutes les espèces qui seront

(1) Voici les espèces déterminées en 1853 par M. de Verneuil et par moi-même : *Athyris Royssii* ; un *Spirifer* voisin du *S. lineatus* ; *Streptorynchus crenistria* ; *Productus Cora*; *P. Flemingii* ; *P. costatus* et *P. Humboldtii*.

décrites, proviennent de roches carbonifères ; j'ai hâte de faire cette déclaration, parce que deux espèces de *Terebratula* m'ont fort embarrassé et ont élevé beaucoup de doute dans mon esprit, relativement à leur âge ; en effet, elles me rappellent bien plus les formes que l'on est habitué à trouver dans le terrain jurassique, que celles qui se rencontrent dans le terrain carbonifère.

Brachiopodes carbonifères recueillis par le Dr Fleming dans le Punjaub :

Terebratula (*vel* Waldheimia) Flemingii, *Dav.*
— biplicata ? Brocchi, *Var.* ploblematica. *Dav.*
— Himalayensis, *Dav.*
— subvesicularis, *Dav.*
Athyris Royssii, *Leveillé, sp.*
— subtilita, *Hall, sp. Var.* grandis. *Dav.*
Retzia radialis, *Phill. sp. Var.* grandicosta. *Dav.*
Spirifera striata, *Martin. sp.*
— Moosakhailensis, *Dav.*
— lineata, *Martin, sp. Var.*
Spiriferina octoplicata, *Sow. sp.*
Rhynchonella pleurodon, *Phill. sp.*
Camarophoria Purdoni, *Dav.*
Streptorynchus crenistria, *Phill. sp.*
— — *var.* robustus, *Hall.*
— pectiniformis, *Dav.*
Orthis resupinata, *Martin, sp.*
Productus striatus, *Fischer, sp.*
— longispinus, *Sow.*
— Cora, *d'Orb.*
— semireticulatus, *Martin. sp.*
— costatus, *Sow.*
— Purdoni, *Dav.*
Strophalosia Morrisiana, *King.* (?) *var.*

1. Terebratula (vel Waldheimia) Flemingii, *Dav.* Pl. IX, fig. 1 et 2.

Coquille variable dans sa forme, longitudinalement ovale ou faiblement pentagonale ; valves à peu près également profondes et bombées, mais ordinairement fort déprimées ; surface également lisse, exempte de sinus ou de pli. Crochet et ouverture petits et séparés de la ligne cardinale par un petit deltidium composé de deux pièces. Les arêtes latérales du crochet se prolongent sur les côtés. Bords des valves droits ; structure interne inconnue.

J'ai examiné un certain nombre d'exemplaires de cette espèce, provenant tous d'une couche dont on aperçoit les premières traces dans le ravin du Nilawan et que le Dr Fleming considère comme marquant le commencement de la formation carbonifère et dont l'épaisseur augmente graduellement en se dirigeant du côté de l'Ouest vers l'Indus.

Il est cependant à remarquer que cette coquille n'a pu être identifiée avec aucune Térébratule carbonifère de quelque partie du monde qu'elle provienne et qui me soit connue, tandis que par ses affinités elle me rappelle au contraire certaines formes de la période jurassique et particulièrement celle du groupe renfermant la *T. numismalis*.

Le plus grand exemplaire a une longueur de 15 lignes, une largeur de 11 et une profondeur de 8 lignes; il est proportionnellement beaucoup plus convexe que les autres.

2. Terebratula biplicata, Brocchi (?), var. problematica. Dav. Pl. IX, fig. 3.

Coquille oblongue subpentagonale; valve dorsale convexe, à peine plus profonde que la valve opposée et munie de deux plis bien prononcés; valve ventrale plane dans son milieu, jusqu'à une certaine distance du crochet, où se trouve l'origine d'un bourrelet médian, limité de chaque côté par un sillon et s'étendant jusqu'au front. Crochet petit et tronqué, à ouverture médiocre. Bords des valves sinueux. Structure inconnue.

Longueur 20 et largeur 8 lignes.

Je n'ai vu qu'un seul échantillon de cette espèce que M. le Dr Fleming m'a assuré avoir été trouvé par lui-même, dans le calcaire carbonifère de Moosakhail; et quoique la coquille soit silicifiée comme le sont également un grand nombre d'autres fossiles carbonifères du Punjaub, je ne puis m'empêcher de répéter ce que j'ai dit de l'espèce précédente, à savoir que la forme de celle-ci rappelle bien plus celle des espèces jurassiques ou crétacées (P. Ex. celle de la *T. biplicata* de Brocchi), que celle de toutes les espèces carbonifères qui me sont connues.

J'appelle en conséquence l'attention des géologues et des paléontologistes qui visiteront le district, sur les deux espèces que je viens de décrire, afin de s'assurer si réellement elles

appartiennent à la période carbonifère, ainsi que cela a été indiqué par le Dr Fleming, ou si elles proviennent d'une formation moins ancienne.

3. Terebratula Himalayensis, Dav. Pl. IX, fig. 1.

Coquille ovale ou ovoïdopentagonale, plus longue que large ; valves également et modérément convexes, exemptes de sinus et de plis ; crochet assez petit, régulièrement courbé, tronqué, percé d'une ouverture circulaire et recouvrant faiblement le crochet de la valve opposée ; son deltidium est plus ou moins grand. La surface des deux valves est lisse, à l'exception des bords sur lesquels on remarque un petit nombre de gros plis ayant 2 à 3 lignes de longueur ; quatre ou cinq de ces plis occupent le front, tandis que deux ou trois autres servent à orner chaque côté de la valve ; on compte donc en tout onze de ces plis ou côtes arrondies autour du bord de chaque valve. Le plus grand exemplaire que j'en ai vu a 11 lignes de long, 9 de large, et 6 de haut.

Cette espèce semble être commune dans le calcaire carbonifère du Punjaub et le caractériser parfaitement.

Tous les échantillons de Moosakhail sont silicifiés.

4. Terebratula subvesicularis, Dav. Pl. IX, fig. 4.

Coquille petite, subpentagonale, plus longue que large; valves inégalement convexes, la valve ventrale étant plus profonde que la valve opposée ; crochet recourbé, tronqué, percé d'une petite ouverture de forme ovale et recouvrant le crochet de la petite valve. Surface lisse sur la moitié supérieure de la coquille, dont les bords sont ornés de sept petits plis ; un ou deux de ces plis se trouvent placés dans une faible dépression médiane de la valve dorsale, de sorte que le bord frontal de la valve est ordinairement triondulé, parce que un ou deux des plis médians se trouvent à un niveau inférieur à celui occupé par les plis latéraux ; les plis de la valve ventrale sont disposés à peu près de la même façon.

Les dimensions de cette espèce sont généralement petites. Un échantillon de grandeur moyenne a 7 lignes de long et 6 1/2 de large.

Cette forme ne paraît pas être rare dans un calcaire de couleur foncée des environs de Moosakhail, et diffère des

T. vesicularis, de Kon. et *Himalayensis*, par l'arrangement de ses plis marginaux.

5. Athyris Royssii, Leveillé, sp. Pl. IX, fig. 6.

Cette espèce caractéristique et bien connue, est très-abondante à Moosakhail et dans diverses autres localités de la Chaîne salifère (Salt-range). Elle présente identiquement les mêmes caractères que ceux que possèdent les échantillons européens. Le capitaine Strachey l'a rencontrée dans les schistes noirs de Chor Holi Pass.

6. Athyris subtilita (Hall, sp.) var. grandis. Dav. Pl. IX, fig. 7 et 8.

Terebratula subtilita, Hall (?) dans Howard Stansbury's Exploration of the Valley of the Great Salt Lake of Utah, p. 409, pl. 2, fig. 1 et 2. 1852.

Cette espèce paraît être commune dans le Punjaub ; elle y a été trouvée dans plusieurs localités, mais plus abondamment à Moosakhail. Elle est très-variable dans sa forme et dans sa taille ; en sorte que (comme l'a si bien fait observer le Dr Shumard dans la description de cette espèce recueillie dans les assises carbonifères de la rivière rouge à la Louisiane) l'on serait porté à faire plusieurs espèces de ses variétés, si l'on n'avait pas à sa disposition un certain nombre d'échantillons.

Quelques uns de nos spécimens indiens sont parfaitement semblables à ceux de l'Iowa ou du village Pecos dans le Nouveau-Mexique, où le type de l'espèce a été découvert ; tandis que d'autres sont plus grands et plus enflés ou plus globuleux que ceux qui me sont connus en Europe et en Amérique, quoique ces derniers concordent assez bien avec certains échantillons du comté de Washington dans l'Arkansas, décrits par le Dr Shumard.

Le plus grand exemplaire indien qui m'ait été confié a une longueur de 21, une largeur de 18 et une profondeur de 17 lignes.

7. Retzia radialis. (Phillips, sp.), var. grandicostata, Dav. Pl. IX, fig. 5.

Coquille allongée, ovale, à valves également profondes ou

convexes ; le crochet est allongé, tronqué et percé d'une petite ouverture circulaire, séparée de la ligne cardinale, par une petite area ; chaque valve porte environ 13 ou un plus grand nombre de côtes angulaires, dont la médiane est la plus développée et correspond à un sillon un peu plus profond dans la valve opposée. La taille et les plis de nos échantillons britaniques de la *R. radialis* sont très-variables. Les plis de la forme typique sont plus étroits et plus nombreux que ceux de la variété du Punjaub, tandis que des échantillons identiques à cette dernière ont été trouvés en Angleterre et dans le terrain carbonifère de la Bolivie.

Le Dr Fleming, constate que cette espèce est peu abondante, aux environs de Moosakhail.

8. Spirifera striata, Martin, sp. Pl. IX, fig. 9 et 10.

Le Dr Fleming, n'a rencontré que trois ou quatre échantillons incomplets de cette espèce, qui ne se distinguent en rien des échantillons anglais décrits par Martin.

Elle se trouve à Nulle, à Chederoo et dans diverses autres localités.

9. Spirifera Moosakhailensis, Dav. Pl. XI, fig. 2.

Coquille transversalement subrhomboïdale ; valves à peu près également profondes ou convexes ; bord cardinal très-variable en longueur ; tantôt égalant la largeur de la coquille, tantôt ne possédant pas la moitié de cette largeur ; area ventrale d'une étendue modérée ; fissure large et partiellement recouverte par un pseudo-deltidium. Area dorsale sublinéaire ; crochet petit et faiblement recourbé. La valve dorsale porte un large lobe médian anguleux, auquel correspond un large sinus dans la valve opposée. Toute la surface de la coquille est ornée d'un grand nombre de petites côtes, rassemblées en fascicules composés de sept ou huit côtes groupées ensemble ; cette disposition donne aux valves l'apparence d'un double plissement, parce que plusieurs petites côtes sont interposées entre les autres ; toute la surface est couverte d'un grand nombre de petites lamelles tranchantes, concentriques et ondulées, dont quatre au plus occupent l'espace d'une ligne. Dimensions très-variables : un grand échantillon a une longueur de 26 lignes, une largeur de 39 et une épaisseur de 18 ou 19 lignes.

J'ai longtemps hésité à proposer un nouveau nom pour le *Spirifer* que je viens de décrire. Par sa forme générale et par la manière dont ses plis sont groupés, il ressemble beaucoup à certaines espèces connues et particulièrement à celle figurée par M. D. Owen, dans son ouvrage intitulé *Geological survey of Wisconsin and Minnesota* (Pl. 5, fig. 4), sous le nom de *Spirifer fasciger*, Keyserling? mais je partage le doute de cet auteur sur l'identité complète de l'espèce américaine avec l'espèce russe décrite par M. de Keyserling. L'espèce indienne se rapproche encore par sa forme de certains exemplaires des *Sp. Condor*, d'Orb. et *cameratus*, Hall, ainsi que de variétés exceptionnelles de *Spirifera striata* d'Angleterre; mais sur aucune de ces variétés on n'aperçoit les lamelles particulières et parfaitement régulières dont la surface du *Sp. Moosakhailensis* est recouverte et qui, par leur disposition concentrique et ondulée, leur tranchant et leur saillie, ressemblent si bien à celles du *Sp. laminosa* et communiquent à la coquille sa belle apparence sculptée.

Ce spirifer est commun au Punjaub, à Moosakhail, à Chederoo, à Kafir Kote, etc.

10. Spirifera lineata, Martin, sp. var. Pl. XI, fig. 3.

La taille de cette espèce est très-variable en Europe, mais, à ma connaissance, elle n'y a jamais atteint les proportions de certains échantillons provenant du Punjaub; cette grande différence m'a laissé pendant quelque temps dans l'incertitude de savoir si ces derniers appartenaient réellement à notre espèce européenne si bien connu; mais après avoir examiné attentivement quelques exemplaires indiens de taille moyenne, j'ai trouvé qu'il était impossible de les distinguer de l'espèce typique de Martin. La disposition particulière des spinules, si bien développée dans certains échantillons Ecossais du *Sp. lineata*, se remarque également par-ci, par-là sur les exemplaires silicifiés du Punjaub. Le plus grand des échantillons indiens qui me soit connu, possède une longueur de 3 pouces 2 lignes, une largeur de 3 $^1/_2$ pouces et une épaisseur de un pouce 7 lignes. Un autre, identique avec un échantillon du Derbyshire, a 22 lignes de long et 23 de large.

Cette espèce se trouve à Chederoo et à Moosakhail; c'est celle que en 1853, moi et M. de Verneuil avons considérée comme très-voisine du *Sp. lineata*.

11. Spiriferina octoplicata, Sow. sp. Pl. X, fig. 12 et 13.

Les échantillons trouvés à Moosakhail sont parfaitement identiques à ceux qui proviennent du terrain carbonifère Anglais; le nombre et la forme de leurs plis éprouvent exactement les mêmes variations.

12. Rhynchonella pleurodon, Phillips, sp.

M. le Dr Fleming, a rencontré un ou deux exemplaires de cette espèce, dont les caractères concordent parfaitement avec ceux du type anglais.

13. Camarophoria Purdoni, Dav. Pl. XII, fig. 4.

Coquille faiblement subrhomboïdale ou deltoïde, plus large que longue. Valves également convexes; valve dorsale garnie d'un large lobe médian, correspondant à un sinus semblable de la valve opposée. La surface de chaque valve est ornée de 18 à 22 côtes anguleuses, dont 7 ou 8 occupent le lobe et 6 ou 7 le sinus. Le crochet est petit et très-recourbé, de sorte que l'ouverture, qui est située à l'extrémité angulaire du crochet, est à peine visible. Il n'existe aucune trace d'expansions marginales.

Cette espèce ne paraît pas être rare dans le Punjaub; on la rencontre à Moosakhail, à Vurcha, etc.

15. Streptorynchus crenistria, (Phillips) var. robustus, Hall. Pl. X, fig. 16.

Orthis robusta, Hall, Report of the geological survey of the State of Jowa, p. 515, pl. 28, fig *d*; 1858.

Coquille de forme pentagonale et plano-convexe; bord cardinal occupant à peu près toute la longueur de la coquille. Valve dorsale semicirculaire et gibbeuse; valve ventrale pentagonale et presque plane; area triangulaire et très-haut, muni d'un petit pseudo-deltidium. Surface garnie de petites côtes rayonnantes, séparées les unes des autres par des sillons du même diamètre, sauf celles qui, à certaine distance du crochet, viennent s'y interposer par bifurcation et qui alors sont plus étroites à leur origine. Ces côtes sont traversées par un grand nombre de petites stries concentriques. Un échantillon pris dans le calcaire carbonifère de Vurcha a une longueur de 21 lignes, une largeur de 23 et une épaisseur de 14 lignes.

Les specimens de cette variété du *S. crenistria* provenant du Punjaub, ressemblent si parfaitement à ceux de l'*Orthis robusta*, Hall, recueillis dans le terrain houiller du comté St. Clair, dans l'Illinois (Amérique du Nord), que je considère comme identiques les uns et les autres.

16. Streptorynchus pectiniformis, Dav. Pl. X, fig. 17.

Coquille de forme pectinoïde; valves également convexes; bord cardinal quelquefois plus petit, rarement plus long que la moitié de la largeur des valves, muni d'extrémités angulaires saillantes. Area ventrale triangulaire, ordinairement plus haute que large et partagé longitudinalement dans son milieu, par un pseudodeltidium petit et convexe. L'extrémité du crochet est pointue et s'incline plus ou moins vers l'un ou l'autre côté. Valve dorsale pectinoïde, très-bombée vers le crochet et garnie de petites oreillettes, mais légèrement déprimée vers le milieu. Les ornements des valves consistent en 12 à 14 plis anguleux; toute la surface (à l'exception de l'area), est couverte de petites côtes rayonnantes et crenelées, dont le nombre augmente vers les bords par interposition de côtes plus étroites. Le plus grand exemplaire connu par moi, a une longueur de 20 lignes, une largeur à peu près semblable et une épaisseur de 14 lignes.

Cette belle coquille n'est pas rare dans le calcaire carbonifère de Moosakhail, de Chederoo, de Nulle et de Kafir Kote. Elle me paraît bien distincte de toutes ses espèces congénères.

17. Orthis resupinata, Martin, sp. Pl. X, fig. 15.

Le Dr Fleming, n'a recueilli dans le Punjaub, qu'un ou deux exemplaires de cette espèce si bien connue.

18. Productus striatus, Fischer, sp. Pl. X. fig. 18.

Cette espèce européenne ne paraît pas être rare dans un calcaire d'un jaune pâle des environs de Khond, dans le Punjaub.

19. Productus longispinus, Sow. (= P. Flemingii ejusd.). Pl. X, fig. 19.

Le Dr Fleming, a découvert à Moosakhail, dans le Punjaub et à Srinuggur, dans le Caschemire, deux échantillons parfaitement ressemblants à ceux qui forment le type de l'espèce décrite par Sowerby;

l'échantillon figuré est celui qui a été déterminé en 1853 par M. de Verneuil et par moi-même.

20. Productus Cora, d'Orbigny.

Des échantillons identiques à ceux d'Amérique et d'Europe, ont été trouvés à Kafir Kote, à Moosakhail, etc.

21. Productus semireticulatus, Martin, sp.

Le Dr Fleming a recueilli deux ou trois échantillons de cette espèce, dans le Punjaub.

22. Productus costatus, Sow. Pl. X, fig. 20 et 21

Cette espèce semble être l'une des plus communes du calcaire carbonifère du Punjaub. On la rencontre à Moosakhail, Kafir Kote, etc., où elle atteint quelquefois des proportions considérables, comme on pourra s'en assurer par l'inspection de la planche.

Les exemplaires indiens ne diffèrent en rien de ceux de l'Europe.

23. Productus Purdoni, Dav. Pl. XII, fig. 5.

Coquille ovale, allongée, ayant sa plus grande largeur vers les deux tiers de sa longueur à partir du crochet; valve ventrale modérément convexe, plane dans son milieu et divisée longitudinalement en deux lobes par un sinus profond, qui a son origine à l'extrémité du crochet et s'étend jusqu'au front. Crochet et oreillettes petits; bord cardinal très-court et ne dépassant pas généralement la moitié de la largeur de la coquille. La valve dorsale est beaucoup plus plane, à l'exception d'une petite partie marginale, où elle devient concave; elle est divisée en deux parties par un bourrelet médian, lequel partant du bord cardinal, s'étend jusqu'au front. La surface extérieure de la valve ventrale est entièrement couverte de petits tubercules allongés et étroits, qui servent de base à un grand nombre de petites épines tubulaires; les uns et les autres de ces ornements sont plus minces et plus courts sur les bords que sur le restant de la coquille. La valve dorsale est ornée de petites fossettes et de petits tubercules d'où partent également de petites épines, mais celles-ci sont beaucoup moins nombreuses que celles existant sur la valve opposée, ainsi qu'il est facile de le constater. Un grand échantillon a une longueur de 2 pouces 5 lignes, une largeur de 2 pouces 2 lignes et une hauteur d'un pouce.

J'ai pu examiner plusieurs échantillons de cette espèce intéressante, provenant de Chederoo et de Moosakhail.

24. Productus Humboldtii, d'Orbigny. Pl. XII, fig. 6.

Productus Humboldtii, d'Orb. Paléont. du voyage dans l'Amér. mérid., pl. 5, fig. 4 et 7; 1842.

Coquille transverse, arrondie, à valve ventrale modérément convexe, garnie d'un large sinus longitudinal, peu profond, ayant son origine à une petite distance du crochet et s'étendant jusqu'au front. Crochet petit et recourbé; bord cardinal un peu plus court que le diamètre transverse de la coquille. Valve dorsale plane vers sa partie cardinale, faiblement concave à une petite distance du bord et garnie d'un petit lobe médian, qui n'est perceptible que près du front. La surface de la valve ventrale est couverte d'un grand nombre de petits tubercules allongés, plus ou moins disposés en quinconce et servant de base à de petites épines tubuleuses.

Le plus grand échantillon trouvé par le Dr Fleming a 13 ½ lignes de longueur, 16 de largeur et 6 ½ d'épaisseur.

Tous les exemplaires proviennent de Kafir Kote, situé sur la rive occidentale de l'Indus. D'Orbigny a rapporté ses échantillons de Yarbichambi, situé sur le plateau Bolivien des Andes.

Je crois devoir faire observer que plusieurs des spécimens indiens ont tant de ressemblance avec quelques uns de notre *P. scabriculus* britannique, qu'il est très-difficile de distinguer les uns des autres.

25. Strophelosia Morrisiana, King. (?) var. Pl. XII, fig. 8.

J'ai trouvé, parmi les fossiles provenant de Moosakhail, deux échantillons d'une coquille qui ressemble si fort à certains exemplaires du *Strophelosia Morrisiana* permien, que ni moi, ni MM. Kirkby et Howse n'ont pu trouver la moindre différence entre eux. Sa forme est à peu près parfaitement circulaire; la convexité de la valve ventrale, et la concavité de la valve opposée, sont celles de l'espèce permienne; il en est de même des proportions relatives des areas et des épines allongées et déprimées qui couvrent la surface de la valve ventrale. La seule différence que nous ayons pu remarquer entre ces deux, consiste dans l'absence des petites stries rayonnantes, si bien marquées sur les échantillons parfaits de l'espèce dé-

crite par M. King ; il est toutefois à remarquer que ce dernier caractère est négatif, et de peu de valeur, puisque plusieurs échantillons de l'espèce recueilli à Tunstall Hill, ne le possèdent pas. Les matériaux dont je dispose, ne sont cependant pas suffisants pour me permettre d'affirmer la parfaite identité des deux. Il est donc prudent de considérer en ce moment le fossile du Punjaub, comme une variété du *S. Morrisiana*. (1).

II. — Brachiopodes carbonifères, recueillis dans l'Inde par M. W. Purdon, membre de la société géologique de Londres.

A la demande de M. Purdon, j'ai examiné les brachiopodes recueillis par lui, pendant son séjour dans le Punjaub et dans les districts N. E. de l'Himalaya.

La collection de M. Purdon renferme un grand nombre de beaux échantillons, fort intéressants des espèces suivantes (2) :

1. *Terebratula Himalayensis*, Dav.
2. *Athyris Royssii*, Leveillé.
3. *Athyris subtilita*, Hall. (?), var.
4. *Spirifera Moosakhailensis*, Dav.
5. *Spirifera lineata*, Martin, var.
6. *Rhynchonella pleurodon*, Phill., var.
7. *Camarophoria Purdoni*, Dav.
8. *Streptorynchus crenistria*, Phillips.
9. *Streptorynchus pectiniformis*, Dav.

(1) En 1857, MM. Howse, Kirkby et moi-même, nous avons émis l'opinion que le *S. Morrisiana* du permien britannique devait être considéré comme identique avec le *S. lamellosa* de M. Geinitz, ou tout au plus comme une variété de ce dernier ; mais quoique nous ne soyons pas encore décidés à abandonner cette opinion, il est bon de faire observer que le Dr Geinitz ne la partage pas et qu'il soutient, dans son ouvrage qui vient de paraître, sous le titre de *Dyas oder Zechstein* etc., que les *S. lamellosa* et *Morrisiana* sont des espèces entièrement différentes. Mais on ne doit pas oublier que le *S. lamellosa* semble avoir été une espèce bien variable dans ses formes, son mode d'accroissement et l'arrangement de ses épines, ce qui a pu dépendre des conditions physiques dans lesquelles elle s'est trouvée placée et ce qui ne doit pas être négligé dans les déductions philosophiques sur la nature de l'espèce.

(2) Je n'avais pas l'intention de m'occuper des espèces recueillies par M. Purdon, avant la publication du mémoire qu'il prépare sur la géologie du Punjaub; mais ayant également promis à M. le Dr Fleming de décrire celles qu'il avait trouvées dans les mêmes localités, j'ai cru qu'il était bon de ne pas remettre plus longtemps l'indication des espèces rapportées par ce premier, en lui laissant tout l'honneur de ses découvertes.

10. *Productus striatus*, Fischer.
11. *Prod. Cora*, d'Orb.
12. *Prod. Purdoni*, Dav.
13. *Prod. costatus*, Sow.
14. *Prod. Humboldtii*, d'Orb.
15. *Prod. semireticulatus*, Martin.
16. *Strophalosia Morrisiana*, King. (?) var.
17. *Aulosteges Dalhousii*, Dav.
18. *Crania* (espèce indéterminable).

Ayant déjà décrit, dans les pages précédentes, les espèces mentionnées sous les seize premiers numéros, il ne me reste, pour compléter tout ce qui a été découvert jusqu'à ce jour, qu'à compléter ma notice, par la description de l'*Aulosteges Dalhousii*, d'après l'échantillon intéressant trouvé par M. Purdon dans les roches carbonifères (?) du Punjaub.

Aulosteges Dalhousii, Dav. Pl. XII, fig. 7.

Coquille de forme subtrigonale, plus large que longue, angles antérieurs arrondis, faiblement sinueux sur le front; bord cardinal un peu plus long que la moitié du diamètre transverse de la coquille; valve ventrale convexe, partagée en deux par un sinus large et profond; crochet assez droit, mais s'inclinant un peu plus d'un côté que de l'autre, area plane, irrégulièrement triangulaire, formant un angle obtus avec le plan de la valve dorsale et portant dans son milieu un pseudo-deltidium étroit et convexe; toute la surface de la coquille, à l'exception de celle de l'area, est couverte de fines épines tubuleuses, qui dans certains endroits paraissent avoir eu une longueur de 4-5 lignes. Les épines touchent presque la surface des valves et leurs extrémités sont dirigées vers les bords de la coquille. La valve dorsale est convexo-concave, c'est-à-dire, convexe jusqu'à une petite distance du bord, où elle devient concave. L'area dorsale est étroite et linéaire; toute la surface de cette valve semble avoir été couverte de minces épines. A l'intérieur de la valve dorsale, la dent cardinale est trilobée; on remarque de chaque côté des traces d'alveoles; une petite lame longitudinale, qui a son origine dans la dent cardinale, s'étend légèrement au-delà de la moitié de la longueur de la valve; de chaque côté de cette lamelle se trouvent deux impressions allongées, de forme ovale et dendritique, qui sans aucun doute, ont été produites par l'attache du muscle adducteur. Aux extrémités internes de celles-ci, commencent les impressions réniformes, lesquelles sont mar-

quées par une ligne courbe qui s'étend jusque vers le bord et qui tournant d'une manière abrupte sur elle-même, vient se terminer à une petite distance de son point de départ. L'intérieur de la valve ventrale n'a pas pu être observé.

Un examen attentif de cette espèce intéressante, m'a convaincu, que par ses affinités, elle appartient beaucoup plus au sous-genre Aulosteges de M. Helmersen qu'aux *Strophalosia* de M. King. Spécifiquement elle ressemble à *A. Wangenheimi* (= *A. variabilis*, Helmersen); mais je suis d'avis qu'elle s'en distingue par sa forme générale, par sa taille et par sa structure interne.

Les espèces dont se composent les sous-genres *Aulosteges* et *Strophalosia*, quoique représentés dans la période carbonifère, semblent plus spécialement caractériser en Europe, la période permienne. Il reste donc à savoir, si dans le Punjaub il n'existe pas au-dessus des couches carbonifères bien authentiques, une mince couche permienne d'où seraient provenus l'*A. Dalhousii* et la variété du *Strophalosia Morrisiana* dont j'ai donné la description ci-dessus et qui en tombant, se seraient mélangés aux coquilles de la période carbonifère. J'ai encore à faire remarquer, qu'une autre espèce de *Strophalosia* (*S. Gerardi*, King.) a été découverte il y a quelques années, par M. le Dr Gérard dans la chaîne de l'Himalaya, à 17,000 pieds au-dessus du niveau de la mer.

Un seul échantillon d'*Aulosteges Dalhousii*, a été trouvé jusqu'ici dans le calcaire carbonifère (?) de Moosakhail.

En terminant, je dois faire observer que le nombre total des espèces de Brachiopodes carbonifères, découvertes jusqu'ici par le Dr Fleming et par M. Purdon, dans la chaîne salifère (Salt-range) du Punjaub, s'élève à 28, dont 13 se retrouvent dans les formations européennes de la même période, bien que plusieurs d'entre elles aient atteint dans l'Inde des proportions beaucoup plus grandes. Il est très-probable que des nouvelles recherches faites dans les dépôts carbonifères du Punjaub, amèneront au jour un certain nombre d'espèces qui viendront augmenter la liste de celles que je viens d'énumérer.

EXPLICATION DES PLANCHES

IX, X, XI et XII.

Planche IX.

Fig. 1. *Terebratula* (vel *Waldheimia*) *Flemingii*, Dav.
Fig. 2. Variété de la même espèce.
Fig. 3. *T. biplicata*, Brocchi (?), var. *problematica*, Dav.
Fig. 4. *T. subvesicularis*, Dav.
Fig. 5. *Retzia radialis*, Phill., var. *grandicosta*, Dav.
Fig. 6. *Athyris Royssii*, Leveillé.
Fig. 7. *Athyris subtilita*, Hall, var. *grandis*, Dav.
Fig. 8. Variété de la même espèce.
Fig. 9 et 10. *Spirifera striata*, Martin.
Fig. 11. *Spiriferina octoplicata*. Sow.

Planche X.

Fig. 12, 13 et 14. *Spiriferina octoplicata*, Sow. variétés.
Fig. 15. *Orthis resupinata*, Martin.
Fig. 16. *Streptorynchus crenistria*, Phill., var. *robustus*, Dav.
Fig. 17. *Streptorynchus pectiniformis*, Dav.
Fig. 18. *Productus striatus*, Fischer.
Fig. 19. *Productus longispinus*, Sow.
Fig. 20. *Productus costatus*, Sow.
Fig. 21. Intérieur de la valve dorsale du même.

Les figures de ces deux planches, ont été faites d'après des échantillons de la collection du Dr Fleming et du Musée de la société géologique de Londres.

Planche XI.

Fig. 1. *Terebratula Himalayensis*, Dav.
Fig. 2, *a*, *b*. *Spirifera Moosakhailensis*, Dav. (adulte).
Fig. 2, *c*. Jeune échantillon de la même espèce.
Fig. 3. *Spirifera lineata*, Martin.

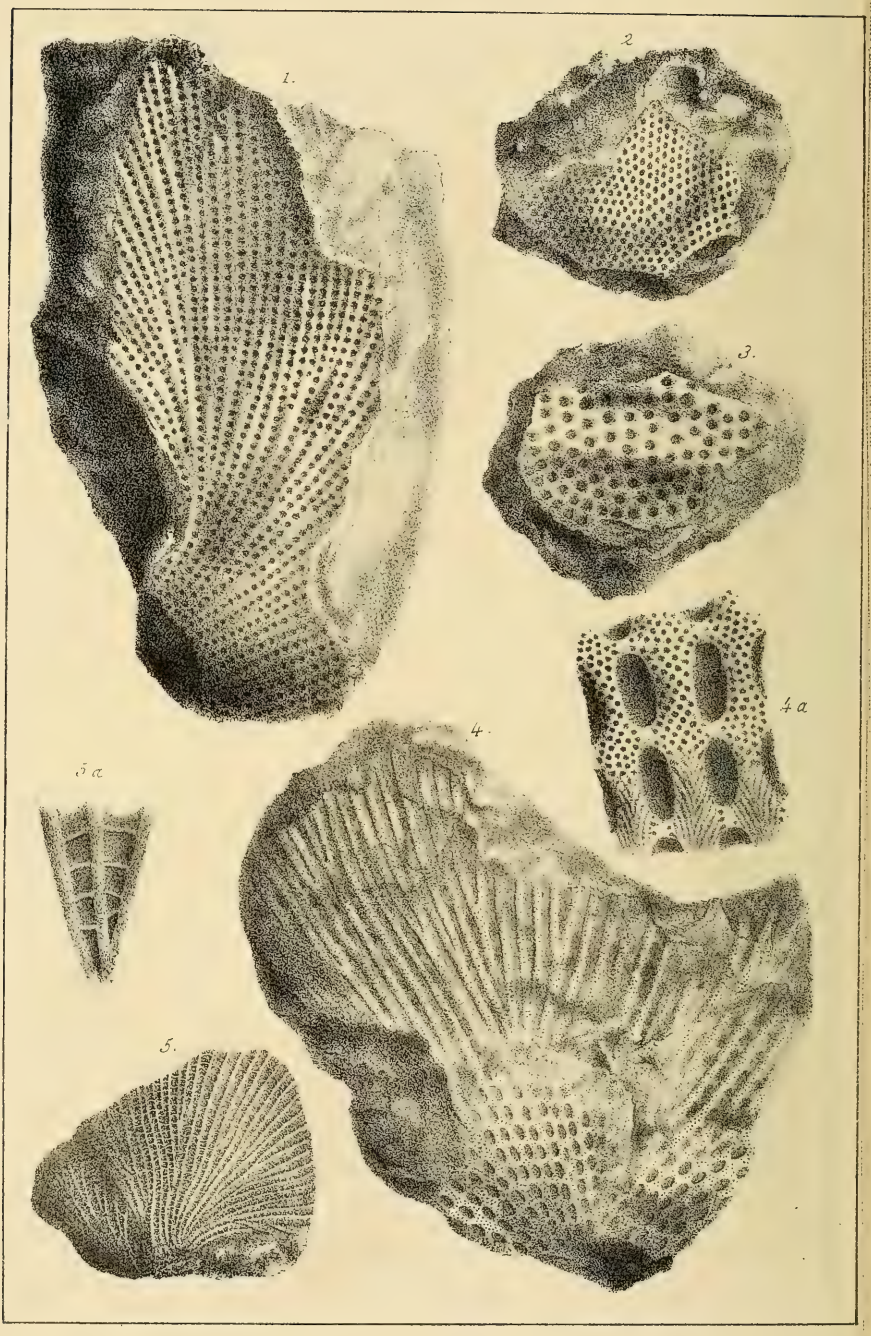
Planche XII.

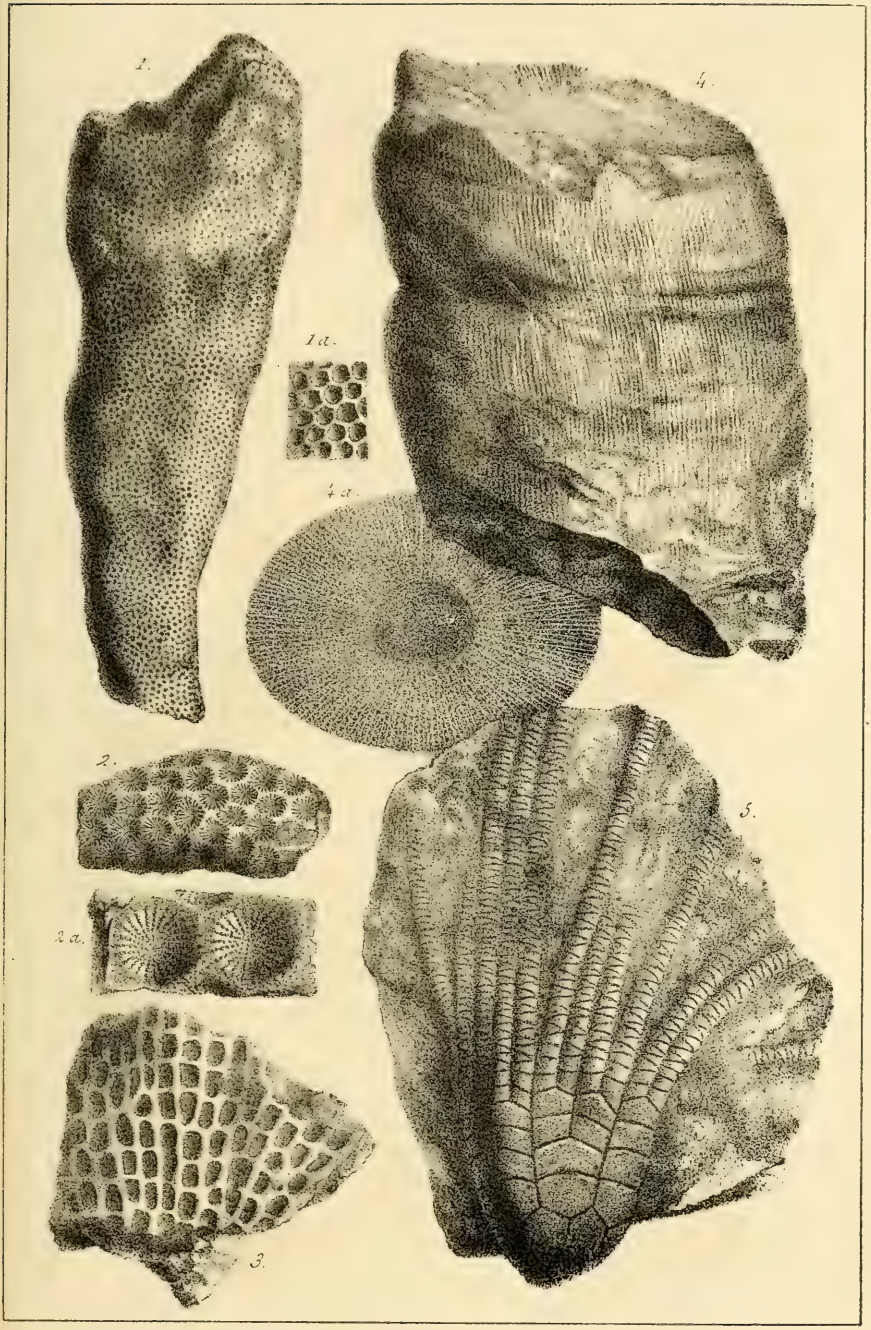
Fig. 4. *Camarophoria Purdoni,* Dav.
Fig. 5. *Productus Purdoni*, Dav.
Fig. 6. *Productus Humboldtii*, d'Orb.
Fig. 7. *Aulosteges Dalhousii*, Dav.
Fig. 8. *Strophalosia Morrisiana*, King. (?), var.

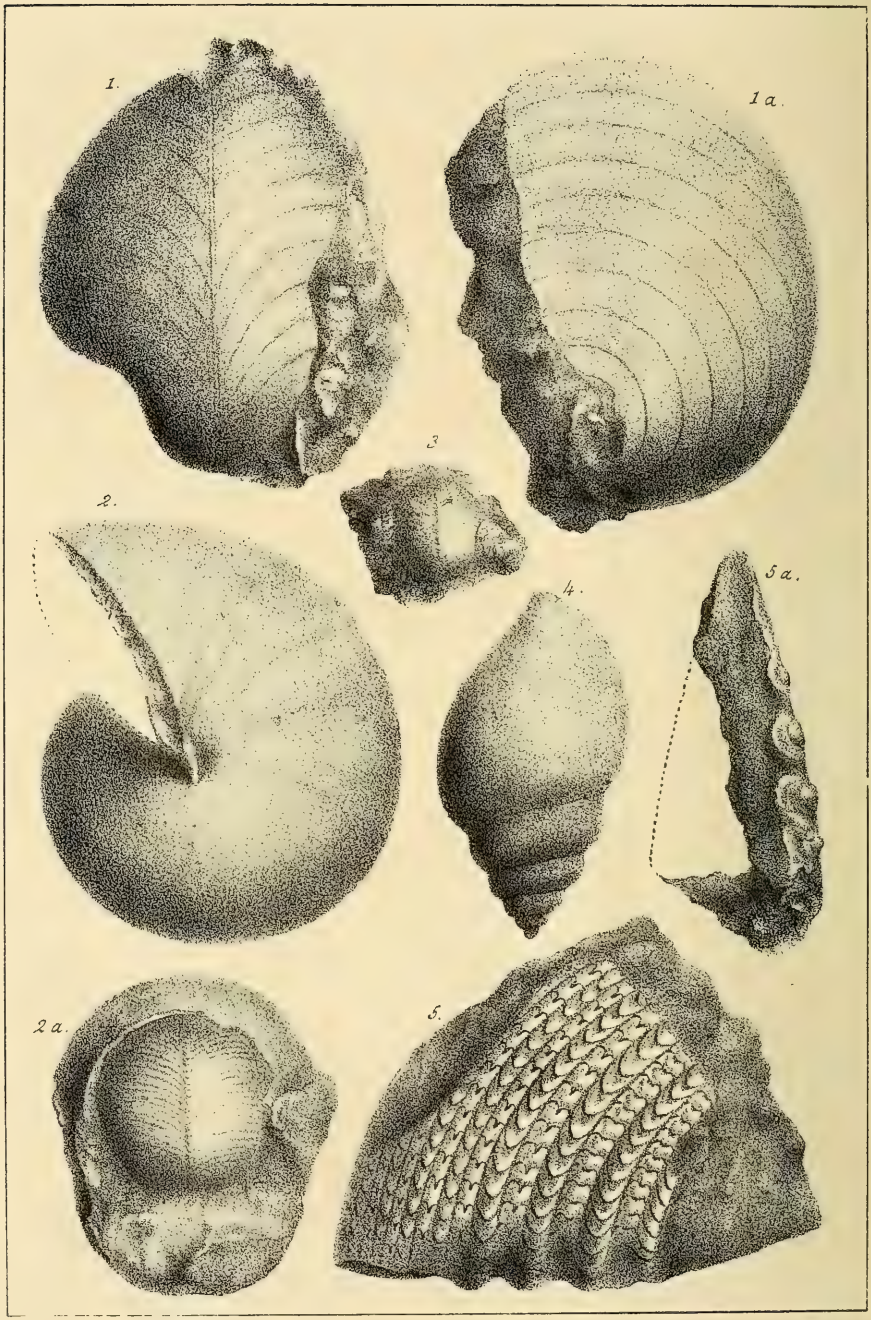
Les échantillons figurés dans ces deux dernières planches ont été recueillis par M. W. Purdon et se trouvent maintenant dans la collection de M. Davidson.

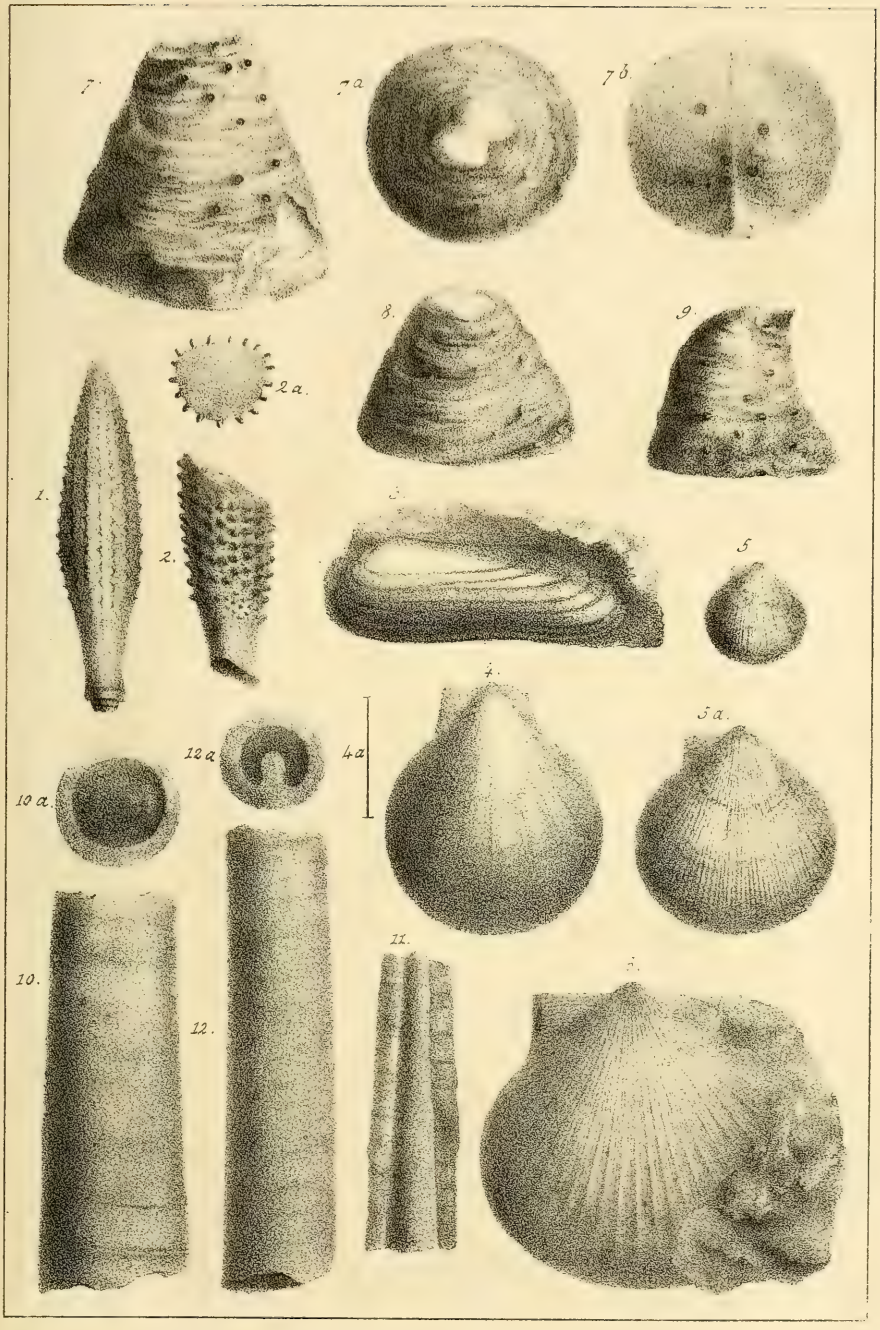
TABLE DES MATIÈRES.

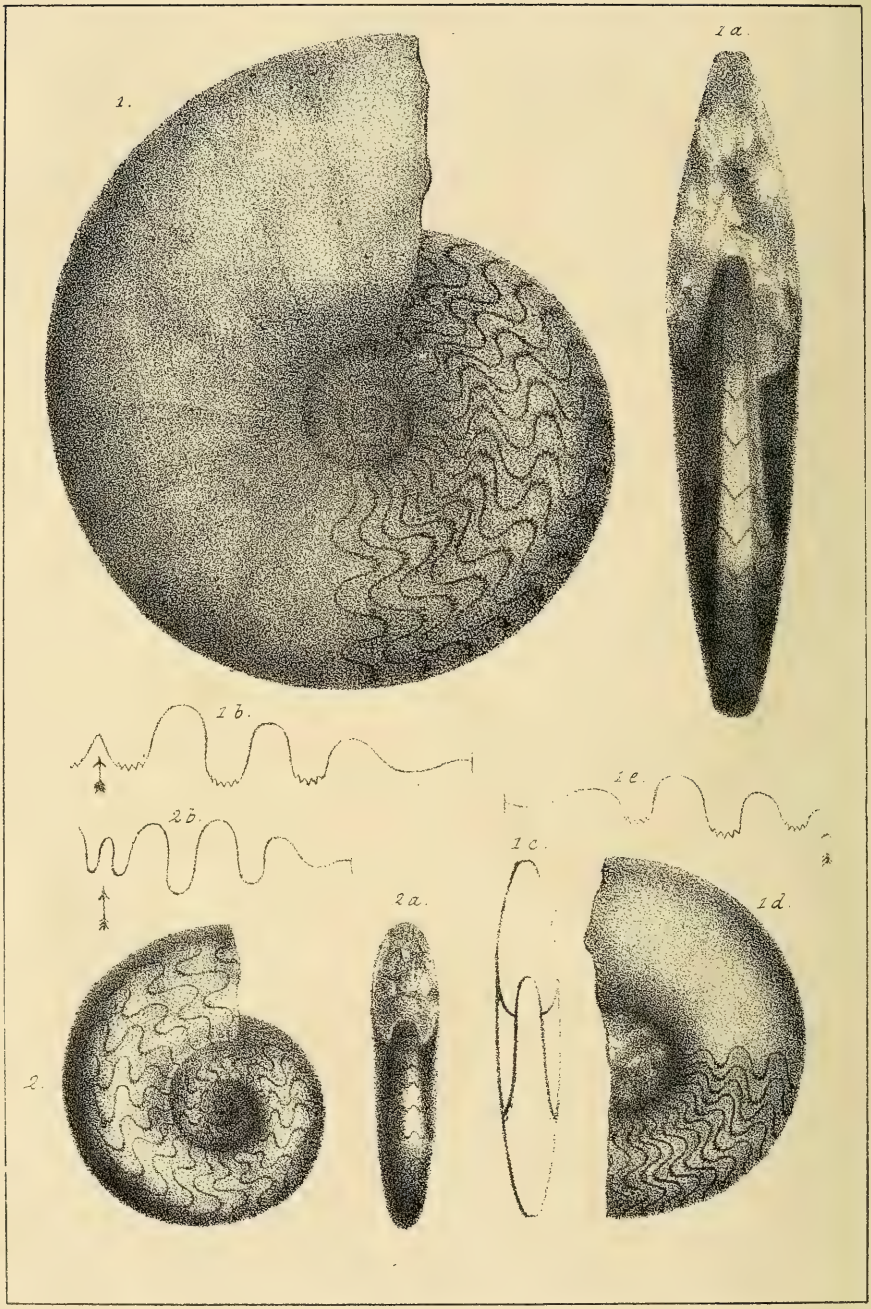
		Pages.
J. Putzeys,	Postscriptum ad Clivinidarum Monographiam. . . .	1
E. Terssen,	Nouvelle méthode pour déterminer le centre de gravité des corps.	79
A. J. N. Paque,	Dissertation sur les vrais principes de l'Algèbre . . .	95
A. Chevrolat,	Clytides d'Asie et d'Océanie.	253
J. P. Michaelis,	De l'Ellipsoïde	351
Coquilhat,	Percussions initiales produites sur les affûts dans le tir des bouches-à-feu	373
L. De Koninck,	Notice sur les Fossiles de l'Inde découverts par M. le Dr Fleming, d'Edimbourg.	553
Th. Davidson,	Notice sur quelques Brachiopodes carbonifères recueillis dans l'Inde par MM. le Dr A. Fleming et W. Purdon.	580


1.
2
3.
4 a
4.
5 a
5.

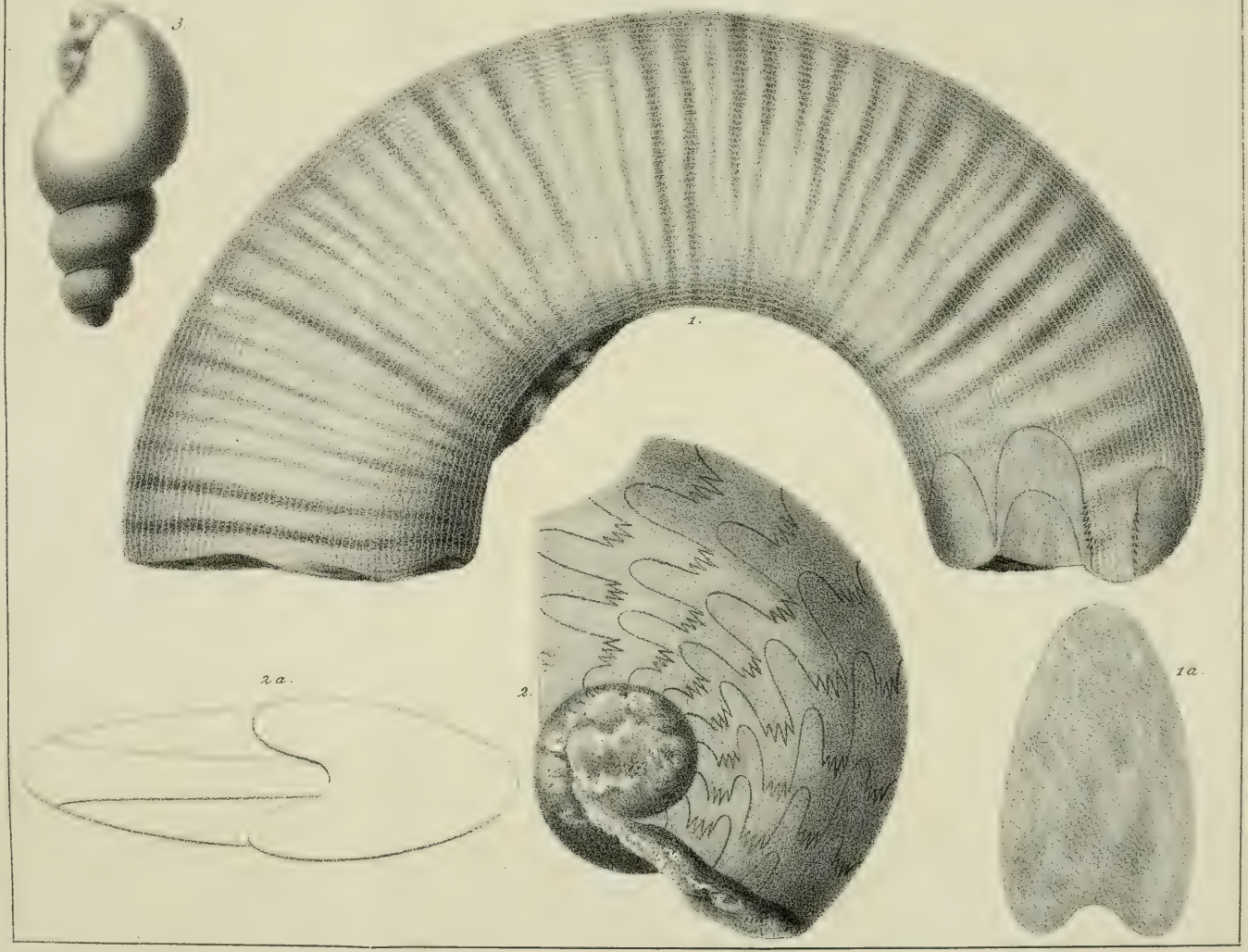

1.
1a.
4.
4a.
2.
2a.
5.
3.


1.
1a.
3
2.
4.
5a.
2a.
5.

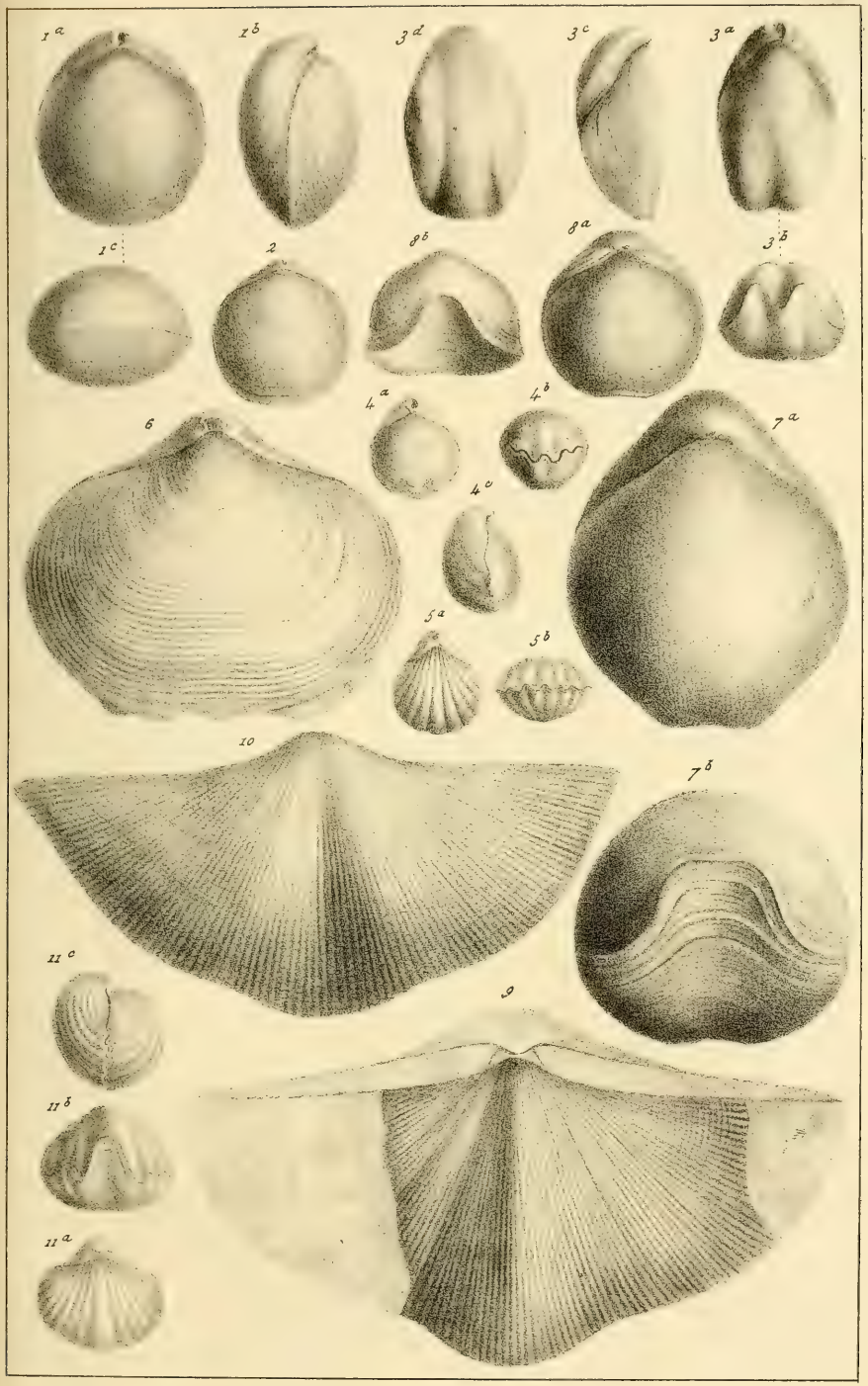

7.
7a.
7b.
8.
9.
2a.
1.
2.
3.
5.
4.
4a.
5a.
12a.
10a.
10.
12.
11.
6.

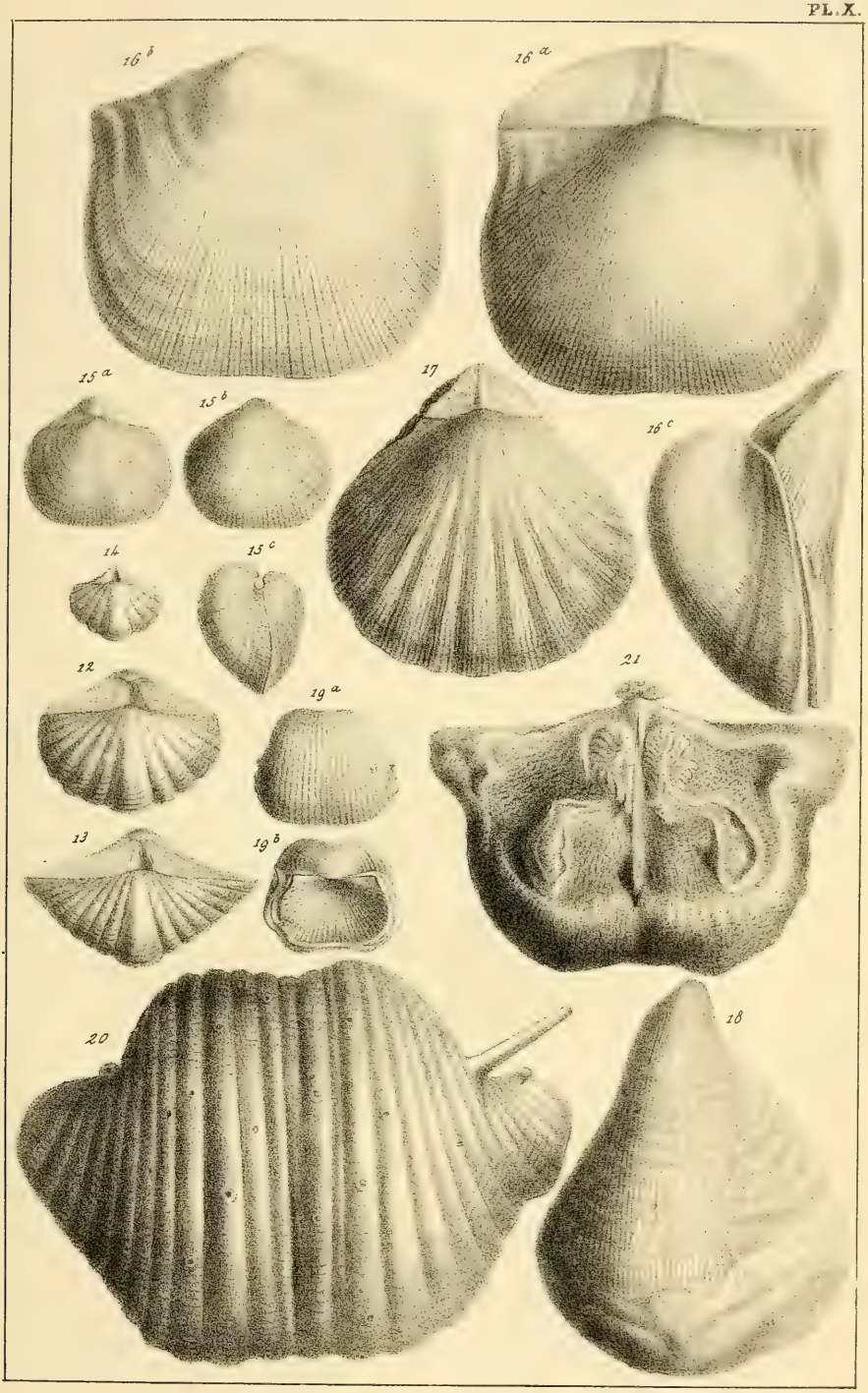

1.
1 a.
1 b.
1 c.
1 d.
1 e.
2.
2 a.
2 b.

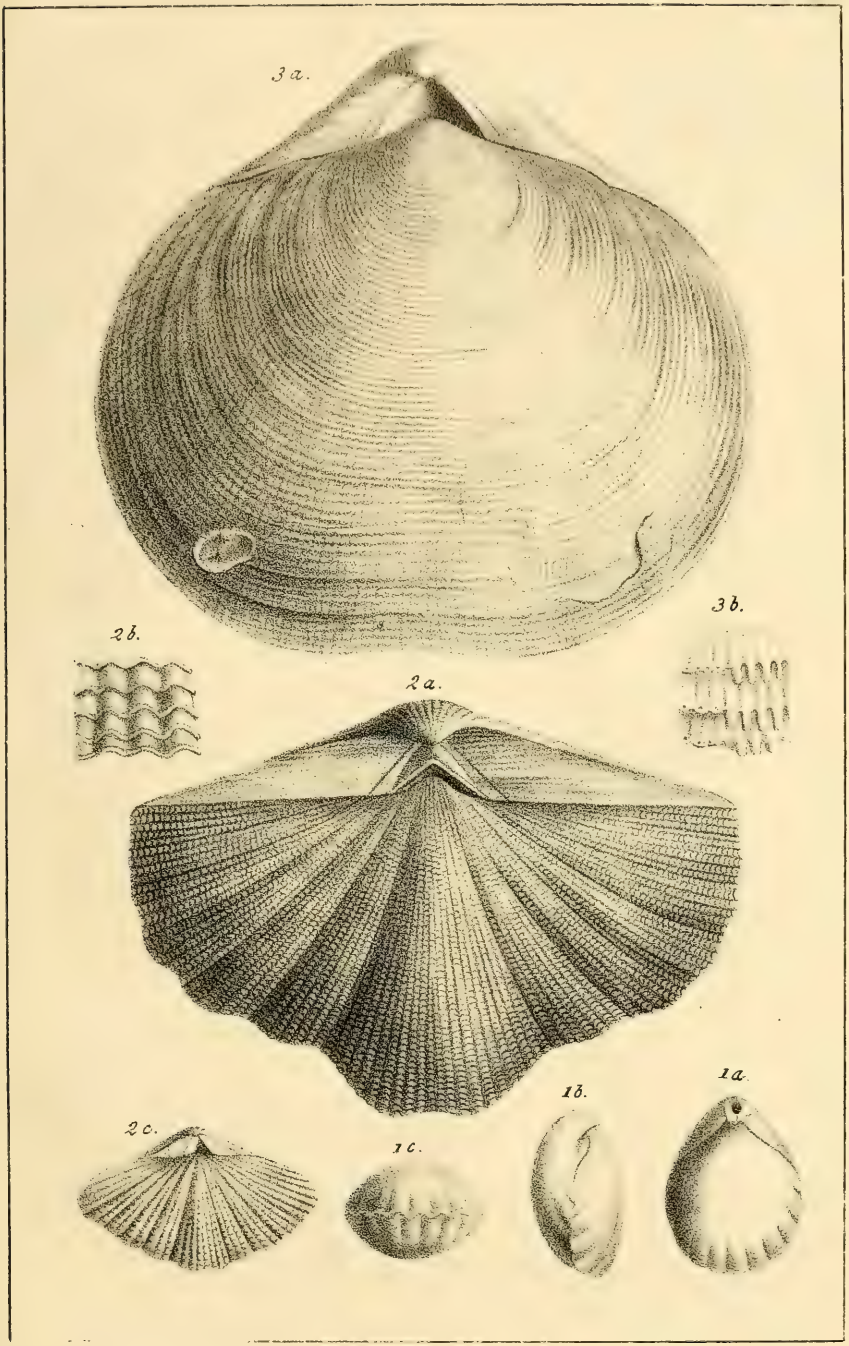
1
2
2a
3.
4.
4a.

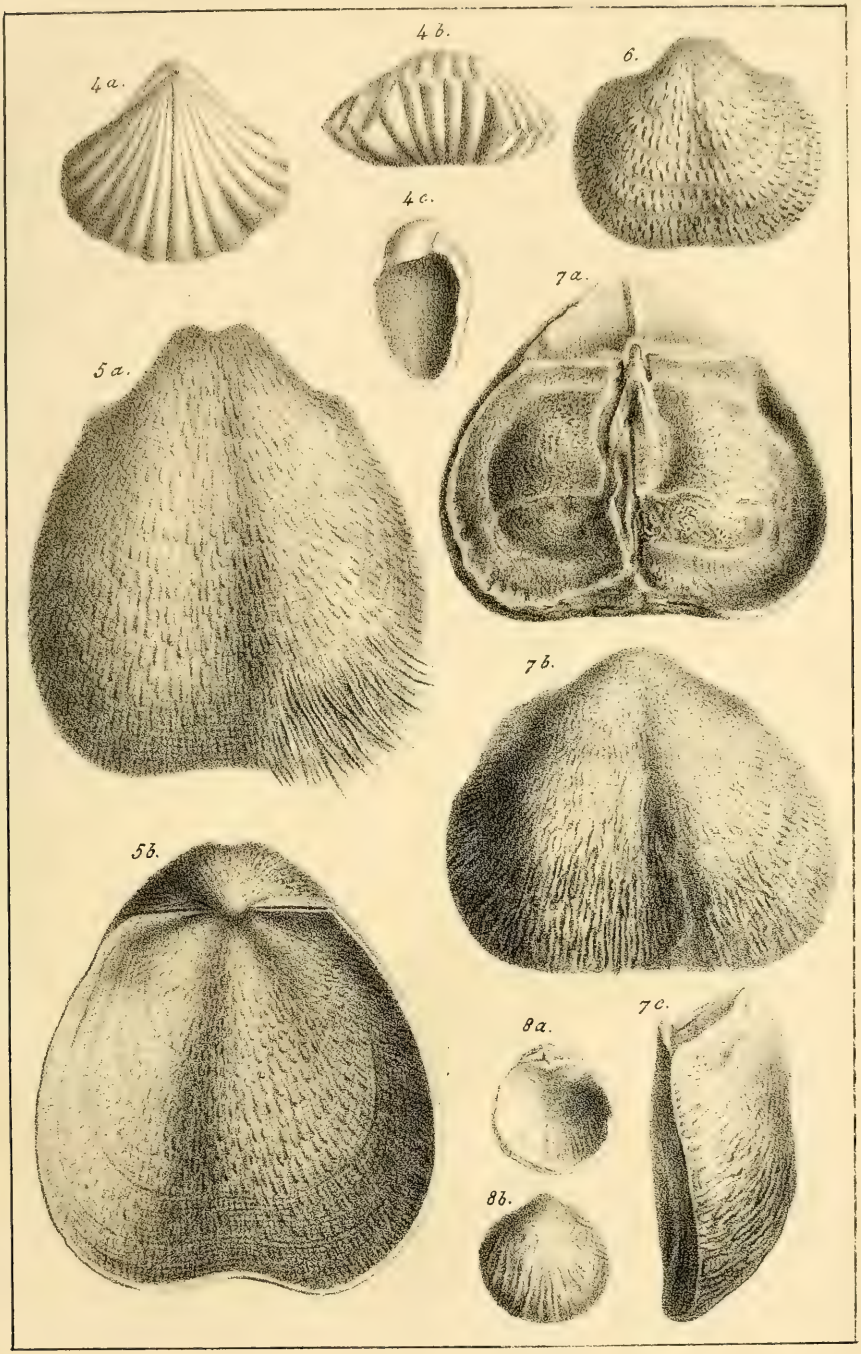

3.
1.
2 a.
2.
1 a.

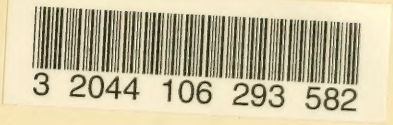
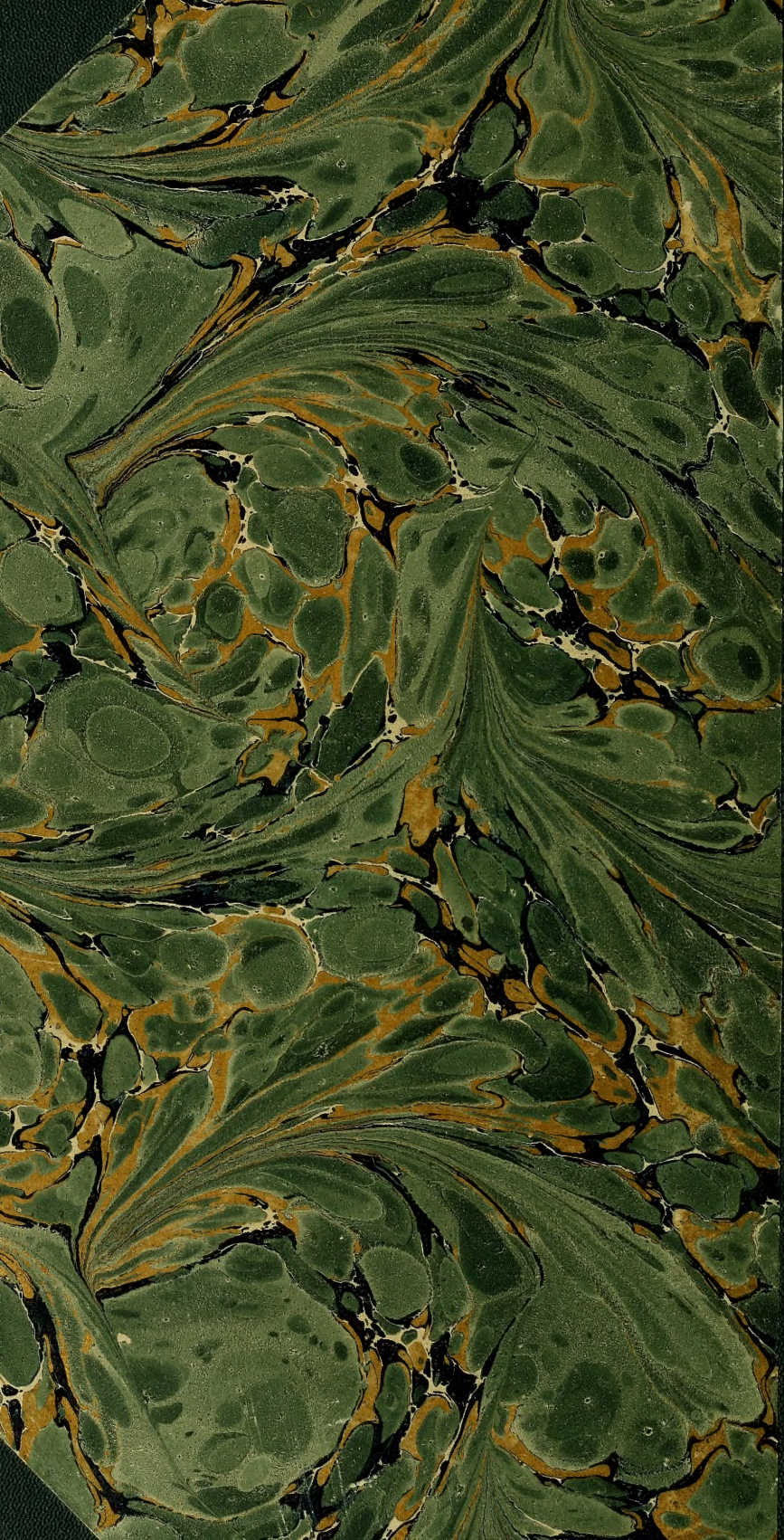
1.
1 a.
2.
2 a.
3.
3 a.
4.
4 a.
5.
5 a.
6.
6 a.
6 b.
7.
7 a.


1a
1b
3d
3c
3a
1c
2
3b
3b
3a
4a
4b
6
7a
4c
5a
5b
10
7b
11c
9
11b
11a


16 b
16 a
15 a
15 b
17
16 c
14
15 c
12
19 a
21
13
19 b
20
18


3a.
3b.
2b.
2a.
2c.
1c.
1b.
1a.


4 b.
4 a.
6.
4 c.
7 a.
5 a.
7 b.
5 b.
8 a.
7 c.
8 b.


3 2044 106 293 582